

剛性マトリックス法によるらせん梁の解析

正員 芳村 仁*
正員 阿部 啓**

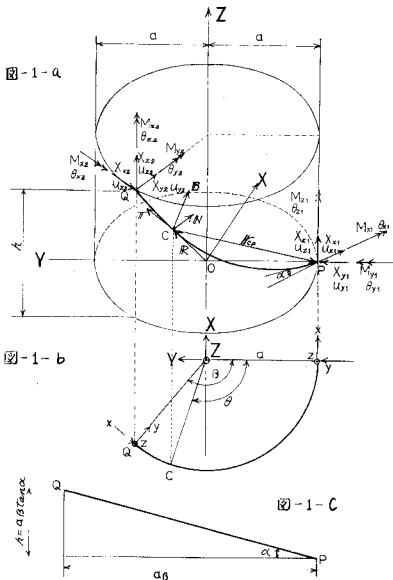
1. まえがき

道路の線型上の要求はらせん曲線橋の作成を促すであらう。そこで、本報告では、空間的な曲率を有するらせん曲線部材の剛性マトリックスを用いて、直線材とらせん曲線材とから成る立体骨組構造物の変形法による解析を可能とした。つぎに、らせんの両端固定梁を例とし、らせん梁の特性に関する考察を試みた。最後に、直線材と曲線材とからなる連続曲線立体ラーメンの解析例を示した。

2. 解析法

らせんは数学的には円筒上の2点を結ぶ最短曲線として定義される。従って、この円筒を展開すると傾斜角 α の斜線となる(図-1-a)。図-1-bはらせん梁の平面図である。

ここで、図-1の符号の説明を行なう。



$X_{x1}, X_{y1}, X_{z1}, X_{x2}, X_{y2}, X_{z2}$ } 荷重
 $M_{x1}, M_{y1}, M_{z1}, M_{x2}, M_{y2}, M_{z2}$ }

$u_{x1}, u_{y1}, u_{z1}, u_{x2}, u_{y2}, u_{z2}$ } 変位
 $\theta_{x1}, \theta_{y1}, \theta_{z1}, \theta_{x2}, \theta_{y2}, \theta_{z2}$ }

a : らせんの半径 α : らせんの傾斜角

h : らせんQ端の高さ β : らせん部材を水平面に投影した時の開き角 θ : らせん上の任意点を水平面に投影した時の開き角 X, Y, Z : E系の座標軸 x, y, z, B, N, T : L系の座標軸 T : 接線単位ベクトル

N : 主法線単位ベクトル B : 陪法線単位ベクトル

いま、座標系を図-1のようにとると、点Cの位置ベクトルは

$$R = -j a \sin \theta - j a \cos \theta + k a \theta \tan \alpha \quad (1)$$

ベクトル解析の公式によって

$$T = -j c c s \alpha \cos \theta + j \cos \alpha \sin \theta + k \sin \alpha \quad (2)$$

$$N = j \sin \theta + j \cos \theta \quad (3)$$

$$B = j \sin \alpha \cos \theta - j \sin \alpha \sin \theta + k \cos \alpha \quad (4)$$

(1)変位影響係数部分マトリックス $[C_{11}]$

図-1の節点②を固定端と考え節点①の変位を求める。任意点C(図-1)における T, N, B 軸のまわりのモーメント M_T, M_N, M_B を求め、それらの歪エネルギーを計算する。それにカステリヤノの定理を適用し節点①の変位を節点外力で表わし、それをマトリックス表示する。このマトリックスが $[C_{11}]$ である。

いま、 M_T, M_N, M_B は次式で与えられる。

$$M_T = T \cdot r_{cp} \times X_1 + T \cdot M_1 \quad (5)$$

$$M_N = N \cdot r_{cp} \times X_1 + N \cdot M_1 \quad (6)$$

$$M_B = B \cdot r_{cp} \times X_1 + B \cdot M_1 \quad (7)$$

ここにおいて T, N, B は式(2), (3), (4)で与えられ X_1, M_1, r_{cp} は式(8), (9), (10)で表わされる。

$$X_1 = i X_{x1} + j X_{y1} + k X_{z1} \quad (8)$$

$$M_1 = i M_{x1} + j M_{y1} + k M_{z1} \quad (9)$$

$$r_{cp} = j a \sin \theta - j a (1 - \cos \theta) - k a \theta \tan \alpha \quad (10)$$

式(5), (6), (7)を計算すると(11), (12), (13)を得る。

* 北海道大学工学部 教授 工博

** 清水 建設

$$M_T = a \sin \alpha (1 - \cos \theta - \theta \sin \theta) \times x_1 + a \sin \alpha (\sin \theta - \theta \cos \theta) X_{y1} + a \cos \alpha (\cos \theta - 1) X_{z1} - \cos \alpha \cos \theta M_{x1} + \cos \alpha \sin \theta M_{y1} + \sin \alpha M_{z1} \quad (11)$$

$$M_N = -a \theta \tan \alpha \cos \theta X_{x1} + a \theta \tan \alpha \sin \theta X_{y1} - a \sin \theta X_{z1} + \sin \theta M_{x1} + \cos \theta M_{y1} \quad (12)$$

$$M_B = a \cos \alpha (\theta \tan^2 \alpha \sin \theta + 1 - \cos \theta) X_{x1} + a \cos \alpha (\theta \tan^2 \alpha \cos \theta + \sin \theta) X_{y1} + a \sin \alpha (1 - \cos \theta) X_{z1} + \sin \alpha \cos \theta M_{x1} - \sin \alpha \sin \theta M_{y1} + \cos \alpha M_{z1} \quad (13)$$

歪エネルギー U は式(14)で与えられる。

$$U = \int_0^{\beta} \frac{\beta M_T^2}{2GJ} ds + \int_0^{\beta} \frac{\beta M_N^2}{2EI_N} ds + \int_0^{\beta} \frac{\beta M_B^2}{2EI_B} ds \quad (14)$$

ここで、 GJ はねじり剛性、 EI_N 、 EI_B は N 、 B 軸に関する曲げ剛性を表わし、 ds は式(15)で表わされる。

$$ds = \frac{a}{\cos \alpha} d\theta \quad (15)$$

カステリヤノの定理を適用すると

$$\begin{aligned} u_{x1} &= \frac{\partial U}{\partial X_{x1}} & \theta_{x1} &= \frac{\partial U}{\partial M_{x1}} \\ u_{y1} &= \frac{\partial U}{\partial X_{y1}} & \theta_{y1} &= \frac{\partial U}{\partial M_{y1}} \\ u_{z1} &= \frac{\partial U}{\partial X_{z1}} & \theta_{z1} &= \frac{\partial U}{\partial M_{z1}} \end{aligned} \quad (16)$$

式(16)の計算結果を式(17)のごとくマトリックス表示する。

$$\begin{array}{ccc} u_{x1} & C_{11} & \cdots & C_{16} & X_{x1} \\ u_{y1} & \vdots & & \vdots & X_{y1} \\ u_{z1} & \vdots & & \vdots & X_{z1} \\ \theta_{x1} & \vdots & & \vdots & M_{x1} \\ \theta_{y1} & \vdots & & \vdots & M_{y1} \\ \theta_{z1} & C_{61} & \cdots & C_{66} & M_{z1} \end{array} \quad (17)$$

式(17)を書きかえると、

$$\{\delta_i\} = [C_{ij}] \{F_j\} \quad (18)$$

ここで、 $[C_{ij}]$ は零要素を持たないマトリックスである。

いま、 $[C_{ij}]$ の要素の例として C_{11} を記す。

$$C_{11} = \frac{a^3}{\cos \alpha EI_N} \left\{ \frac{\sin^2 \alpha}{K_1} \left(\frac{3}{2} \beta + \frac{\beta^3}{6} - 4 \sin \beta + 2 \beta \cos \beta - \frac{2\beta^2 - 5}{8} \sin 2\beta - \frac{3}{4} \beta \cos 2\beta \right) + \tan^2 \alpha \left(\frac{\beta^3}{6} + \frac{2\beta^2 - 1}{8} \sin 2\beta + \frac{\beta}{4} \cos 2\beta \right) \right\}$$

$$+ \frac{\cos^2 \alpha}{K_2} \left\{ \frac{3}{2} \beta + \frac{\tan^4 \alpha}{6} \beta^3 + 2 (\tan^2 \alpha - 1) \sin \beta - 2 \tan^2 \alpha \cdot \beta \cos \beta - \frac{1}{8} (2 (\tan^2 \alpha - 1) + \tan^4 \alpha (2\beta^2 - 1)) \sin 2\beta - \frac{\tan^2 \alpha}{4} (\tan^2 \alpha - 2) \beta \cos 2\beta \right\} \quad (19)$$

$$\text{但し、} K_1 = \frac{GJ}{EI_N}, \quad K_2 = \frac{EI_B}{EI_N}$$

(2)変位影響係数部分マトリックス $[C_{22}]$

図-1 において①を固定端と考え②の変位を求める。

(1)と同様に計算するが、計算上新たに必要なベクトル量を以下列記する。

$$r_{eq} = ia (\sin \theta - \sin \beta) + ja (\cos \theta - \cos \beta) + ka (\theta - \beta) \tan \alpha \quad (20)$$

$$X_2 = i (X_{x2} \cos \beta + X_{y2} \sin \beta) + j (-X_{x2} \sin \beta + X_{y2} \cos \beta) + K X_{z2} \quad (21)$$

$$M_2 = i (M_{x2} \cos \beta + M_{y2} \sin \beta) + j (-M_{x2} \sin \beta + M_{y2} \cos \beta) + K M_{z2} \quad (22)$$

以下(1)と同様の計算を行ない $[C_{22}]$ を得る。

(3)釣り合い方程式

a) 節点①を固定端と考えた場合

いま、力が釣り合う為には式 (29)、(30)を同時に満足すればよい。

$$\Sigma X = X_1 + X_2 = 0 \quad (29)$$

$$\Sigma M_{(1)} = M_1 + M_2 + (rop - rop) \times X_2 + (rop - rop) \times X_2 = 0 \quad (30)$$

式 (29)、(30) に式 (1)、(8)、(21)、(22) を代入すると

$$\Sigma X = i (X_{x1} + X_{x2} \cos \beta + X_{y2} \sin \beta) + j (X_{y1} - X_{x2} \sin \beta + X_{y2} \cos \beta) + k (X_{z1} + X_{z2}) = 0 \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \Sigma M_{(1)} &= j \{ a \beta \tan \alpha \sin \beta X_{x2} - a \beta \tan \alpha \cos \beta X_{y2} \\ &+ a (1 - \cos \beta) X_{z2} + M_{x1} + \cos \beta M_{x2} + \sin \beta M_{y2} \} + j \{ a \beta \tan \alpha \cos \beta X_{x2} + \\ &a \beta \tan \alpha \sin \beta X_{y2} + a \sin \beta X_{z2} + M_{y1} - \sin \beta M_{x2} + \cos \beta M_{y2} \} + k \{ a (1 - \cos \beta) X_{x2} - a \sin \beta X_{y2} + M_{z1} + M_{z2} \} = 0 \quad (32) \end{aligned}$$

式 (31)、(32) をマトリックス表示すると、式 (33)を得る。

$$\begin{Bmatrix} X_{x1} \\ X_{y1} \\ X_{z1} \\ M_{x1} \\ M_{y1} \\ M_{z1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \beta & -\sin \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \beta & -\cos \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -a \beta \tan \alpha \sin \beta & a \beta \tan \alpha \cos \beta & -a(1 - \cos \beta) & -\cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ -a \beta \tan \alpha \cos \beta & -a \beta \tan \alpha \sin \beta & -a \sin \beta & \sin \beta & -\cos \beta & 0 \\ -a(1 - \cos \beta) & a \sin \beta & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_{x2} \\ X_{y2} \\ X_{z2} \\ M_{x2} \\ M_{y2} \\ M_{z2} \end{Bmatrix} \quad (33)$$

いま、式 (33) を (34) のごとく書きかえる。

$$\{F_1\} = [A] \{F_2\} \quad (34)$$

b) 節点②を固定端と考えた場合

a) の場合と同様に $\sum X = 0$, $\sum M_{\text{②}} = 0$ を計算し、式 (35) のごとくマトリックス表示する。

$$\{F_2\} = [B] \{F_1\} \quad (35)$$

マトリックス $[B]$ の各要素は $[A]$ の各要素の β を $-\beta$ におき変えたものに一致する。

(4)らせん部材の剛性マトリックス

いま、求めようとする剛性マトリックスを式 (36) で表わす。

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix} \quad (36)$$

ここで、 $[C_{11}]$, $[C_{22}]$ より式 (36) の部分マトリックスを求めるが、以下の演算は 6 行 6 列の 0 要素を含まないマトリックスの逆変換を数式で求めることが困難であるため電子計算機を使用して数値計算で行なうものとする。

まず、 $[C_{11}]$, $[C_{22}]$ より $[K_{11}]$, $[K_{22}]$ を求めると

$$[K_{11}] = [C_{11}]^{-1}$$

$$[K_{22}] = [C_{22}]^{-1}$$

いま節点②を固定端と考えると

$$\begin{aligned} \{F_2\} &= [K_{21}] \{\delta_1\} + [K_{22}] \{\delta_2\} \\ &= [K_{21}] \{\delta_1\} \quad (\because \{\delta_2\} = 0) \end{aligned}$$

一方、

$$\{F_1\} = [K_{11}] \{\delta_1\}$$

式 (40), (35) より

$$\begin{aligned} \{F_2\} &= [B] \{F_1\} = [B] [K_{11}] \{\delta_1\} \\ &= [B] [C_{11}]^{-1} \{\delta_1\} \end{aligned}$$

故に

$$[K_{21}] = [B] [C_{11}]^{-1}$$

次に、節点①を固定端と考えると

$$\begin{aligned} \{F_1\} &= [K_{11}] \{\delta_1\} + [K_{12}] \{\delta_2\} \\ &= [K_{12}] \{\delta_2\} \quad (\because \{\delta_1\} = 0) \end{aligned}$$

一方

$$\{F_2\} = [K_{22}] \{\delta_2\}$$

式 (44), (34) より

$$\begin{aligned} \{F_1\} &= [A] \{F_2\} = [A] [K_{22}] \{\delta_2\} \\ &= [A] [C_{22}]^{-1} \{\delta_2\} \end{aligned}$$

故に

$$[K_{21}] = [A] [C_{22}]^{-1}$$

従って、式 (36) を書きなおすと式 (47) を得る。

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [C_{11}]^{-1} & [A][C_{22}]^{-1} \\ [B][C_{11}]^{-1} & [C_{22}]^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix}$$

式 (47) で与えられる剛性マトリックスの検証は文献(1)を使用し、計算結果の一致をもって検証とした。

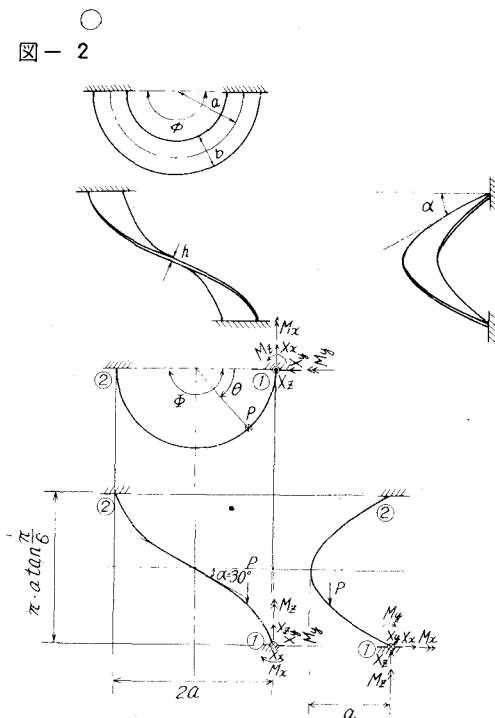
3. 円弧梁との比較によるらせん梁の特性

前項で誘導した剛性マトリックスにより次のような構造につき、断面力をもとめ、結果を検討した。

(1)構造

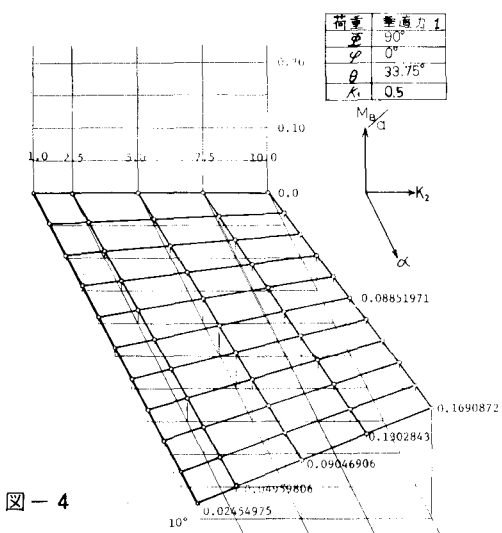
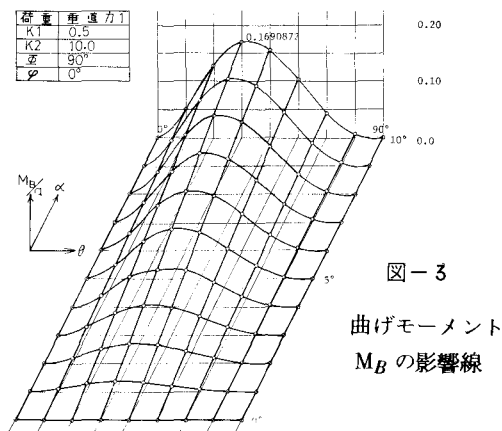
らせん梁の両端は完全固定であり、その平面図、立面図を図-2に示す。

図-2



(2) 結果の整理

ここでは2種のグラフを使用し計算結果を整理した。一方は $K_1 (GJ/EI_N)$, $K_2 (EI_B/EI_N)$ を一定としらせんの傾斜角 α , 載荷位置 θ をパラメーターとして断面力を縦距に取ったグラフであり、他方は K_1 , φ , θ を一定, α , K_2 をパラメーターとして断面力を縦距に取ったグラフである。前者は α を一定と考えると断面力の影響線を表わすグラフである。後者は、断面力の影響線上の一点に着目し、 α とともに K_2 を変化させた時、着目点の影響係数の変化を表わすグラフである。



図中X, Mはそれぞれ力, モーメントを表わし, T, N, Bは力の方向を表わ軸を示す指標である。

(3)らせん梁の特性に関する考察

いま, 図-3において θ を一定とした時, $\alpha-M_B$ 平面に描かれた曲線に着目する。ここにおいて α が 10° 以内であればほぼ直線と考えて大きな誤差を生じない。

この傾向はせん断力, 曲げモーメント (N軸に関する) ねじりモーメントにおいて顕著であり, 前述の三つの断面力は円弧梁と比較した時, 円弧の断面力との差は影響係数の最大値に近い値において円弧の断面力の5%前後であった。

図-4は K_2, α の変化による断面力の変化を示す図であるが円弧梁との差は α, K_2 がともに大きくなるに従って大きくなる傾向があり, せん断力, 曲げモーメント, ねじりモーメントにおいてはその変化量が小さいため円

弧梁に近似することができよう。しかし軸力, 横方向 (N軸) のせん断力B軸に関する曲げは変化が大きく, 特に, B軸に関する曲げは α, K_2 の増加にともない設計上無視できない大きさになる。

4. 五径間連続立体ラーメン橋の解析

本項では全長278m, 橋脚は高さ18m~27.8mまでの鋼管を使用した五径間連続円弧曲線立体ラーメン橋の解析と前述の橋と同一断面で, かつ円弧部分を6%の傾斜のらせん曲線におき変えた, 五径間連続立体ラーメンの解析を行ない, 合わせて比較を試みる。

(1)構造

平面図上の第一径間から第五径間の開き角 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_5$ は $\beta_1=\beta_5=0.28572, \beta_2=\beta_4=0.41429$ である。また第一橋脚から第六橋脚の高さはそれぞれ18m, 23m, 27.8m, 23m, 18mである。ここでらせんは左巻であり, 円弧部材, らせん部材の半径は140mとする。

(2)結果

らせん橋として行なった計算結果を円弧橋とした時の計算結果と比較すると, 第三径間中央点の断面力はせん断力, ねじりモーメント, 曲げモーメント (N軸に関する), B軸に関する曲げモーメントにおいては両者の間に大きな差は生じない, 例として第三径間中央点に垂直力1を载荷した場合の曲げモーメントを考えると, 円弧の場合28.69らせんの場合28.59であり, その比は0.9967である。軸力, 横方向のせん断力は両者の比を取ると数十パーセントの開きがあるが差を取ると数値的には小さな量となる。橋脚部分に働く反力を考えると, ねじりモーメントに大きな差を生じ, 曲げモーメントは数パーセントから十数パーセントの差を生ずる。

参考文献

- 1) Y.F.Young and A.C.Scordilis J.M.ASCE (Proc Paper 1756)
「An analytical and experimental study of helicoidal girders」
- 2) A.Abdul-Baki and Dean Bartel
「Analysis of Helicoidal Girders」
- 3) 剛性マトリックス法によるらせん梁の解析
(昭和46年度卒業論文)