

ラーメン隅角部の腹板の座屈値について

正員 渡辺 昇*
学生員 川上 洵**

1 ま え が き

腹板の座屈に関しては、*DIN 4114* に、曲げ応力、せん断応力、圧縮応力に対し規定されている。また、弾性安定要覧¹⁾その他の板の座屈関係の文献^{2), 3)}にも、平板の座屈値として網羅されている。従って、鉄桁橋の腹板の座屈が問題の場合は、上述の成果をもとに解決することができる。

一方、腹板でも、ラーメン隅角部や、支承付近の座屈はその応力分布が複雑であるため取扱いが難しくなる。この種の座屈の研究は、*Bleich*⁴⁾が応力分布を単純化して解き、又、*Chui*⁵⁾は、構造を単純化して解いた。このような現況から、著者らは、先に隅角部が円弧形式で外荷重として、モーメント、せん断力、軸力が作用するときの腹板の座屈値を検討した。これは、隅角部を円弧形式とすることにより応力分布を *Airy* の応力関数—極座標表示—から求めることが出来、座屈値を得た。

今回、その成果の拡張として、図-1のような、ラーメン橋、フィーレンディール橋等にみられる、梁と柱からなる隅角部の座屈を取り扱った。解析は、外力が作用したときの応力分布を求め、その限界値を、エネルギー法、及び階差法により決定した。

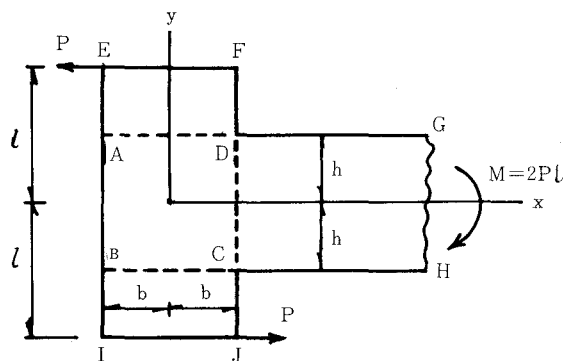


図-1

2 応力分布

図-1のような外力 P 、 M が作用するときの、隅角部 $ABCD$ 内の応力を調べる。応力関数 F に関する適合条件式

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 \quad (1)$$

を満足する関数、重調和関数は、沢山ある。この関数のうち、代数多項式の和により、 F を次の様に仮定する。ここで、座標軸 x 、 y は、図-1 のようにとった。

$$\begin{aligned} F = & C_0 + C_{11}x + C_{12}y \\ & + C_{21}x^2 + C_{22}xy + C_{23}y^2 \\ & + C_{31}x^3 + C_{32}x^2y + C_{33}xy^2 + C_{34}y^3 \\ & + C_{41}(x^4 - 3x^2y^2) + C_{42}x^3y + C_{43}xy^3 + C_{44}(y^4 - 3x^2y^2) \\ & + C_{51}(x^5 - 5x^3y^2) + C_{52}(x^4y - x^2y^3) + C_{53}(y^4x - y^2x^3) \\ & + C_{54}(y^5 - 5y^3x^2) \\ & + C_{61}(x^6 - 10x^4y^2 + 5x^2y^4) + C_{62}(x^5y - \frac{5}{3}x^3y^3) \\ & + C_{63}(y^5x - \frac{5}{3}x^3y^3) + C_{64}(y^6 - 10y^4x^2 + 5y^2x^4) \end{aligned} \quad (2)$$

式(2)より応力は

$$\begin{aligned} \sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = & 2C_{23} + 2C_{33}x^2 + 6C_{34}y \\ & - 6C_{41}x^2 + 6C_{43}xy + C_{44}(12y^2 - 6x^2) \\ & - 10C_{51}x^3 - 6C_{52}x^2y + C_{53}(12y^2x^2 - 2x^3) \\ & + C_{54}(20y^3 - 30x^2y) \\ & + C_{61}(-20x^4 + 60x^2y^2) - 10C_{62}x^3y + C_{63} \times \\ & (20y^3x - 10yx^3) + C_{64}(30y^4 - 120y^2x^2 + 10x^4) \end{aligned} \quad (3)$$

* 北海道大学工学部教授 工博

** 北海道大学大学院 博士課程

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2C_{21} + 6C_{31}x + 2C_{32}y \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & + C_{41}(12x^2 - 6y^2) + 6C_{42}xy - 6C_{44}y^2 \\ & + C_{51}(20x^3 - 30xy^2) + C_{52}(12x^2y - 2y^3) - 6C_{53}xy^2 \\ & - 10C_{54}y^3 \\ & + C_{61}(30x^4 - 120x^2y^2 + 10y^4) + C_{62}(20x^3y - 10xy^3) \\ & - 10C_{63}y^3x + C_{64}(-20y^4 + 60y^2x^2) \end{aligned}$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -C_{22} - 2C_{32}x - 2C_{33}y$$

$$\begin{aligned} & + 12C_{41}xy - 3C_{42}x^2 - 3C_{43}y^2 + 12C_{44}xy \\ & + 30C_{51}xy + C_{52}(-4x^3 + 6xy^2) + C_{53}(-4y^3 + 6yx^2) \\ & + 30C_{54}y^2x \\ & + C_{61}(80xy^3 - 40xy^3) + C_{62}(-5x^4 + 15x^2y^2) \\ & + C_{63}(-5y^4 + 15y^2x^2) + C_{64}(80y^3x - 40yx^3) \end{aligned}$$

となる。ここで、 C_{ij} は次の境界条件より決定する。
図-1 は図-2 のような応力状態となるので、境界条件は次の通りである。

$$\begin{aligned} \text{境界条件 [I] } & x = b : \tau_{xy} = 0 \\ \text{[II] } & x = -b : \tau_{xy} = 0 \\ \text{[III] } & x = -b : \sigma_x = 0 \\ \text{[IV] } & x = b : \sigma_x = \frac{3Pl}{h^3}y \end{aligned}$$

$$\left(\int_{-h}^h \sigma_{xy} dy = M \right)$$

$$\text{[V] } -P = \int_b^b \tau_{xy} dx$$

是より係数は、

$$C_{22} = (10h^3 - 15h^2l + b^2l) \cdot 3b^2P / 40b^3h^3$$

$$C_{34} = \frac{lP}{4h^3}$$

$$C_{42} = -(10h^3 - 15h^2l + 6b^2l) P / 40b^3h^3$$

$$C_{45} = 3lP / 8bh^3$$

$$C_{62} = 3lP / 40b^3h^3 \quad \text{その他の } C_{ij} = 0$$

となり、応力関数、応力が求まる

$$F = \frac{P}{40b^3h^3} [(10h^3 - 15h^2l + b^2l)(3b^2 - x^2)xy + 5b^2l(2by^2 - x^3 + 3xy^2)y + 3l(x^2 - \frac{5}{3}y^2)x^3y] \quad (6)$$

$$\sigma_x = \frac{2lP}{4b^3h^3} (2b^3 + 3b^2x - x^3)y \quad (7)$$

$$\sigma_y = -\frac{3P}{20b^3h^3} [10h^3 + 2l(3b^2 - 5x^2) - 5l(3h^2 - y^2)]xy \quad (8)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{3P}{40b^3h^3} (b^2 - x^2) [10h^3 - 15h^2l + b^2l - 5l(x^2 - 3y^2)] \quad (9)$$

結局、隅角部周辺での応力分布は、図-2 のとおりになる。

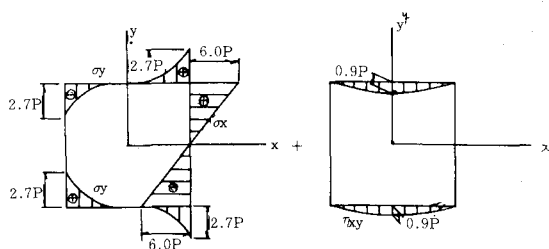


図-2

3 エネルギー法による座屈計算

隅角部 ABCD を周辺単純支持の矩形板とし、座屈曲面を次のように仮定する。

$$w = \sum_m \sum_n A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{2b} \cdot \frac{n\pi y}{2h} \quad (10)$$

ただし、ここでは、座標原点を B にとり B-C を x 軸、B-A を y 軸に選んだ。

式(10)より

$$\left. \begin{aligned} w_x &= \sum_m \sum_n \frac{m\pi}{2b} A_{mn} \cos \frac{m\pi x}{2b} \sin \frac{n\pi y}{2h} \\ w_y &= \sum_m \sum_n \frac{n\pi}{2h} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{2b} \cos \frac{n\pi y}{2h} \\ w_{xx} &= -\sum_m \sum_n \left(\frac{m\pi}{2b} \right)^2 A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{2b} \sin \frac{n\pi y}{2h} \\ w_{yy} &= -\sum_m \sum_n \left(\frac{n\pi}{2h} \right)^2 A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{2b} \sin \frac{n\pi y}{2h} \\ w_{xy} &= \sum_m \sum_n \left(\frac{m\pi}{2b} \right) \left(\frac{n\pi}{2h} \right) A_{mn} \cos \frac{m\pi x}{2b} \cos \frac{n\pi y}{2h} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

が成り立つ。

平板のひずみエネルギーは

$$U_1 = \frac{D}{2} \int_0^{2b} \int_0^{2h} \{ (w_{xx} + w_{yy})^2 - 2(1-\mu)(w_{xx}w_{yy} - w_{xy}^2) \} dx dy$$

式(15)より

$$A_{mn}R_{mn} - P \{ A_{mn}B_{mn} + \sum A_{mq}B_{mnmq} + \sum A_{pn}B_{mnpn} \} \quad (17)$$

$$+\Sigma\Sigma A_{mnpq} B_{mnpq}\} = 0$$

ここで

である。

であり

$Bijkl$ は、長くなるのでここでは省略する。

式(17)に示されるように、 $m \times n$ 元の固有値計算となる。

$$\frac{\partial \Pi}{\partial A_{mn}} = \int_0^{2b} \int_0^{2h} \frac{\partial F}{\partial A_{mn}} = 0 \quad (15)$$

4 階差式による座屈計算

平板が面内応力、 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} をうけて w だけ撓んだ状態で、釣合方程式をたてると、次のようになる。

$$D \cdot \nabla^4 W + t\sigma_x \cdot W_{xx} + t\sigma_y W_{yy} + 2t\tau_{xy} W_{xy} = 0 \quad (19)$$

ここで

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

图 - 3

图-4

式(19)を階差表示すると、図-3、又は、図-4のようになる。

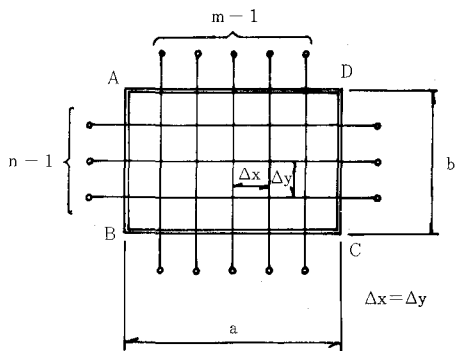


図-5

対象とする短形板 $ABCD$ と図-5に示すように AD を m 分割、 AB を n 分割する $m \times n$ の正方形格子を考える。板内の格子点について、階差表示し、まとめると次のような方程式を得る。

$$\{A_{11}\}\{W_i\} + \{A_{12}\}\{W_d\} = P(\{B_{11}\}\{W_i\} + \{B_{12}\}\{W_d\}) \quad (21)$$

$$\{A_{21}\}\{W_i\} + \{A_{22}\}\{W_d\} = 0 \quad (22)$$

ただし

$\{w_i\}$: $(m-1)(n-1) \times 1$ の列ベクトルで板格子内の撓み

$\{W_d\}$: $2(m+n-4) \times 1$ の列ベクトルでダミイの点の値

$\{A_{11}\}$: $(m-1)(n-1) \times (m-1)(n-1)$ の正方マトリックス

$\{A_{12}\}$: $(m-1)(n-1) \times 2(m+n-4)$ のマトリックス

$\{A_{21}\}$: $2(m+n-4) \times (m-1)(n-1)$ のマトリックス

$\{A_{22}\}$: $2(m+n-4) \times 2(m+n-4)$ の正方マトリックス

である。

式(22)が境界条件より決る。

式(21)と式(22)より $\{w_d\}$ を消去すると

$$(\{A_{11}\} - \{A_{12}\}\{A_{22}^{-1}\}\{A_{21}\})\{W_i\} = P(\{B_{11}\} - \{B_{12}\}\{A_{22}^{-1}\}\{A_{21}\})\{W_i\} \quad (23)$$

と固有方程式を得る。式(23)から求まる最大固有値の逆数をとれば、座屈値が求まる。ここで注意すべき点は、式(19)から式(21)を導く際に σ_x , σ_y , τ_{xy} の値は式(7)(8)(9)を用いて計算する。また式(22)は階差法の利点である任意の境界条件を採用できることを示す。

5 座屈強度

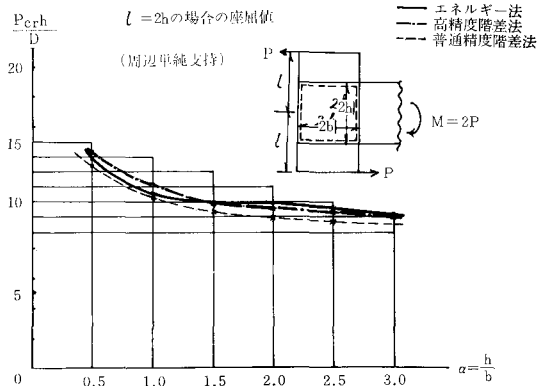


図-6

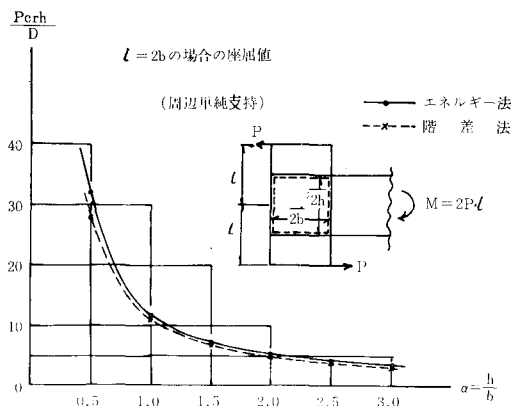


図-7

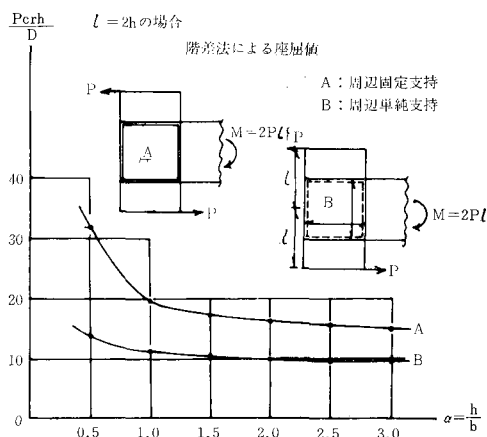


図-8

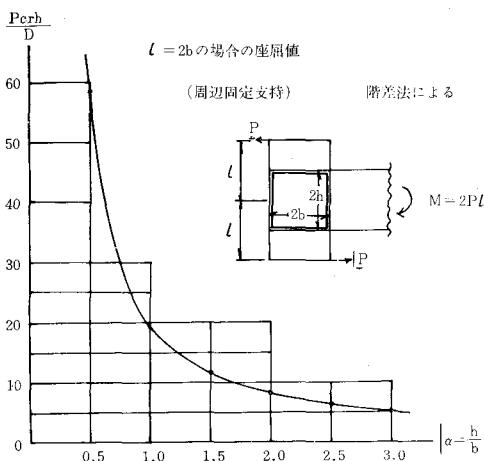


図 - 9

図 - 6 は $l = 2h$ と一定としておき、 $2b$ を変化させたときの周辺単純支持の場合の座屈値を示したものである。縦軸に $\frac{P_{crit}}{D}$ という値をとり、横軸に辺比をとった。またエネルギー法と階差法とによる座屈値を比較した。

図 - 7 は、 $l = 2b$ 、 $2h = \text{const}$ としたとき即ち、辺比に外力が比例するときの周辺単純支持の場合の座屈値である。エネルギー法と階差法による座屈値である。このとき波長は、 $m = 5$ 、 $n = 5$ をとった。

図 - 8 は、 $l = 2h$ としたときで、周辺単純支持の場合と周辺固定支持の場合との座屈値を示したものであり、階差法によった、階差法において、分割数は、 $2h$ を 6 等分した。

図 - 9 は、 $l = 2b$ で $2h = \text{const}$ のとき、周辺固定支持としたときの階差法による座屈値である。

6 あとがき

従来の平板の座屈問題では、外荷重は、等分布圧縮力、一次曲線の曲げ応力、そして、等分布のせん断応力を想定した。然し、実際の構造物では、これらの外荷重が n 次曲線であることが多い。複雑な構造物のみならず、例えば、鉄桁橋の腹板におけるせん断応力は、二次曲線である。さらに、周辺条件は種々な制約から単純支持のみが多く取り扱われてきた。以上の問題の解決の方法として、式 (13)、及び、式 (19) の応力の項に Airy の応力関数から求めた応力を採用し、エネルギーを求め、又は階差式に組み込んでその後に座屈値を求めなければならない。そして、周辺条件は、階差法により解決される。

図 - 8 はその一例である。又図 - 6 から判るように手法の違いによる顕著な差は、認められない。

図 - 10 は、高精度階差法と普通精度階差法を厳密解が得られている例で検討したものである。

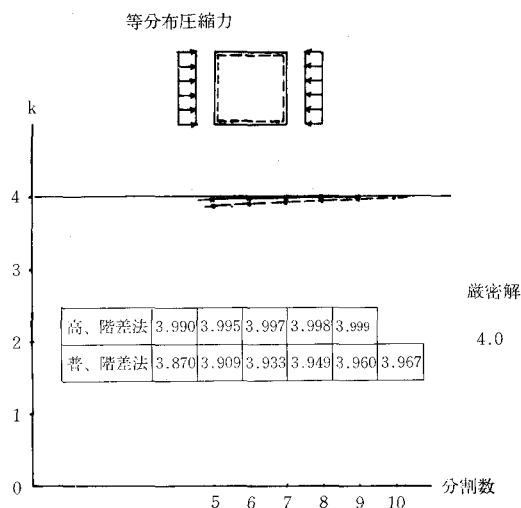


図 - 10

なお、固有値は、QR法により又、電子計算は北大大型計算センターにて行った。

7 参考文献

- 1) 長柱研究委員会：弾性安定要覧（第4篇）コロナ社
- 2) S. Timoshenko, Geve: Theory of Elastic Stability: McGraw - Hill
- 3) E. h. K. Kloppel, J. Scheer : Beulwerte ausgesteifter Rechteckplatten : Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn 1960
- 4) F. Bleich: Design of Rigid Frame Knees: AISC 1943
- 5) K. Y. Chu : Beul untersuchung von ebenen Stegblechen kreisförmig gekrümmter Träger mit I-Querschnitt : Stahlbau 1966, H. 5

- 6) 渡辺、川上、堺： ラーメン隅角部の腹板の座屈
値について 第26回
年次学術講演集
- 7) *M. Gruning: Die Spannungen in
Knotenpunct eines
Vierendeeltragers:
Der Eisenbau* 5
(1914)
- 8) *G. Worch: Beton Kalender*
1963 II Teil p412-422
- 9) *K. Girkmann: Flächen tragwe-
ke, Springer-Ver-
lag* 1963