

横荷重を受けるマルチセルケーションの応力解析

正員 能町純雄 *
 正員 尾崎 訂 **
 学生員 ○佐藤 博 ***

1. まえがき

構造物の大型化に伴い、マルチセル構造のケーションを基礎として用いることが考えられる。先に、変位せん断公式とフーリエ定和分変換によって、方眼マルチセル構造物が軸方向の両端で単純支持されている場合の曲げ解析について(1)は一部発表しているが、ここではこの解析方法を用いて重合せの原理により横荷重を受けるマルチセルケーションについての応力解析を行った。

2. 基本公式

(a) 変位せん断公式(2)

図-1のようなマルチセルケーションにおいて、X、Y、Z方向の変位をu、v、w、X軸回りの回転角をθとし、細長い矩形帶板要素を取り出すと、縁z、z+1でのせん断力T、法線方向力Sは次のように示される。

$$\begin{aligned} T_{z,z+1} &= \frac{ANa}{6} (2\dot{u}_z + \dot{u}_{z+1}) + \frac{\nu Na}{2} (\dot{w}_{z+1} - \dot{w}_z) \\ &+ \frac{Gta}{2} (\dot{w}_z + \dot{w}_{z+1}) + \frac{Gta}{A} (\dot{u}_{z+1} - \dot{u}_z) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} T_{z+1,z} &= \frac{ANa}{6} (2\dot{u}_{z+1} + \dot{u}_z) + \frac{\nu Na}{2} (\dot{w}_{z+1} - \dot{w}_z) \\ &- \frac{Gta}{2} (\dot{w}_z + \dot{w}_{z+1}) - \frac{Gta}{A} (\dot{u}_{z+1} - \dot{u}_z) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} S_{z,z+1} &= \frac{Na}{A} (w_{z+1} - w_z) + \frac{\nu Na}{2} (\dot{u}_z + \dot{u}_{z+1}) \\ &+ \frac{Gta}{2} (\dot{u}_{z+1} - \dot{u}_z) + \frac{GAta}{6} (2\dot{w}_z + \dot{w}_{z+1}) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} S_{z+1,z} &= \frac{Na}{A} (w_{z+1} - w_z) + \frac{\nu Na}{2} (\dot{u}_z + \dot{u}_{z+1}) \\ &- \frac{Gta}{2} (\dot{u}_{z+1} - \dot{u}_z) - \frac{GAta}{6} (2\dot{w}_z + \dot{w}_{z+1}) \\ &+ \dot{w}_z \end{aligned} \quad (4)$$

$$Na = Eta / (1 - \nu^2) \quad \dot{u} = du / dx$$

曲げに関して帶板の縁、z、z+1におけるモーメントMとそれによるせん断力Xとすると

$$M_{z,z+1} = 2Ka (2\theta z + \theta_{z+1} - 3\Delta v_z / A) \quad (5)$$

$$M_{z+1,z} = 2Ka (2\theta_{z+1} + \theta_z - 3\Delta v_z / A) \quad (6)$$

$$AX_{z,z+1} = -6Ka (\theta z + \theta_{z+1} - 2\Delta v_z / A) \quad (7)$$

$$X_{z,z+1} = X_{z+1,z} \quad (8)$$

$$\Delta v_z = v_{z+1} - v_z \quad Ka = Eta^3 / 12A (1 - \nu^2)$$

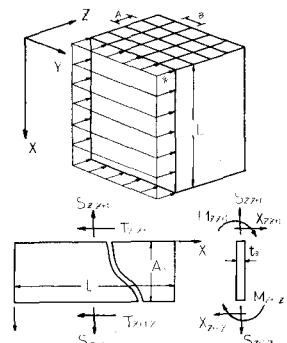


図-1

3. マルチセル構造体の解析

部材接合部における力のつり合を図-2に示す。

$$T_{y,y+1} + T_{y,y-1} + T_{z,z+1} + T_{z,z-1} = 0 \quad (9)$$

$$S_{y,y+1} - S_{y,y-1} - X_{z,z+1} + X_{z,z-1} = 0 \quad (10)$$

$$X_{y,y+1} - X_{y,y-1} + S_{z,z+1} - S_{z,z-1} = 0 \quad (11)$$

$$M_{y,y+1} + M_{y,y-1} + M_{z,z+1} + M_{z,z-1} = 0 \quad (12)$$

Z=0上の端部材では

$$oT_{y,y+1} + oT_{y,y-1} + yT_{o,1} = 0 \quad (13)$$

$$oS_{y,y+1} - oS_{y,y-1} - yX_{o,1} = 0 \quad (14)$$

$$oX_{y,y+1} - oX_{y,y-1} + yS_{o,1} = -P_{o,y} \quad (15)$$

$$oM_y, y+1 + oM_y, y-1 + yM_o, 1 = 0 \quad (16)$$

$$z_0 T_o, 1 + Y_o T_o, 1 = 0 \quad (17)$$

$$Z_o S_o, 1 - Y_o X_o, 1 = -Y_{L,o} \quad (18)$$

$$Z_o X_o, 1 - Y_o S_o, 1 = -P_{O,o} \quad (19)$$

$$Z_o M_o, 1 + Y_o M_o, 1 = -M_{L,o} \quad (20)$$

(13)~(20)と同様な式が、 $z = k$, $y = o$, n の端部材接合部でも成立する。

各つり合式に(1)~(8)式を代入、X軸方向の両端で単純支持され、断面方向には完全に剛な隔壁で変形が阻止されていると仮定してフーリエsin級数に変換する。(9)~(12)をY, Z方向に定め分変換⁽³⁾し(13)~(20)の端部材でのつり合式の一部を考慮すると次のようになる。

$$(A_r - A_d D_i - A_s D_j) \tilde{U}_{ij} + A_s \tilde{W}_{ij} = A_s \sin(i\pi/n) \tilde{U}_j + A_s \sin(j\pi/k) \tilde{U}_i \quad (21)$$

$$(B_r - B_d D_i - B_s D_j) \tilde{V}_{ij} + B_s \tilde{W}_{ij} - B_s \tilde{\Theta}_{ij} = B_s \tilde{U}_j + B_s \tilde{D}_j \tilde{V}_j + B_s \sin(j\pi/k) \tilde{V}_i + B_s \sin(j\pi/k) \tilde{W}_o + B_s A_s \sin(j\pi/k) \tilde{\Theta}_j + \tilde{Y}_j \quad (22)$$

$$(C_r - C_d D_i - C_s D_j) \tilde{W}_{ij} + C_s \tilde{U}_{ij} + C_s \tilde{\Theta}_{ij} = C_s \tilde{U}_i + C_s D_i \tilde{W}_i + C_s \sin(i\pi/n) \tilde{W}_j + C_s \sin(i\pi/n) \tilde{W}_o - C_s B_s \sin(j\pi/k) \tilde{\Theta}_i + \tilde{P}_i \quad (23)$$

$$(D_r + D_d D_i + D_s D_j) \tilde{\Theta}_{ij} - D_s \tilde{V}_{ij} + D_s \tilde{W}_{ij} = D_s \tilde{V}_j + D_s \tilde{V}_i + D_s \tilde{W}_o + D_s \tilde{W}_i + D_s \tilde{W}_j - D_s \tilde{W}_o + D_{12} \tilde{\Theta}_i - D_{13} \tilde{\Theta}_j - \tilde{M}_o \quad (24)$$

\tilde{U}_{ij} , \tilde{V}_{ij} , \tilde{W}_{ij} , $\tilde{\Theta}_{ij}$ はX方向にフーリエ変換、Y, Z方向に定め分変換したものである。

$$\tilde{U}_{ij} = S_i S_j [\tilde{u}_y, z] \quad \tilde{V}_{ij} = R_i S_j [\tilde{v}_y z]$$

$$\tilde{W}_{ij} = S_i R_j [\tilde{w}_y, z] \quad \tilde{\Theta}_{ij} = R_i R_j [\tilde{\theta}_y z]$$

$$\tilde{U}_j = S_j [(-1)^i \tilde{u}_{nz} - \tilde{u}_o, z]$$

$$\tilde{U}_i = S_i [(-1)^j \tilde{u}_{yk} - \tilde{u}_y, o]$$

$$\tilde{V}_i = S_j [(-1)^i \tilde{v}_{nz} + \tilde{v}_o, z]$$

$$\tilde{V}_o = (-1)^{i+j} \tilde{v}_{nk} + (-1)^j \tilde{v}_{ok} - (-1)^i \tilde{v}_{no} - \tilde{v}_o, o$$

$$\tilde{W}_j = R_j [(-1)^i \tilde{w}_{nk}, z - \tilde{w}_o, z]$$

$$\tilde{W}_i = S_i [(-1)^j \tilde{w}_{yk}, k + \tilde{w}_j, o]$$

$$\tilde{W}_o = (-1)^{i+j} \tilde{w}_{nk} - (-1)^i \tilde{w}_{ok} + (-1)^j \tilde{w}_{no} - \tilde{w}_o, o$$

$$\tilde{\Theta}_j = R_j [(-1)^i \tilde{\theta}_{nk}, z + \tilde{\theta}_o, z]$$

$$\tilde{\Theta}_i = R_i [(-1)^j \tilde{\theta}_{yk}, k + \tilde{\theta}_y, o]$$

$$Y_j = S_j [(-1)^i \tilde{Y}_R, z - \tilde{Y}_L, z]$$

$$P_i = S_i [(-1)^j \tilde{P}_{uz} - \tilde{P}_o, z]$$

$$M_o = (-1)^{i+j} \tilde{M}_R, k + (-1)^i \tilde{M}_{R_o} - (-1)^j \tilde{M}_L, k - \tilde{M}_L, o$$

$$A_1 = -(ANa + BN_b) \quad A_2 = \frac{(1-\nu)N_b}{2BM^2} - \frac{BN_b}{6}$$

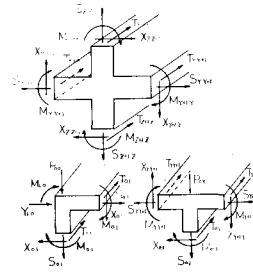


図-2

$$A_3 = \frac{(1-\nu)Na}{2AM^2} \quad A_4 = B_4 = \frac{1+\nu}{2} N_b \sin \frac{i\pi}{n}$$

$$A_5 = C_4 = \frac{1+\nu}{2} Na \sin \frac{j\pi}{k} \quad B_1 = \frac{\nu-1}{B} BN_b M^2$$

$$B_2 = \frac{N_b}{B} - \frac{1-\nu}{12} BN_b M^2 \quad B_3 = \frac{12}{A^2} Ka$$

$$B_5 = D_4 = \frac{12}{A} Ka \sin \frac{j\pi}{k} \quad B_6 = \frac{Nb}{4} \left\{ 3\nu - 1 + (1+\nu) \cos \frac{i\pi}{n} \right\}$$

$$B_7 = \frac{6}{A^2} (2Kao - Ka) \quad C_1 = \frac{\nu-1}{2} ANa M^2 \quad C_2 = \frac{12}{B^2} K_b$$

$$C_3 = \frac{Na}{A} - \frac{1-\nu}{12} ANa M^2 \quad C_5 = D_5 = \frac{12}{B} K \sin \frac{i\pi}{n}$$

$$C_6 = \frac{Na}{4} \left\{ 3\nu - 1 - (1+\nu) \cos \frac{j\pi}{k} \right\} \quad C_7 = \frac{6}{B^2} (2Kbo - Kb)$$

$$D_1 = -12 (Ka + Kb) \quad D_2 = 2K_b \quad D_3 = 2Ka$$

$$D_8 = \frac{6}{A} (2Ka_0 - Ka) (1 + \cos \frac{j\pi}{k})$$

$$D_9 = \frac{6}{B} (K_b - 2Kbo) \sin \frac{i\pi}{n}$$

$$D_{10} = \frac{6}{B} K_b (1 + \cos \frac{i\pi}{n})$$

$$D_{11} = \frac{6}{B} (2Kbo - Ka) (1 + \cos \frac{i\pi}{n})$$

$$D_{12} = (Di - 6) (K_b - 2Kbo)$$

$$D_{13} = (Dj - 6) (Ka - 2Kao)$$

$$Di = 2 (1 - \cos \frac{i\pi}{n}) \quad Dj = 2 (1 - \cos \frac{j\pi}{k}) \quad M = \frac{m\pi}{l}$$

定め分変換の逆変換公式より次の関係式が成立する。

$$\tilde{V}_j = \frac{2}{n} \left\{ (-1)^j \sum_{i=0}^n (-1)^i \tilde{V}_{ij} + \sum_{i=0}^n \tilde{V}_{ij} \right\}$$

$$\tilde{W}_i = \frac{2}{k} \left\{ (-1)^i \sum_{j=0}^k (-1)^j \tilde{W}_{ij} + \sum_{j=0}^k \tilde{W}_{ij} \right\}$$

$$\tilde{\Theta}_j = \frac{2}{n} \left\{ (-1)^j \sum_{i=0}^n (-1)^i \tilde{\Theta}_{ij} + \sum_{i=0}^n \tilde{\Theta}_{ij} \right\}$$

$$\tilde{\Theta}_i = \frac{2}{k} \left\{ (-1)^i \sum_{j=0}^k (-1)^j \tilde{\Theta}_{ij} + \sum_{j=0}^k \tilde{\Theta}_{ij} \right\}$$

$$\tilde{\theta}_{nk} = \frac{4}{nk} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^k (-1)^{i+j} \tilde{\Theta}_{ij}$$

$$\tilde{\theta}_{no} = \frac{4}{nk} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^k (-1)^{i+j} \tilde{\Theta}_{ij}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\theta}_{o,k} &= \frac{4}{nk} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^k (-1)^i \tilde{\theta}_{ij} \\ \tilde{\theta}_{o,o} &= \frac{4}{nk} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^k \tilde{\theta}_{ij}\end{aligned}$$

上述式と端部材の接合部でのつり合式を満すように (21) ~ (24) の境界値を定め得られた $\tilde{U}_{ij}, \tilde{V}_{ij}, \tilde{W}_{ij}$ $\tilde{\theta}_{ij}$ を逆変換すると各接合点での変位と断面力が求まる。

4. 数値計算例

荷重は Z 方向のみで簡単のため対称荷重が作用している場合を考え、変位は Z 方向には一定であり Y 方向には変位しないとして計算を行った。

なお、境界値は以下の方法で求められる。

基本式、端部材の接合部での式は次の形で表される。せん断力のつり合

$$S_i S_j [\tilde{u}_{yz}] = A_{ij} S_j [\tilde{u}_{o,z}] + A_{ij} S_i [\tilde{w}_y, o] \quad (25)$$

モーメントのつり合

$$\begin{aligned}R_i R_j [\tilde{\theta}_y, z] &= B_{ij} S_i [\tilde{w}_y] + B_{ij} \tilde{w}_o + B_{ij} R_j [\tilde{\theta}_o, z] \\ &= R_i [\tilde{\theta}_y, o] + B_{ij} R_j [\tilde{\theta}_o, z]\end{aligned} \quad (26)$$

Z 方向の力のつり合

$$S_i [\tilde{w}_y] = C_i S_i [\tilde{u}_{yo}] + C_i \tilde{w}_o + C_i R_j R_o [\theta_y, z] + C_i R_i [\tilde{\theta}_y, o] + P_i \quad (27)$$

$Z = 0$ でのせん断力のつり合

$$\begin{aligned}E_i S_i [\tilde{u}_{yo}] + E_i S_i [\tilde{u}_y, i] + E_i S_i [\tilde{w}_y] + \\ E_i \tilde{u}_{o,o} = 0\end{aligned} \quad (28)$$

$Y = 0$ でのせん断力のつり合

$$F_j S_j [\tilde{u}_{o,z}] + F_j S_j [\tilde{u}_1, z] + F_j \tilde{u}_{o,o} = 0 \quad (29)$$

$Y = 0, Z = 0$ でのせん断力のつり合

$$G_1 \tilde{u}_{o,o} + G_2 \tilde{u}_{o,i} + G_3 \tilde{u}_{1,o} + G_4 \tilde{w}_o = 0 \quad (30)$$

$Y = 0$ での Z 方向の力のつり合

$$\begin{aligned}H_1 \tilde{u}_{o,o} + H_2 \tilde{w}_i + H_3 \tilde{w}_o + H_4 R_o [\tilde{\theta}_1, z + \tilde{\theta}_{oz}] + G_5 \\ (\tilde{\theta}_{o,o} + \tilde{\theta}_1, o) + \tilde{P}_{oo} - \tilde{P}_{uo} =\end{aligned} \quad (31)$$

(25), (26) を Z 方向に逆変換すると

$$\begin{aligned}S_i [\tilde{u}_y, z] &= \sum_{j=1}^{k-1} \phi_{ij} \sin \frac{j\pi z}{k} S_j [\tilde{u}_{o,z}] + f_{iz} \\ S_i [\tilde{w}_y, o]\end{aligned} \quad (32)$$

$$R_i [\theta_{yz}] = \frac{2}{k} \sum_{j=0}^k B_{ij} \cos \frac{j\pi z}{k} S_i [\tilde{w}_y] + b_{ij} \tilde{w}_o$$

$$\begin{aligned}+ b_{iz} R_i [\tilde{\theta}_y, o] + \frac{2}{k} \sum_{j=0}^k B_{ij, j} \\ \cos \frac{j\pi z}{k} R_j [\tilde{\theta}_o, z]\end{aligned} \quad (33)$$

同様に Y 方向に逆変換すると $S_i [\tilde{u}_y, z], R_j [\tilde{\theta}_y, z]$ についても得られる。また、モーメントのつり合とその変換式を考慮して (27) から

$$\begin{aligned}S_i [\tilde{w}_y] &= c_{1,i} S_i [\tilde{u}_y, o] + c_{2,i} \tilde{w}_o + c_{3,i} R_i [\tilde{\theta}_y, o] \\ &+ c_{4,i} + c_{5,i} \sum_{I=1}^{n-1} d_{i,I} S_I [\tilde{u}_y, o] \\ &+ c_{6,i} \sum_{I=0}^n d_{i,I} R_I [\tilde{\theta}_y, o]\end{aligned} \quad (34)$$

(28) (29) の $S_i [\tilde{u}_y, i], S_j [\tilde{u}_1, z], S_i [\tilde{w}_y]$ を消去し

$$S_j [\tilde{u}_o, z] = \sum_{i=1}^{n-1} \varphi_{ij} S_i [\tilde{u}_y, o] + \lambda_j \tilde{u}_{o,o} \quad (35)$$

$$\begin{aligned}S_i [\tilde{u}_y, o] &= \sum_{j=1}^{n-1} \varphi_{ij} S_j [\tilde{u}_o, z] + \delta_{1,i} \left[\sum_{l=1}^{n-1} \right. \\ &\quad \left. d_{l,I} S_I [\tilde{u}_y, o] \right] + \delta_{2,i} \tilde{u}_{o,o} + \delta_{3,i} \\ &\tilde{w}_o + \delta_4 R_i [\tilde{\theta}_y, o] + \delta_{1,i} \sum_{I=0}^n d_{2,I} R_I \\ &[\tilde{\theta}_y, o] + \delta_{5,i}\end{aligned} \quad (36)$$

(33) の $S_i [\tilde{w}_y], R_i [\tilde{\theta}_o, z]$ を消去すると

$$\begin{aligned}R_i [\tilde{\theta}_y, o] &= k_i S_i [\tilde{u}_y, o] + K_i \tilde{w}_o + K_i + \\ &\sum_{I=1}^{n-1} K_{i,I} S_I [\tilde{u}_y, o] + \sum_{I=0}^n K_{i,I} R_I \\ &R_I [\tilde{\theta}_y, o]\end{aligned} \quad (37)$$

(35) (36) を逆変換して $\tilde{u}_{o,i}, \tilde{u}_{1,o}$ を求め (30) に代入する。

$$\begin{aligned}Y_1 \tilde{u}_{o,o} + Y_2 \tilde{w}_o &= \sum_{i=1}^{n-1} Y_{3,i} S_i [\tilde{u}_y, o] + \sum_{i=0}^n \\ &Y_{4,i} R_i [\tilde{\theta}_y, o] + Y_5\end{aligned} \quad (38)$$

同様に (31) も次のようになる。

$$\begin{aligned}Z_1 \tilde{u}_{o,o} + Z_2 \tilde{w}_o &= \sum_{i=1}^{n-1} Z_{3,i} S_i [\tilde{u}_y, o] + \sum_{i=0}^n \\ &Z_{4,i} R_i [\tilde{\theta}_y, o] + Z_5\end{aligned} \quad (39)$$

(38) (39) から $\tilde{u}_{o,o}, \tilde{w}_o$ を求め (36) (37) に代入する。

$$S_i[\tilde{u}_y, o] = \sum_{I=1}^{n-1} {}_1 g_i, I S_I[\tilde{u}_{yo}] + \sum_{I=0}^n {}_2 g_i, I$$

$$R_i[\tilde{\theta}_y, o] + {}_3 g_i R_i[\tilde{\theta}_{yo}] + {}_4 g_i$$
(40)

$$R_i[\tilde{\theta}_y, o] = \sum_{I=1}^{n-1} {}_1 h_i, I S_I[\tilde{u}_{yo}] + \sum_{I=0}^n {}_2 h_i, I$$

$$R_i[\tilde{\theta}_y, o] + {}_3 h_i S_i[\tilde{u}_{yo}] + {}_4 h_i$$
(41)

(40) (41) より $S_i[\tilde{u}_{yo}]$ $R_i[\tilde{\theta}_{yo}]$ が求まり (38)

(39) (35) 等により全ての境界値が決定される。

計算例としては、ケーソンの前面に等分布荷重が作用している場合とその全荷重と同じ大きさの荷重が中央の線上に作用している場合について解き、これらを重合せることにより、ケーソンの解析を試みた。計算に用いた断面諸元に次に示すとくである。

$$n = 10 \quad k = 10 \quad A = 5\text{cm} \quad B = 5\text{cm} \quad t_a = 2\text{cm}$$

$$t_b = 2\text{cm} \quad t_{ao} = 1.6\text{cm} \quad t_{bo} = 1.6\text{cm} \quad l = 100\text{cm}$$

$$E = 2.1 \times 10^5 \text{kg/cm}^2 \quad \nu = 0.15$$

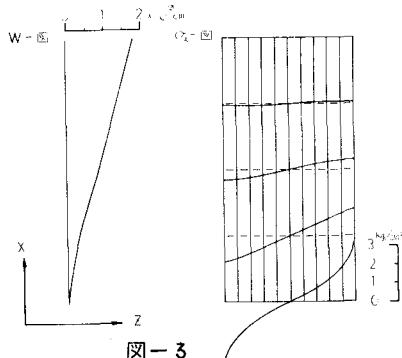


図-3

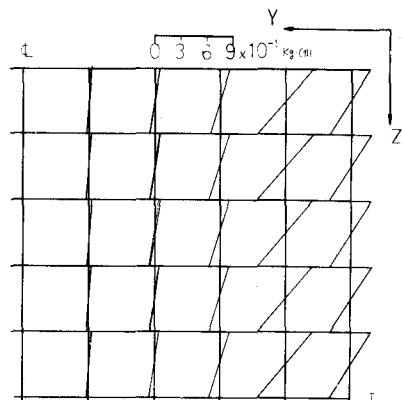
5. あとがき

変位せん断公式とフーリエ定理と分変換公式を基本として重合せの原理により、マルチセルケーソンの横荷重を受けている場合について応力解析を行った。

なお、鉛直方向荷重を受けている場合についても現在解析を行っている。

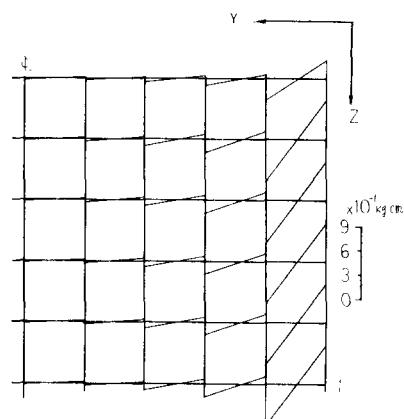
参考文献

- (1) 能町純雄, 松岡健一, 佐藤博; 方眼マルチセル構造体の応力解析について, 土木学会第 27 回年次学術講演会講演集 (1972)
- (2) 能町純雄, 尾崎訥, 大島俊之, 佐藤博; ホーロースラブの応力計算について, 土木学会北海道支部研究発表会講文集, 昭和 46 年度
- (3) S. G. Nomachi; On Finite Fourier



ケーソン底面の等分布荷重のせん変形モード

図-4



ケーソン底面の等分布荷重のせん変形モード

図-5

Sine Series with Respect to Finite Differences 室蘭工業大学紀要 Vol 5
No. 7 1965