

曲げねじれ剛性を考慮した剛性マトリックス法による曲線格子桁の解析

正 員 渡 辺 昇 *

” 稼 農 知 徳 **

学生員 ○ 藤 井 裕 司 ***

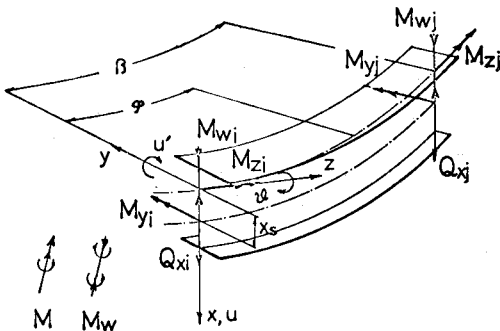
1. まえがき

一般の曲り梁を含む薄肉断面構造物の解析においては、曲げねじれ剛性を考慮しなければならない場合が非常に多く、応力法における曲げねじれ解析がほぼ完成されているとはいえ、構造が複雑になると応力法では不適当で、変形法による解析が、有利となる場合が生ずる。

これまでの変形法における曲り梁に対する曲げねじれ解析は、G. Becker によって還元法で解析されているのみである。そこで著者らは、薄肉変断面曲り梁を含む骨組構造物を解析するために、曲げねじれ剛性を考慮した剛性マトリックスを誘導したのでその結果を示し、応用例としてすでに誘導されている曲げねじれ剛性を考慮した直線桁の剛性マトリックスとこの剛性マトリックスを利用することによって、単純曲線格子桁を解析している。

2. 曲線桁の曲げねじれ解析

図-1のような一般的な曲線桁に面外荷重が作用し、曲率面内の作用荷重がない場合、曲率面外への変形の弾性方程式を、せん断中心軸の変形で表わせば、式(1)となる。(文献2)



A Thin walled curved beam

図-1

* 北海道大学工学部 教授 工博

** 北海道大学工学部 助教授 工博

*** 北海道大学大学院 修士課程

$$\left. \begin{aligned} & (EJ_y + \frac{EJ_w}{R_s^2}) \frac{d^4 u_x}{d\varphi^4} - GJT \frac{d^2 u_x}{d\varphi^2} - \frac{EJ_w}{R_s^2} R_s \\ & - \frac{d^4 \vartheta_z}{d\varphi^4} + (GJT + EJ_y) R_s \frac{d^2 \vartheta_z}{d\varphi^2} = R_s^4 \vartheta_x - \\ & R_s^3 \frac{dm_y}{d\varphi} \\ & - \frac{EJ_w}{R_s^2} \frac{d^4 u_x}{d\varphi^4} + (GJT + EJ_y) \frac{d^2 u_x}{d\varphi^2} + \frac{EJ_y}{R_s^2} \\ & R_s \frac{d^4 \vartheta_z}{d\varphi^4} - GJT R_s \frac{d^2 \vartheta_z}{d\varphi^2} + EJ_y R_s \vartheta_z \end{aligned} \right\} (1)$$

$$= R_s^3 m_z$$

ここで、 u_x = 垂直変位、 ϑ_z = ねじれ角

式(1)の連立微分方程式を消去法により u_x を消去すると式(2)となり、 ϑ_z と u_x の関係式は式(3)となる。

$$\begin{aligned} & \frac{EJ_w}{R_s^2} R_s \frac{d^4 \vartheta_z}{d\varphi^4} + (2 \frac{EJ_w}{R_s^2} - GJT) R_s \frac{d^2 \vartheta_z}{d\varphi^2} + (\frac{EJ_w}{R_s^2} \\ & - 2 GJT) R_s \frac{d^2 \vartheta_z}{d\varphi^2} - GJT R_s \vartheta_z = \frac{J_w}{R_s^2 J_y} (R_s^4 \frac{d^2 \vartheta_x}{d\varphi^2} \\ & - R_s^3 \frac{dm_y}{d\varphi^3}) + (1 + \frac{J_w}{R_s^2 J_y}) R_s^3 \frac{d^2 m_z}{d\varphi^2} - (1 + \frac{GJT}{EJ_y}) \\ & (R_s^4 \vartheta_x - R_s^3 \frac{dm_y}{d\varphi}) - \frac{GJT}{EJ_y} R_s^3 m_z \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & (EJ_y + GJT + \frac{EJ_w}{R_s^2}) \frac{d^2 u_x}{d\varphi^2} + \frac{EJ_w}{R_s^2} R_s \frac{d^4 \vartheta_z}{d\varphi^4} + \\ & (\frac{EJ_w}{R_s^2} - GJT) R_s \frac{d^2 \vartheta_z}{d\varphi^2} + (EJ_y + \frac{EJ_z}{R_s^2}) R_s \vartheta_z = \\ & \frac{J_w}{R_s^2 J_y} (R_s^4 \vartheta_x - R_s^3 \frac{dm_y}{d\varphi}) + (1 + \frac{J_w}{R_s^2 J_y}) R_s^3 m_z \end{aligned} \quad (3)$$

式(2), (3)において

$$\lambda^2 = \frac{GJT}{EJ_y} R_s^2, \quad \tau = \frac{EJ_y}{GJT}, \quad \eta = \frac{2\lambda^2 \tau}{1 + \lambda^2 + \lambda^2 \tau} \quad \text{とおき,}$$

剛性マトリックス法において節点間に中間荷重が作用しないと考えるので、式(2)及び(3)の同次方程式は、式(4)(5)となる。

$$\frac{d^2 \vartheta_z}{d\varphi^0} + (2 - \lambda^2) \frac{d^4 \vartheta_z}{d\varphi^4} + (1 - 2\lambda^2) \frac{d^2 \vartheta_z}{d\varphi^2} - \lambda^2 \vartheta_z = 0 \quad (4)$$

$$\frac{d^2 u_x}{d\varphi^2} = - \frac{R_s}{1 + \lambda^2 + \lambda^2 \gamma} \left\{ \frac{d^4 \vartheta_z}{d\varphi^4} + (1 - \lambda^2) \frac{d^2 \vartheta_z}{d\varphi^2} + (1 + \lambda^2 \gamma) \vartheta_z \right\} \quad (5)$$

さらに、振れ中心軸の振れ率 θ_w は、式(6)となる。

$$\theta_w = \frac{1}{R_s} \left(\frac{d\vartheta_z}{d\varphi} - \frac{1}{R_s} \frac{d u_x}{d\varphi} \right) \quad (6)$$

式(4)の一般解は、式(7)となる。

$$\vartheta_z = C_1 \text{sh} \lambda \varphi + C_2 \text{ch} \lambda \varphi + C_3 \cos^s \varphi + C_4 \cos^s \varphi + C_5 \sin \varphi + C_6 \sin \varphi \quad (7)$$

式(5), (6)から式(8), (9), (10)が得られる。

$$u_x = -R_s \left\{ C_1 \frac{1}{\lambda^2} \text{sh} \lambda \varphi + C_2 \frac{1}{\lambda^2} \text{ch} \lambda \varphi - C_3 \cos^s \varphi + C_4 (\varphi \cos \varphi - \eta \sin \varphi) - C_5 \sin \varphi - C_6 (\varphi \sin \varphi + \eta \cos \varphi) \right\} + C_7 \varphi + C_8 \quad (8)$$

$$\frac{d u_x}{d\varphi} = - \left\{ C_1 \frac{1}{\lambda} \text{ch} \lambda \varphi + C_2 \frac{1}{\lambda} \text{sh} \lambda \varphi + C_3 \sin \varphi - C_4 \{ (\cos \varphi - \varphi \sin \varphi) - \eta \cos \varphi \} - C_5 \cos \varphi - C_6 \{ (\sin \varphi + \varphi \cos \varphi) - \eta \sin \varphi \} \right\} + \frac{1}{R_s} C_7 \quad (9)$$

$$\theta_w = \frac{1}{R_s} \left\{ C_1 \frac{1 + \lambda^2}{\lambda} \text{ch} \lambda \varphi + C_2 \frac{1 + \lambda^2}{\lambda} \text{sh} \lambda \varphi + C_4 \eta \cos \varphi + C_6 \eta \sin \varphi - \frac{C_7}{R_s} \right\} \quad (10)$$

境界条件として

$$\begin{aligned} \varphi = 0 \text{ で } u_x &= u_{xi}, \quad u_x = u'_{xi}, \quad \vartheta_z = \vartheta_{zi}, \quad \theta_w = \theta_{wi} \\ \varphi = \beta \text{ で } u_x &= u_{xj}, \quad u_x = u'_{xj}, \quad \vartheta_z = \vartheta_{zj}, \quad \theta_w = \theta_{wj} \end{aligned} \quad (11)$$

式(11)を式(7), (8), (9), (10)に代入し整理すると式(12)が得られる。

$$\begin{Bmatrix} C_2 \\ C_1 \\ C_4 \\ C_3 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \\ C_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7, B_8 \\ D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6, D_7, D_8 \\ S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8 \\ F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, F_7, F_8 \\ T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7, T_8 \\ H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6, H_7, H_8 \\ P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8 \\ Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6, Q_7, Q_8 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{xi} \\ u'_{xi} \\ \vartheta_{zi} \\ \theta_{wi} \\ u_{xj} \\ u'_{xj} \\ \vartheta_{zj} \\ \theta_{wj} \end{Bmatrix}$$

$\{C\} = [B]\{u\}$ (12) a - b
この $[B]$ マトリックスの要素は、文献(5)に詳しく述べてある。

断面力と変形の関係式は、断面形状を x 軸に対して対称なものとする、式 (13) となる。

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= - \frac{EJ_y}{R_s} \frac{d\vartheta_y}{d\varphi} - \frac{GJ_T}{R_s} \theta_w + \frac{EJ_w}{R_s^2} \frac{d^2 \theta_w}{d\varphi^2} \\ M_y &= - EJ_y \vartheta_y \\ M_z &= GJ_T \theta_w - \frac{EJ_w}{R_s^2} \frac{d^2 \theta_w}{d\varphi^2}, \quad M_w = - \frac{EJ_w}{R_s} \frac{d\theta_w}{d\varphi} \end{aligned} \right\} \quad (13) \quad a-d$$

ここで $\kappa_y = \frac{1}{R_s^2} \left(\frac{d^2 u_x}{d\varphi^2} + R_s \vartheta_z \right)$
 $\theta_w = \frac{1}{R_s} \left(\frac{d\vartheta_z}{d\varphi} - \frac{1}{R_s} \frac{d u_x}{d\varphi} \right)$

式(13)に式(7), (8), (9), (10)を代入してマトリックス表示すると式(14)となる。

$$\begin{Bmatrix} Q_{xi} \\ M_{yi} \\ M_{zi} \\ M_{wi} \\ Q_{xj} \\ M_{yj} \\ M_{zj} \\ M_{wj} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ_T}{R_s^2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{EJ_y}{R_s} (2 - \eta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ_T}{R_s} \frac{1 + \lambda^2}{\lambda^2} \eta & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ_T}{R_s^2} \\ -\frac{EJ_w}{R_s^2} (1 + \lambda^2) & 0 & 0 & -\frac{EJ_w}{R_s^2} \eta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ_T}{R_s^2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{EJ_y}{R_s} (2 - \eta) \sin \beta & -\frac{EJ_y}{R_s^2} (2 - \eta) \cos \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ_T}{R_s} \frac{1 + \lambda^2}{\lambda^2} \eta \cos \beta & \frac{GJ_T}{R_s} \frac{1 + \lambda^2}{\lambda^2} \eta \sin \beta & 0 & 0 & -\frac{GJ_T}{R_s^2} \\ \frac{EJ_w}{R_s^2} (1 + \lambda^2) \text{ch} \lambda \beta & \frac{EJ_w}{R_s^2} (1 + \lambda^2) \text{sh} \lambda \beta & -\frac{EJ_w}{R_s^2} \eta \sin \beta & \frac{EJ_w}{R_s^2} \eta \cos \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} C_2 \\ C_1 \\ C_4 \\ C_3 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \\ C_8 \end{Bmatrix} \quad (14) \quad a-b$$

$\{P\} = [G]\{C\}$

3. 部材座標表示による剛性マトリックス

イ) 曲線材の剛性マトリックス

$$\begin{Bmatrix} Q_{xi} \\ M_{yi} \\ M_{zi} \\ M_{wi} \\ Q_{xj} \\ M_{yj} \\ M_{zj} \\ M_{wj} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} K_{11}, K_{12}, K_{13}, K_{14}, K_{15}, K_{16}, K_{17}, K_{18} \\ K_{22}, K_{23}, K_{24}, K_{25}, K_{26}, K_{27}, K_{28} \\ K_{33}, K_{34}, K_{35}, K_{36}, K_{37}, K_{38} \\ K_{44}, K_{45}, K_{46}, K_{47}, K_{48} \\ K_{55}, K_{56}, K_{57}, K_{58} \\ K_{66}, K_{67}, K_{68} \\ K_{77}, K_{78} \\ K_{88} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{xi} \\ u'_{xi} \\ \vartheta_{zi} \\ \theta_{wi} \\ u_{xj} \\ u'_{xj} \\ \vartheta_{zj} \\ \theta_{wj} \end{Bmatrix}$$

S. Y. M

但し

$$(\cdot) = \frac{d}{R_s d\varphi}$$

$$\{P\} = [Kc]\{u\} \quad (15) \quad a-b$$

式(12)の剛性マトリックス $[Kc]$ は、式(13), (14)を用いて次の様に求められる。

$$\{p\} = [G] [B] \{u\}$$

$$\text{故に } [Kc] = [G] [B] \quad (16)$$

ロ) 直線材の剛性マトリックス

直線材の剛性マトリックスも同様の方法で求めると式(17)となる。

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H\lambda^2 \text{sh}\lambda L & H\lambda^2 (\text{ch}\lambda L - 1) & 0 & 0 & -H\lambda^2 \text{sh}\lambda L & H\lambda^2 (\text{ch}\lambda L - 1) \\ 0 & 0 & H\lambda (\lambda \text{ch}\lambda L - \text{sh}\lambda L) & 0 & 0 & -H\lambda (\lambda \text{ch}\lambda L - \text{sh}\lambda L) & -H\lambda (\lambda \text{ch}\lambda L - \text{sh}\lambda L) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H\lambda^2 \text{sh}\lambda L & -H\lambda^2 (\text{ch}\lambda L - 1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H\lambda (\lambda \text{ch}\lambda L - \text{sh}\lambda L) & -H\lambda (\lambda \text{ch}\lambda L - \text{sh}\lambda L) \end{bmatrix}$$

S, Y, M

但し $H = \frac{EJw}{\lambda \text{sh}\lambda L - 2(\text{ch}\lambda L - 1)}$, $\lambda^2 = \frac{GJp}{EJw}$ (17)

4. 絶対座標系表示による剛性マトリックス

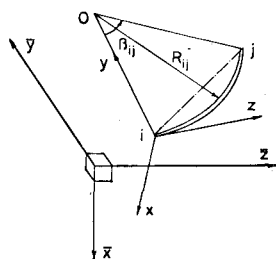


図-2

文献6)に従って図-2の座標系に関する座標変換マトリックスを R_{ij} とすると、全体座標系 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ における剛性マトリックス $[K]$ は、式(18)となる。

$$[K] = [R_{ij}] [K] [R_{ij}]^T \quad (18)$$

ここで $[R_{ij}]^T$ は、転置マトリックスである。

5. 剛性マトリックスの応用例

1) 数値計算例(1)

図-3に示す曲線格子桁について数値計算例を示す。

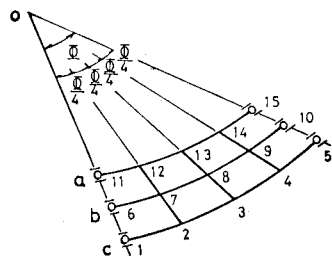
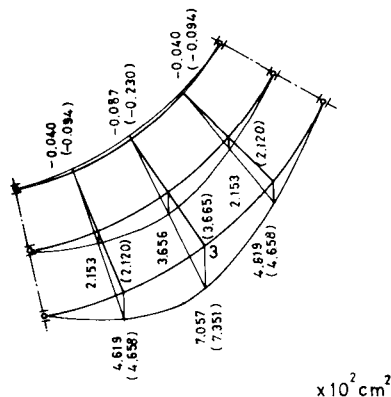


図-3

また形状寸法及び断面諸定数は、表-1に示す。

表-1 形状寸法及び断面諸定数

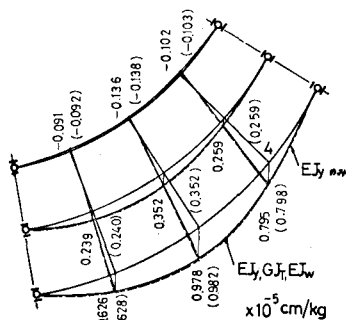
	$\theta(^{\circ})$	$R_s(m)$	$J_x (cm^4)$	$J_y (cm^4)$	$J_w (cm^6)$
主桁a	20	37	1.694×10^6	3.390×10^2	1.967×10^8
主桁b	20	40	2.106×10^6	4.805×10^2	2.487×10^8
主桁c	20	43	2.679×10^6	6.665×10^2	3.081×10^8
横桁	—	—	5.28×10^6	6.749×10^2	2.308×10^7



Warping-Moment Inf. L. at Pt. 3

図-4

図-4は、格点3における $P=1$ による曲げ振れモーメントの影響面である。



Deflection Inf. L. at Pt. 4

図-5

図-5は、格点4における $P=1$ による垂直変位影響面である。図中の括弧内の値は、横桁の曲げ剛性のみを考慮した応力法(文献4)による値である。実線は、著者らの誘導した変形法による値で、横桁の曲げ剛性、れ剛性及び曲げ振れ剛性が考慮されている。この結果、横桁の曲げ剛性の他に、振れ剛性及び曲げ振れ剛性を考

慮しても大差ないことが解った。

ロ) 数値計算例(2)

この計算は、横桁の剛性の変化が、主桁の曲げモーメント、曲げ捩れモーメントにどのような影響を及ぼすかを調べたものである。構造は、図-3と同じで、横桁の曲げ剛性、捩れ剛性、曲げ捩れ剛性を、それぞれ表-2の値の0.5, 2, 4倍としたものである。

形状寸法及び断面定数は、表-2に示すものである。

表-2 形状寸法及び断面定数

	重 [°]	R _g [m]	J _y [cm ⁴]	J _T [cm ⁴]	J _w [cm ⁶]
主桁a	24	57	8.832×10 ⁶	4.155×10 ²	8.113×10 ⁷
主桁b	24	60	1.078×10 ⁶	5.731×10 ²	9.987×10 ⁷
主桁c	24	63	1.336×10 ⁶	8.413×10 ²	1.249×10 ⁸
横桁	-	-	8.656×10 ⁶	4.01×10	1.960×10 ⁶

ここで使用断面が、I形断面であるために、設計上重要な断面力として一般に、曲げモーメントと曲げ捩れモーメントが考えられる。そこで次の式(19)を用いることによって曲げモーメント+換算した曲げ捩れモーメントの影響面を考える。

$$M_{y+w} = M_y + \frac{J_y}{y} \cdot \frac{\tilde{w}}{C_M} \cdot M_w \tag{19}$$

$\tilde{w}$; そり関数 y ; 中立軸から縁端までの距離

表-3 横桁の剛性の変化

-----	Case 1	0.5 × (J _y , J _T , J _w)
.....	Case 2	2.0 × (J _y , J _T , J _w)
————	Case 3	4.0 × (J _y , J _T , J _w)

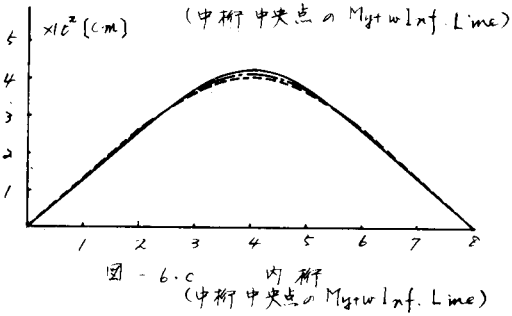
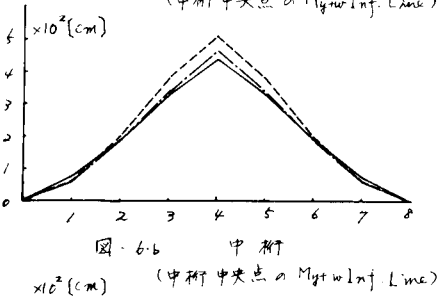
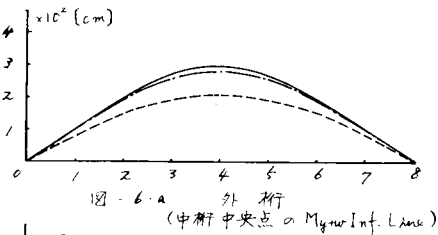


図-6 (a-c) は、主桁bの中央点におけるP=1によるM_{y+w}の影響面である。

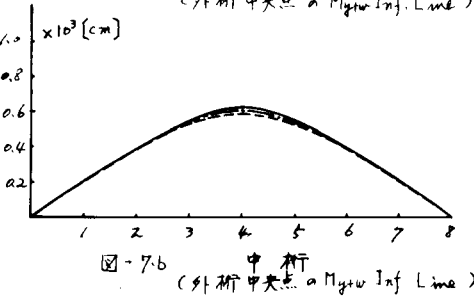
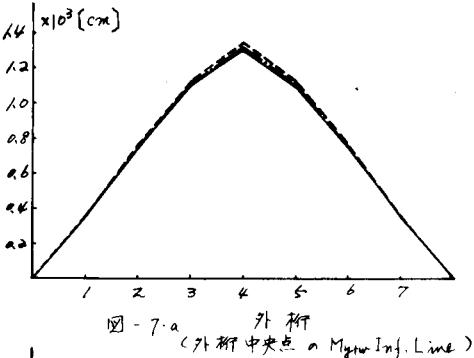


図-7 (a・b) は、主桁Cの中央点におけるP=1によるM_{y+w}の影響面である。

この結果より、横桁の剛性の変化が、主桁の応力に与える影響は、微小なものであり、横桁の剛性は、許容応力度を満たす範囲内であれば十分であると考えている。

尚、連続曲線桁の数値解析では、文献(3)の応力法による値と一致した。

6. 結論

変形法による構造解析は、広く用いられ、構造形式によっては実に有力な解析法として一般に認められている。著者らは、曲り梁を含む薄肉変断面構造物を解析するために必要な薄肉曲線材の曲げ捩れ剛性を考慮した剛性マトリックスを誘導した。これを使うことによって1軸対称断面を有する一般的な円弧曲線材の変形法による解析が可能となった。

参考文献

- 1) G. Becker; Stahlbau, Band 34 (1965),
Heft 11, 12
- 2) 深沢泰晴; 薄肉曲線桁の静力学的解析に関する基礎理論, 土木学会論文集第110号 (1964, 10)
- 3) 渡辺昇; 曲線桁の理論と計算, 技報堂
- 4) 稼農知徳; 北海道大学提出学位論文 (1972)
- 5) 稼農知徳, 藤井裕司; 土木学会第27回年次学術講演会講演概要集, 第1部門
- 6) 後藤茂夫; 円弧部材を含む任意形立体骨組構造の解法, 土木学会論文集第126号 (昭41. 2)