

上下床版と縦横リブによる

サンドイッチプレートの解析

— 2 辺自由の場合 —

正 員 能町 純雄 *

正 員 ○大島 俊之 **

1. まえがき

著者らは先に周辺単純支持サンドイッチプレートについての理論式を導き、数値計算例を発表し、さらに分割長を無限小にしたとき、直交異方性版の微分方程式の形になることを示した。¹⁾ ここでは直交異方性版の理論との数値的比較を行ない、さらに 2 辺自由、2 辺単純支持の境界条件の場合における解法を示し、同じ式を用いて、2 辺固定の条件の場合にも同様に計算できることを示す。

なお計算の簡単のため、板の変形を板中央に関して対称、中立面に関しても逆対称と考えている。

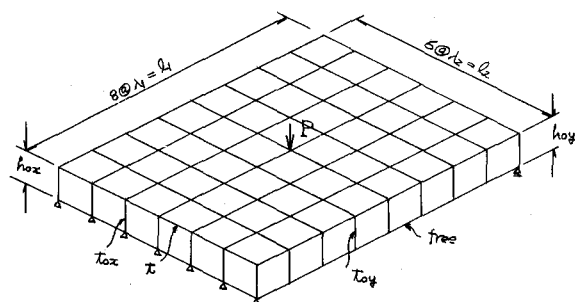


図-1 サンドイッチプレート

2. 基本式

構造を平面要素に分解し、各要素に変位前断式を用い、接合線に沿って前断力の釣合いを考え、変位で表わされた二階常微分方程式を求める。次に要素の接合線の交点における応力と変位の連続条件を用いながら積分し、適合条件を用いて精度よい基本差分方程式を求める。

1) 2)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6} \left(\frac{N_x}{\lambda_1} + \frac{G_t \lambda_1}{\lambda_2} \right) \Delta_x^2 \Delta_y^2 u_{x-1, y-1} + \left(\frac{N_x}{\lambda_1} + \frac{N_{ox}}{6 \lambda_1} \right. \\ & \quad \left. - \frac{G_t \sigma_x \lambda_1}{3 h_{ox}} \right) \Delta_x^2 u_{x-1, y} + \frac{G_t \lambda_1}{\lambda_2} \Delta_y^2 u_{x, y-1} \\ & \quad - 2 \frac{G_t \sigma_x \lambda_1}{h_{ox}} u_{x, y} + \frac{G_t}{4} \Delta_x \Delta_y u_{x, y} \\ & \quad + \frac{G_t \sigma_x}{2} \Delta_x w_{x, y} = 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6} \left(\frac{N_y}{\lambda_2} + \frac{G_t \lambda_2}{\lambda_1} \right) \Delta_x^2 \Delta_y^2 v_{x-1, y-1} + \left(\frac{N_y}{\lambda_2} + \frac{N_{oy}}{6 \lambda_2} \right. \\ & \quad \left. - \frac{G}{3 h} \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) \Delta_y^2 v_{x, y-1} + \frac{G}{\lambda_1} \Delta_x^2 v_{x-1, y} \\ & \quad - 2 \frac{G_t \sigma_y \lambda_2}{h_{oy}} v_{x, y} + \frac{G_t}{4} \Delta_x \Delta_y v_{x, y} \\ & \quad + \frac{G_t \sigma_y}{2} \Delta_y w_{x, y} = 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (2)$$

* 室蘭工業大学 教授 工博

** 北見工業大学 助手 工修

$$\frac{G t_{ox} h_{ox}}{\lambda_1} D_x^2 w_{x-y, y} + \frac{G t_{ox} h_{ox}}{\lambda_2} D_y^2 w_{x, y-1} - G t_{ox} D_x u_{x, y} - G t_{ox} D_y u_{x, y} = -P_{xy} \dots (3)$$

これら三本の基本式に和分変換を行ない、境界値を右辺に移項し整理すると次のようになる。

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{6} \left(\frac{N_x}{\lambda_1} + \frac{G t \lambda_1}{\lambda_2} \right) D_m D_i - \left(\frac{N_x}{\lambda_1} + \frac{N_{ox}}{6 \lambda_1} - \frac{G t_{ox} \lambda_1}{3 h_{ox}} \right) D_m - \frac{G t \lambda_1}{\lambda_2} D_i - 2 \frac{G t_{ox} \lambda_1}{h_{ox}} \right] R_m S_i \{ u_{xy} \} \\ & - G t \sin \frac{m\pi}{n} \sin \frac{i\pi}{k} S_m R_i \{ v_{xy} \} + G t_{ox} \sin \frac{m\pi}{n} S_m S_i \{ w_{xy} \} \\ & = \frac{1}{6} \left(\frac{N_x}{\lambda_1} + \frac{G t \lambda_1}{\lambda_2} \right) \left[-\sin \frac{i\pi}{k} (-1)^m D_x \{ u_{n-1, k} (-1)^i - u_{n-1, o} \} - (-1)^m D_x D_i S_i \{ u_{n-1, y} \} \right. \\ & \quad \left. + \sin \frac{i\pi}{k} D_x \{ u_{o, k} (-1)^i - u_{o, o} \} + D_x D_i S_i \{ u_{o, y} \} + \sin \frac{i\pi}{k} D_m \{ R_m \{ u_{x, k} \} (-1)^i \right. \\ & \quad \left. - R_m \{ u_{x, o} \} \} \right] - \left(\frac{N_x}{\lambda_1} + \frac{N_{ox}}{6 \lambda_1} - \frac{G t_{ox} \lambda_1}{3 h_{ox}} \right) \left[(-1)^m D_x S_i \{ u_{n-1, y} \} - D_x S_i \{ u_{o, y} \} \right] \\ & \quad - \frac{G t \lambda_1}{\lambda_2} \left[-(-1)^i \sin \frac{i\pi}{k} \{ R_m \{ u_{x, k} \} \frac{1}{2} u_{o, k} - \frac{1}{2} (-1)^m u_{n, k} \} + \sin \frac{i\pi}{k} \{ R_m \{ u_{x, o} \} - \frac{1}{2} u_{o, o} \} \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2} (-1)^m u_{n, o} \} + \frac{D_i}{2} \{ S_i \{ u_{o, y} \} + (-1)^m S_i \{ u_{o, y} \} \} \right] - \frac{G t_{ox} \lambda_1}{h_{ox}} \left[(-1)^m S_i \{ u_{n, y} \} \right. \\ & \quad \left. + S_i \{ u_{o, y} \} \right] + \frac{G t}{2} \sin \frac{i\pi}{k} \left[-D_x (-1)^m R_i \{ v_{n-1, y} \} - D_x R_i \{ v_{o, y} \} \right. \\ & \quad \left. + (1 + \cos \frac{m\pi}{n}) \{ R_i \{ v_{n, y} \} \cdot (-1)^m - R_i \{ v_{o, y} \} \} \right] - \frac{G t_{ox}}{2} \left[-D_x (-1)^m S_i \{ u_{n-1, y} \} \right. \\ & \quad \left. - D_x S_i \{ u_{o, y} \} + (1 + \cos \frac{m\pi}{n}) \{ S_i \{ u_{n, y} \} \cdot (-1)^m - S_i \{ u_{o, y} \} \} \right] \dots (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{6} \left(\frac{N_y}{\lambda_2} + \frac{G t \lambda_2}{\lambda_1} \right) D_i D_m - \left(\frac{N_y}{\lambda_2} + \frac{N_{oy}}{6 \lambda_2} - \frac{G t_{oy} \lambda_2}{3 h_{oy}} \right) D_i - \frac{G t \lambda_2}{\lambda_1} D_m - 2 \frac{G t_{oy} \lambda_2}{h_{oy}} \right] S_m R_i \{ v_{xy} \} \\ & - G t \sin \frac{i\pi}{k} \sin \frac{m\pi}{n} R_m S_i \{ u_{xy} \} + G t_{oy} \sin \frac{i\pi}{k} S_m S_i \{ u_{xy} \} \\ & = -\frac{1}{6} \left(\frac{N_y}{\lambda_2} + \frac{G t \lambda_2}{\lambda_1} \right) \left[-\sin \frac{m\pi}{n} (-1)^i D_y \{ v_{n, k-1} (-1)^m - v_{o, k-1} \} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -(-1)^i d_y D_m S_m(v_{x, k-1}) + \sin \frac{m\pi}{n} d_y \{v_{n, o} (-1)^m - v_{o, o}\} + d_y D_m S_m(v_{x, o}) \\
& + D_i \cdot \sin \frac{m\pi}{n} \{R_i(v_{n, y}) \cdot (-1)^m - R_i(v_{o, y})\} \\
& - \left(\frac{N_y}{\lambda_2} + \frac{N_{oy}}{6\lambda_2} - \frac{Gt_{oy} \lambda_2}{8h_{oy}} \right) [(-1)^i d_y S_m(v_{x, -1}) - d_y S_m(v_{x, o})] \\
& - \frac{Gt_{\lambda_2}}{\lambda_2} \left[-(-1)^m \cdot \sin \frac{m\pi}{n} \{R_i(v_{k, y}) - \frac{1}{2} v_{k, o} - \frac{1}{2} (-1)^i v_{n, u}\} + \sin \frac{m\pi}{n} \{R_i(v_{o, o}) - \frac{1}{2} v_{o, o} \right. \\
& \left. - \frac{1}{2} (-1)^i v_{o, k}\} + \frac{D_m}{2} \{S_m(v_{x, o}) + (-1)^i S_m(v_{x, k})\} - \frac{Gt_{oy} \lambda_2}{h_{oy}} [(-1)^i S_m(v_{x, k}) + S_m(v_{x, o})] \right. \\
& \left. + \frac{Gt}{2} \sin \frac{m\pi}{n} [-d_y (-1)^i R_m(u_{x, k-1}) - d_y R_m(u_{x, o}) + (1 + \cos \frac{i\pi}{k}) \{R_m(u_{x, k}) \cdot (-1)^l \right. \\
& \left. - R_m(u_{x, o})\}] - \frac{Gt_{oy}}{2} [d_y (-1)^i \cdot S_m(w_{x, -1}) - d_y S_m(w_{y, o}) + (1 + \cos \frac{i\pi}{k}) \{S_m(w_{x, k}) \cdot (-1)^i \right. \\
& \left. - S_m(w_{x, y})\}] \right] \dots \dots \dots (5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left\{ \frac{Gt_{ox} h_{ox}}{\lambda_1} D_m + \frac{Gt_{oy} h_{oy}}{\lambda_2} D_i \right\} S_m S_i(w_{y, y}) + 2 \cdot Gt_{ox} \sin \frac{m\pi}{k} R_m S_i(u_{x, y}) \\
& + 2 \cdot Gt_{oy} \sin \frac{i\pi}{k} S_m R_i(v_{x, y}) \\
& = -P_{xy} - \frac{Gt_{ox} h_{ox}}{\lambda_1} \left[-(-1)^m \cdot \sin \frac{m\pi}{k} S_i(w_{k, y}) + \sin \frac{m\pi}{k} S(w_{o, y}) \right] \\
& - \frac{Gt_{oy} h_{oy}}{\lambda_2} \left[-(-1)^i \sin \frac{i\pi}{k} S_m(w_{x, k}) + \sin \frac{i\pi}{k} S_m(w_{x, o}) \right] \dots \dots \dots (6)
\end{aligned}$$

3. 境界条件・境界値方程式について

基本微分方程式について境界での応力、変位の項 $S_i(u_{0,y})$ 、 $S_i(w_{0,y})$ 、 $S_m(v_{x,0})$ 、 $R_i(v_{0,y})$ など
を求め2辺自由、2辺単純支持の条件を代入すると次のようになる。2辺固定の場合には右辺に境界の $ress$ の項
が残ることになり、それらは境界値方程式から求める。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\lambda_1} (N_x + \frac{N_{ox}}{6}) (S_i(u_{1,y}) - S_i(u_{0,y})) + \frac{Nx}{6\lambda_1} \left[-\sin \frac{i\pi}{k} (-1)^i (u_{1,k} - u_{0,k}) + \sin \frac{i\pi}{k} (u_{1,0} - u_{0,0}) - \right. \\ & D_i (S_i(u_{1,y}) - S_i(u_{0,y})) \left. \right] - \frac{Gt}{2} \sin \frac{i\pi}{k} (R_i(v_{1,y}) - R_i(v_{0,y})) - \frac{Gt_{ox}\lambda_1}{3h_{ox}} (2 \cdot S_i(u_{0,y}) + \\ & S_i(u_{1,y})) + \frac{Gt}{6\lambda_1} \left[-\sin \frac{i\pi}{k} (-1)^i (2u_{0,k} + u_{1,k}) + \sin \frac{i\pi}{k} (2u_{0,0} + u_{1,0}) - D (2 S_i(u_{0,y}) + \right. \\ & S_i(u_{1,y})) \left. \right] + \frac{Gt_{ox}}{2} (S_i(u_{1,y}) - S_i(w_{0,y})) = 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\lambda_2} (N_{2y} + \frac{N_{oy}}{6}) (S_m(v_{x,1}) - S_m(u_{x,0})) + \frac{Ny}{6\lambda_2} \left[-\sin \frac{m\pi}{n} (-1)^m (v_{y,1} - v_{0,1}) + \right. \\ & \sin \frac{m\pi}{n} (v_{0,1} - v_{0,0}) - D_m (S_m(v_{x,1}) - S_m(v_{x,0})) \left. \right] - \frac{Gt}{2} \sin \frac{m\pi}{n} (R_m(u_{x,1}) - R_m(u_{x,0})) \\ & - \frac{Gt_{oy}\lambda_2}{3h_{oy}} (2 \cdot S_m(v_{x,0}) + S_m(v_{x,1})) + \frac{Gt\lambda_2}{6\lambda_1} \left[\sin \frac{m\pi}{k} (-1)^m (2v_{n,0} + v_{n,1}) + \sin \frac{m\pi}{k} (2v_{n,0} + \right. \\ & v_{x,1}) + \sin \frac{m\pi}{n} (2v_{0,0} + v_{0,1}) - D (2 \cdot S_m(v_{x,0}) + S_m(v_{x,1})) \left. \right] + \frac{Gt_{oy}}{2} (S_m(v_{x,1}) - \\ & S_m(w_{x,0})) = 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (8)$$

基本式 (4)、(5)、(6) の右辺に上記境界の条件式(7)、(8)、さらに $S_i(w_{0,y}) = R_i(v_{0,y}) = 0$ を適用して消
却すると、それぞれ次の項が基本式の荷重項として残る。

$$\begin{aligned} P_1 &= \left[\frac{Nx}{6\lambda_1} D_m - \frac{Gt\lambda_1}{\lambda_2} \left(1 - \frac{D}{6} \right) \right] \sin \frac{i\pi}{k} a \cdot R_m(u_{x,0}) \\ P_2 &= -P_{x,y} - \frac{Gt_{oy}h_{oy}}{\lambda_2} \sin \frac{i\pi}{k} \cdot S_m(w_{x,0}) \quad \dots\dots\dots (9) \\ P_3 &= \frac{Gt_{oy}}{2} (1 + \cos \frac{i\pi}{k}) \cdot a \cdot S_m(w_{x,0}) - \frac{Gt}{2} \sin \frac{m\pi}{n} (1 + \cos \frac{i\pi}{k}) \cdot R_m(u_{x,0}) \end{aligned}$$

一方境界でのフリあり式を立て、自由辺について、次の2本の境界値方程式を得る。

$$(\bar{A}_{51} + \bar{A}_{51} D_m) S_m(w_{x0}) - 2 \bar{A}_{52} S_m(u_{x0}) + 4 \bar{A}_{52} \sin \frac{m\pi}{k} R_m(u_{x0}) \\ = \bar{A}_{51} S_m(w_{x1}) + 2 \bar{A}_{52} S_m(v_{x1}) \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$\tilde{A}_{11} R_m(u_{x0}) + \tilde{A}_{12} R_m(u_{x1}) + \tilde{C}_{11} (S_m(u_{x0}) + S_m(v_{x1})) + \tilde{C}_{12} S_m(w_{x0}) = 0 \quad \dots\dots\dots (11)$$

ただし $\bar{A}_{51} = \frac{G t_{oy} h_{oy}}{\lambda_2}, \bar{A}_{51} = \frac{G t_{ox} h_{ox}}{\lambda_1}, \bar{A}_{52} = -\frac{G t_{oy}}{2}$

$$\tilde{A}_{52} = -\frac{G t_{ox}}{2}, D_m = 2(1 - \cos \frac{m\pi}{k})$$

$$\tilde{A}_{11} = -\left\{ \frac{1}{\lambda_1} \left(\frac{N_x}{6\lambda_1} + \frac{N_{ox}}{6} \right) - \frac{G\lambda_1}{6} \left(\frac{t}{\lambda_2} + \frac{2t_{ox}}{h_{ox}} \right) \right\} D_m - G\lambda_1 \left(\frac{t}{\lambda_2} + \frac{2t_{ox}}{h_{ox}} \right)$$

$$\tilde{A}_{12} = -\left(\frac{N_x}{6\lambda_1} + \frac{G t \lambda_1}{6\lambda_2} \right) D_m + \frac{G t \lambda_1}{\lambda_2}$$

$$\tilde{C}_{11} = \frac{G t}{2} \sin \frac{m\pi}{k}, \quad \tilde{C}_{12} = G t_{ox} \sin \frac{m\pi}{k}$$

基本式を解くと $(U = X^{-1} P)$ 、 $R_m S_i(u_{xy})$ 、 $S_m S_i(w_{x0})$ 、 $S_m R_i(v_{xy})$ は、境界値 $R_m(u_{x0})$ 、 $S_m(w_{x0})$ を含んだ式で表わされる。次に i の方向にのみ逆変換して、境界値方程式に出てくる荷重項を計算する。

即ち、 $R_m(u_{x1})$ 、 $S_m(w_{x1})$ 、 $S_m(v_{x1})$ 、 $S_m(v_{x0})$ は、逆変換されて次のような形となる。

$$R_m(u_{x1}) = d_{11} + d_{12} S_m(w_{x0}) + d_{13} R_m(u_{x0}) \\ S_m(w_{x1}) = d_{21} + d_{22} S_m(w_{x0}) + d_{23} R_m(u_{x0}) \\ S_m(v_{x1}) = d_{31} + d_{32} S_m(w_{x0}) + d_{33} R_m(u_{x0}) \\ S_m(v_{x0}) = d_{41} + d_{42} S_m(w_{x0}) + d_{43} R_m(u_{x0}) \quad \dots\dots\dots (12)$$

ただし、 $d_{11} \sim d_{43}$ の係数は、基本式における $S_m(w_{x0})$ 、 $R_m(u_{x0})$ 等の係数を i について集めた値である。

(12)式を(10)、(11)式に代入して境界値 $R_m(u_{x0})$ 、 $S_m(w_{x0})$ は求められる。次にこの境界値を(9)式に代入して、全ての物理量を求めることができる。たとえば x 方向の床版内の応力は次式で求められる。

$$\left\{ \left(1 - \frac{D_i}{6}\right) N_x + \frac{N_{ox}}{6} \right\} S_i(u_{x,y}) = \left\{ \left(1 - \frac{D_i}{6}\right) \frac{N_x}{\lambda_1} + \frac{N_{ox}}{6\lambda_1} \right\} (S_i(u_{x+1,y}) - S_i(u_{x,y})) -$$

$$\left\{ \frac{G t_{ox} \lambda_1}{3 h_{ox}} + \frac{G t \lambda_1}{6 \lambda_2} D_i \right\} (2 S_i(u_{x,y}) + S_i(u_{x+1,y})) - \frac{G t}{2} \sin \frac{i \pi}{k} (R_i(v_{x+1,y}) -$$

$$R_i(v_{x,y})) + \frac{G t_{ox}}{2} (S_i(w_{x+1,y}) - S_i(w_{x,y})) \quad \dots\dots\dots (13)$$

4. 数値計算例

図2、図3は周辺単純支持サンドイッチプレートについて、直交異方性版理論との数値的比較を、版中央に作用する集中荷重について行なったものである。

$$E = 34,800 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \quad \nu = 0.0 \quad t = 3 \text{ mm}$$

$$t_{ox} = t_{oy} = 5 \text{ mm} \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 10 \text{ cm} \quad h_{ox} = h_{oy} = 6 \text{ cm}$$

縦リブ枚数6枚、横リブ枚数7枚

撓み w 、長辺方向応力 σ_x については、荷重点を中心として、本理論値が版理論値より大きく出ているが、短辺方向応力 σ_y については比較的近い値を示している。

図4、図5は長辺方向に自由、他の2辺単純支持のサンドイッチプレートについて、版中央に集中荷重が作用している場合、縦リブの厚さ、床版の厚さの変化につれて、版の撓み、応力がどのように変化するか調べたものである。用いた数値は次のようである。

$$E = 210,000 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \quad G = 90,000 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \quad t_{oy} = 20 \text{ cm}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 5 \text{ m} \quad h_{ox} = h_{oy} = 3 \text{ m} \quad \text{縦リブ枚数5枚}$$

$$\text{横リブ枚数7枚}$$

図を見ると、撓み w 、短辺方向応力 σ_y は(床板厚)／(縦リブ厚)が小さくなるにつれて小さくなっているが、一方、長辺方向応力 σ_x は荷重点近傍で、逆に大きくなっている。(この場合断面二次モーメントが常に等しくなるように厚さをきめている。)

5. あとがき

以上2辺自由の場合の理論式を導き、数値計算を示したが、今後他の境界条件：荷重条件の計算結果についても発表する予定である。

6. 参考文献

- 1) 熊町純雄、大島俊之：上下床版と縦横リブによるサンドイッチプレートの解析、土木学会年次学術講演会講演集 第27回(1972)

- 2) 熊町純雄、松岡健一、大島俊之：縦横リブを有する板の応力解析について：マトリックス構造解析法研究発表会論文集。第5回(1971)

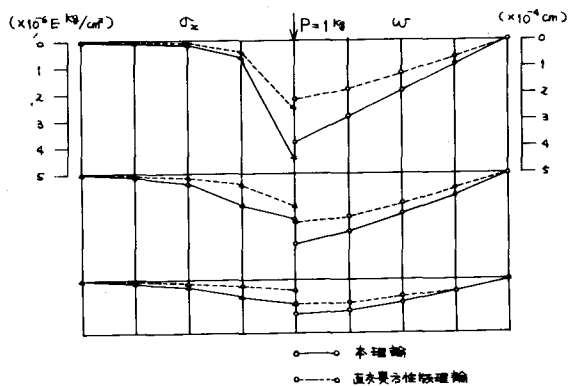


図-2 直交異方性版との比較 (1)

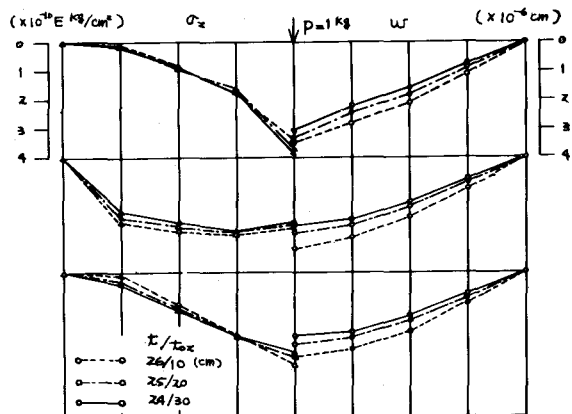


図-4 (床版厚) / (縦リブ厚) の変化による
接み w , 長辺方向応力 σ_y の変化

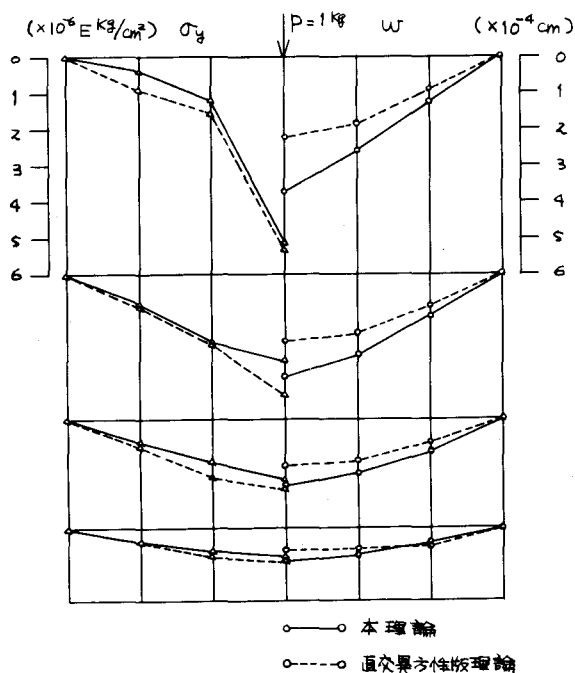


図-3 直交異方性版との比較(2)

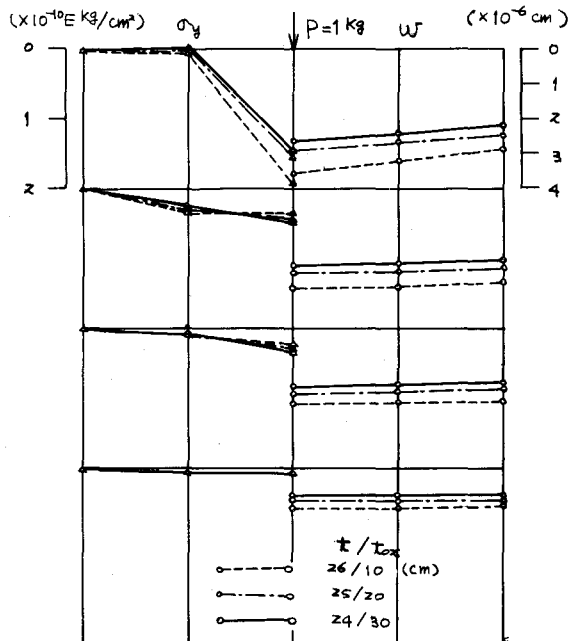


図-5 (床版厚) 1 (縦リブ厚) の変化による
接み w , 短辺方向応力 σ_y の変化