

骨組構造物の最適設計 (その3)

— 曲げと軸力を受ける部材を含む構造物の最適設計 —

正 員 渡 辺 昇^{*}
 学生員 ○杉 本 博 之^{**}

1. まえがき

最近の国内の最適設計に関する研究の方向は、最適設計の実用化(6)、それに関連するが、従来重量が広く用いられていた目的関数に、鋼材費・総工費等経済性を考慮しようとするもの(2, 6)、また、信頼性を考慮しようとするもの(3)の三つの方向があると思われる。このうち信頼性を考慮する最適設計については、重要な問題ではあるが、数値計算の困難さから、実際の複雑な構造物への応用は、まだ難しいと思われる。

最適設計の実用化において、サブオプティミゼーションの必要性はいうまでもないが(1, 4, 6)、その成果が、軸力のみを受ける部材のように、閉じた形で表わすことが可能なものと、今回発表する、軸力と曲げを同時に受ける部材のように、閉じた形で表わすことが不可能なもの、あるいは、表わしても意味がないと思われるものがある。後者のような問題に対しては、従来研究がなされている、勾配の概念に基く非線形計画法は、その応用において計算上の問題があると思われる。

本論文は、筆者がすでにトラス系構造物に関して提案している(5, 6)、修正全応力最適設計法なる考え方を、軸力と曲げを同時に受ける部材を含む構造物に応用し、補剛アーチ系橋梁等の実用的な最適設計を提案しようとするものである。

なお、目的関数は体積であり、細部の規程は、道路橋示方書 昭和46年12月(以下、道示)に従った。

2. 記号の定義

- A : 断面積 (cm^2)
 B : 箱型断面の内幅 (cm)
 I_x : 水平軸に関する断面二次モーメント (cm^4)
 W_x : 水平軸に関する断面係数 (cm^3)

- t : 板厚 (cm)
 x_f : フランジ幅 (cm)
 l : 部材長 (cm)
 M : 作用モーメント ($Kg-cm$)
 N : 作用軸力 (Kg)
 V : 目的関数 (体積, cm^3)
 σ_c, σ_t : 軸方向力による、圧縮応力度、引張応力度 (Kg/cm^2)
 σ_{bt}, σ_{bc} : 曲げモーメントによる最大引張応力度、最大圧縮応力度 (Kg/cm^2)
 σ_{ca}, σ_{ba} : 道示2.2.1の規定による許容軸方向圧縮応力度、許容曲げ圧縮応力度 (Kg/cm^2)
 φ : 道示3.2.1に規程してある値
 k_i : 道示に規定してある定数 (表-1)
 M_i, M_j : それぞれ、行列Mの*i*列よりなる列マトリクス、*j*行よりなる行マトリクス
 N : 構造物の部材数

なお、本文の構造解析には、変位法を用いているが、それに関する記号は、文献(6)を参照されたい。

	S S 41	S M 50	S M 53	S M 58
K_1	1,400	1,900	2,100	2,600
K_6	40	34	32	28
K_7	4	4	3	3
K_8	26	22	21	19
K_9	30	30	27	25
K_{10}	13	12	11	10
K_{11}	152	130	123	110

表-1

*北海道大学教授 工 博
 **北海道大学大学院 博士課程

3. 修正全応力最適設計法

この方法は、比較的容易に得ることのできる全応力設計の結果を利用し、「最適性の検討」、「最適化」の2つのステップを繰り返すことにより最適解を得ようとするものである。簡単な流れ図を描くと、図-1のようになる。

この中で、部材断面寸法の計算と、最適性の検討が問題となるので以下に説明する。

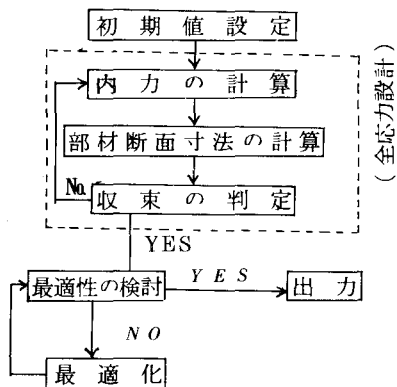


図-1 修正全応力最適設計法の流れ図

3-1 部材断面寸法の計算

これは、与えられた数種の内力の組み合わせを critical に満足する、最適な断面寸法の決定という問題である。

トラス構造物の場合は、サブオプティミゼーションの成果が、閉じた形で表現でき、内力に対する最適な断面寸法の計算は、2～4次の高次方程式を直接解くことにより得ることが出来た。しかし、軸力と曲げを同時に受ける部材に関しては、閉じた形で結果を整理することは出来ないと思われるので、意味を失わない段階まで数式を仮定し、以後は数値計算を用いることにした。

3-1-1 圧縮力と曲げモーメントを受ける部材

圧縮力と曲げモーメントを同時に受ける部材は上下・左右対称な箱型断面を仮定し、断面寸法は図-2のように定める。内幅Bは任意の値に拘束するものとする。

この時考慮すべき道示よりの拘束条件は $t_f, \min = \max(0.8, B/\ell_0)$ となると、

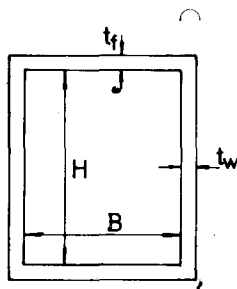


図-2

フランジ厚について

$$t_f \geq t_{f, \min} \quad (1)$$

腹板厚について

$$t_w \geq \max(0.8, H / (\ell_8 \varphi^2 + \ell_7 \varphi + \ell_0)) \quad (2)$$

応力について

$$\sigma_c / \sigma_{ca} + \sigma_{bc} / \ell_1 \leq 1.0 \quad (3)$$

となる。

ここで、与えられたM, N, Bにおいて、任意の t_w とHの組み合わせに対する、式(1), (3)を同時に満足する t_f を決定し、その結果が、式(2)の条件を満足する領域(実行可能領域)は図-3の斜線の範囲になり断面積の最小値は、曲線ABC、つまり式(2), (3)を critical に満足する曲線上にあることがわかった。直線OA上では、 $t_w = 0.8$ であり、曲線CX上では $t_f = t_{f, \min}$ である。

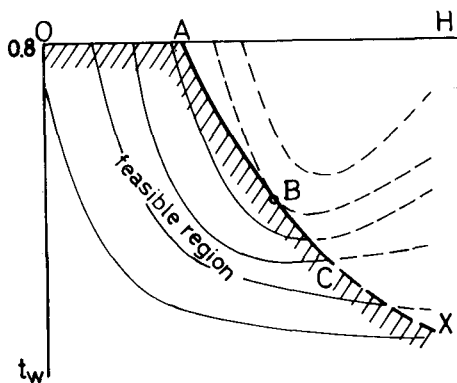


図-3 箱型断面の部材寸法の実行可能領域と等面積線

次に、曲線AC上で、二次補間法(7)を用いて最小断面積を与える腹板高 H_* を計算すると、 H_* はN, ℓ による影響は少なく、Mの関数として、近似的に図-4のようになることがわかった。これを式で表わすと、

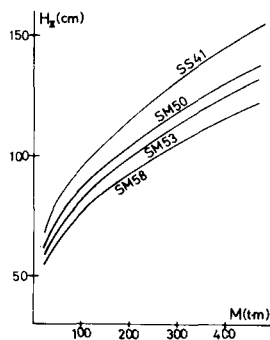


図-4 H_* — A曲線 ($B = 30 \text{ cm}$)

$$H_* = (0.05 B + a) \sqrt{M/10^5} - b B + c \quad (4)$$

となり、係数 a , b , c は表-2 のようになる。

	SS41	SS50	SM53	SM58
a	3.5	3	2.9	2.5
b	1	1.3	1.5	1.65
c	75	80	83	86

表 - 2

腹板高 H がある値に拘束されている場合、ある t_w と H に対して、式 (3) を critical に満足する A_f は、

$$x_1^2 x_2^2 - x_1 (BH + \frac{N}{\sigma_{ca}}) x_2^3 - \frac{6M}{h_1} x_1 x_2^2 + BH$$

$$(\frac{6M}{h_1} - H^2 x_1, x_2 + BH^3 (BH + \frac{N}{\sigma_{ca}})) = 0 \quad (5)$$

なる 4 次方程式を解くことにより得ることが出来るから、 $t_w = 0.8$ を初期値とし、このようにして計算された断面寸法が、式 (2) を critical に満足するまで t_w を増加させるという方法により、最適な断面を得ることができる。式 (5) は、 σ_{ca} に関して繰り返し計算であり、また、 $x_1 = B + 2 t_w$, $x_2 = H + 2 t_f$ である。

一例として、 $B = 30 \text{ cm}$, $H = 80 \text{ cm}$, $\ell = 7 \text{ m}$, 鋼種が SS41 の場合の M , N , B の関係を示すと、図-5 のようになる。

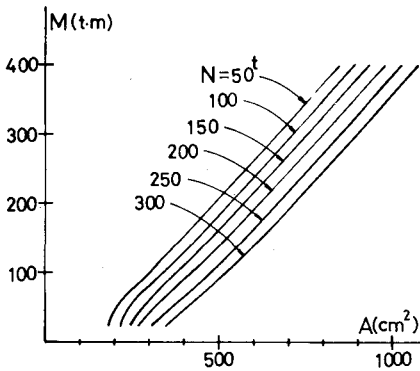


図-5 M-A 曲線 ($B = 30 \text{ cm}$, $H = 80 \text{ cm}$, $\ell = 7 \text{ m}$, SS41)

3-1-2 引張力と曲げモーメントを受ける部材

主に補剛アーチ橋を対称としているので、図-6 に示す上下・左右対称な I 型断面を考えることにする。

この時、考慮すべき道示よりの拘束条件は、

$$t_f \geq \max((x_f - t_w) / 2 h_{10}, 0.8) \quad (6-1)$$

$$x_f \geq \ell / h_9 \quad (6-2)$$

$$t_w \geq \max(H / h_{11}, 0.8) \quad (6-3)$$

$$\sigma_t + \sigma_b \leq h_1 \quad (6-4)$$

$$\sigma_b - \sigma_t \leq \sigma b a \quad (6-5)$$

となる。

このうち、式 (6-3) を等号にし、式 (6-2)

(6-5) を省いた条件で SLP 法を適用すると、最適な断面は、式 (6-1), (6-

4) を critical に満足する断面であり、 $H-A$, W_x-A の関係は、図-7, 8 のようになることがわかった。これを式で示すと、次のようになる。

$$H = a \sqrt{A} \quad (7-1)$$

$$W_x = b A \sqrt{A} \quad (7-2)$$

係数 a , b は、表-3 に示してある。

このようにして得られた、式 (7-1), (7-2) を式 (6-4) を等号にした式に代入すると、

$$H^3 - \frac{a^2 N}{h_1} H - \frac{a^3 M}{b h_1} = 0 \quad (8)$$

となり、この 3 次方程式を解くことにより、 N , M に対して、最適な断面を与える H を計算することができる。

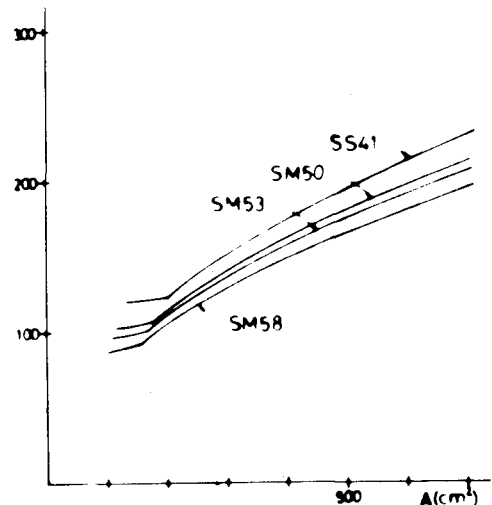


図-7

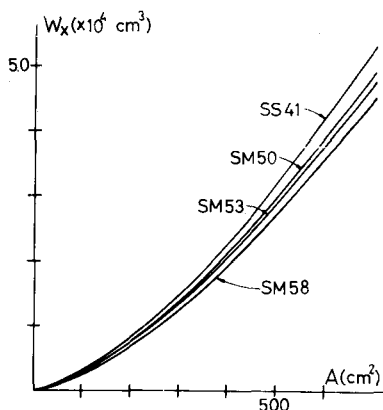


図 - 8

	SS 41	SM 50	SM 53	SM 58
a	8.718	8.063	7.842	7.416
b	2.891	2.671	2.597	2.455

表 - 3

腹板高Hが拘束されている場合、問題を簡単にするために、図-9の断面を仮定する。

未知量は A_f であるから、式(6-4)を等号にした式に

$$A = 2A_f + t_w H$$

$$W_x = H(A_f + t_w H / 6)$$

を代入することにより、 A_f は次式から計算できる。

$$A_f = -\frac{d_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 - d_2} \quad (9)$$

$$d_1 = \frac{1}{2k_1} \left(-\frac{4}{3} k_1 t_w H - N - \frac{2M}{H} \right)$$

$$d_2 = \frac{t_w H}{2k_1} \left(-\frac{k_1}{6} t_w H - \frac{N}{6} - \frac{M}{H} \right)$$

3-2 最適性の検討

最適性の検討は、

$$d_j = \frac{\partial V}{\partial A_j} = \sum_{i=1}^N \ell_i \frac{\partial A_i}{\partial A_j} \quad (10)$$

という値により行なうことが出来るが、軸力と曲げを受

ける部材においては、式中の $\partial A_i / \partial A_j$ を閉じた形で誘導することは出来ないと思われる。

そこで、この種の構造物においては、j部材の断面積の増加による、i部材の内力の増分 $\partial F_i / \partial A_j$ を計算し $F_i^{(2)}$ を求め、 $F_i^{(2)}$ を用いてi部材の断面を前述の方法で求め、

$$d_j' = \sum_{i=1}^N \ell_i A_i^{(2)} / V^{(1)} - 1.0 \quad (11)$$

の正負で、最適性の検討及び自由部材の決定を行なうのである。

この計算に必要な数式は、次のとおりである。

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial A_j} = (1 - SD^T K^{-1} D)_i \times \frac{\partial S}{\partial A_j} \times (D^T X)_k \quad (12)$$

$$F_i^{(2)} = F_{ik}^{(1)} + \Delta A_j \frac{\partial F_{ik}}{\partial A_j} \quad (13)$$

$$\frac{\partial S_i}{\partial A_j} = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4\partial I_i / \partial A_i & 2\partial I_i / \partial A_i \\ 0 & 2\partial I_i / \partial A_i & 4\partial I_i / \partial A_i \end{bmatrix} & (i = j) \end{cases} \quad (14)$$

$\partial I_i / \partial A_i$ の計算は、それぞれの断面において、次のように行なう。

3-2-1 箱型断面

断面積の増分 ΔA に対して、板厚 t_f 、 t_w が同じ割合($\epsilon \ll 1.0$)で増加するものとする。そうすると、

$$A + \Delta A \doteq A + 2(t_w H + t_f B + 4t_f t_w) \epsilon$$

$$I_x + \Delta I_x \doteq I_x + \frac{1}{6} (H + 2t_f)^2 (t_w H + 3t_f \times B + 8t_f t_w) \epsilon$$

となり、この二式より、

$$\frac{\partial I_x}{\partial A} = \frac{(H + 2t_f)^2 (t_w H + 3t_f B + 8t_f t_w)}{12(t_w H + t_f B + 4t_f t_w)} \quad (15)$$

3-2-2 I型断面

断面積の増分 ΔA に対して、フランジ厚 t_f を増加させることにする。

箱型断面の場合と同様にして、

$$\frac{\partial I_x}{\partial A} = \left(\frac{H}{2} + t_f \right)^2 \quad (16)$$

を得る。

4. 計算例

以上の考え方を応用して、図-10に示す簡単な補剛アーチ橋の最適設計について述べる。

断面の形状は、アーチ部材は箱型、吊材はH型とし、断面の幅は30cmとした。補剛桁はI型断面である。なお、軸力を受けるH型断面については、文献(6)を参照されたい。

アーチ部材あるいは補剛桁において、腹板高はそれぞれ一定とし、その値は、個々の部材について、式(4)(8)を用いて計算した値の平均値を採用することにした。

荷重条件は、死荷重として、アーチ部材の節点に1', 補剛桁の節点に20', 活荷重として、補剛桁の節点に40' 載荷している。

表-4に、初期値、全応力設計の結果、及び、式(11)を用いて計算した d' の値を示した。

この結果 d' はすべて正であり、この問題については、全応力設計の結果が最適となった。

吊材は、すべて細長比の上限の拘束条件により決定されている。

腹板高は、アーチ部材で61.5cm、補剛桁は156.3cmとなり、道示11.6(3)を適用してみると、アーチ部材を軸力部材とみなすことはできなく、ローゼ桁に収束したことになる。

次に、上と同じ問題で、アーチ部材の鋼種をSM50とした場合の結果を表-4の後半に示した。

d'_j の値はすべて正であり、また、上と同じようにローゼ桁に収束している。

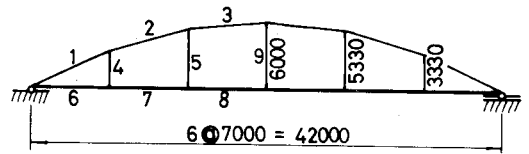


図-10

部 材	全 部 材 S S 4 1						アーチ部材 S M 5 0			
	初 期 値		全 応 力 設 計			d'	全 応 力 設 計			d'
	A	I_x	H	A	I_x		H	A	I_x	
1	400	7×10^5	61.5	198.04	0.096×10^6	0.006	54.4	195.91	0.078×10^6	0.006
2	400	7	61.5	195.34	0.095	0.004	54.4	193.55	0.078	0.004
3	400	7	61.5	212.12	0.101	0.006	54.4	208.14	0.081	0.006
4	100		30.0	36.98		0.001	30.0	36.98		0.001
5	100		30.0	41.25		0.004	30.0	41.25		0.004
6	400	7	156.3	314.60	1.288	0.001	156.9	316.50	1.304	0.007
7	400	7	156.3	323.90	1.347	0.009	156.9	326.18	1.365	0.008
8	400	7	156.3	323.90	1.347	0.007	156.9	326.18	1.365	0.007
9	100		30.0	43.11		0.003	30.0	43.11		0.003
V	2, 331, 703						2, 329, 236			

表 - 1

5. 考察及びあとがき

本文3-1-2において、問題を簡単にするために、拘束条件から、式(6-2)、(6-5)を省いたが、数値計算の結果、本論文が主に対象としている補剛アーチ桁では、この2式がcriticalになることは少ないと思われる。また、そのような状態が発生しても、個々に断面寸法を修正することにより、2式を満足させることは容易なので問題はないと思われる。

4. 計算例ではローゼ桁に収束したが、紙面の都合で記せなかった他の計算例では、ランガー桁に収束したものもある。この点では、式(4)が重要であるので、さらに検討が必要であると思われる。

次に、本論文からいえる結論を以下に記す。

- (1) 本論文で述べた方法により、サブオプティミゼーションの成果が、閉じた形で表わせない部材を含む構造物の最適設計も、比較的容易に行なえる。
- (2) 圧縮軸力と曲げモーメントを受ける部材の最適断面は、腹板厚は最小板厚で決まり、フランジ厚は応力によって決まることがわかった。
- (3) 引張軸力と曲げモーメントを受ける部材の最適断面を与える腹板高は、式(8)に示す3次方程式を解くこ

とにより得ることができる。

(4) 本文で述べた方法により，簡単な補剛アーチ桁の最適性を検討したが，全応力設計の結果が最適となった。

ただし，これは局所的な最適性の検討であり，全域的な最適性については，なお研究が必要である。

(5) 本論文は，まえがきに述べたように，実用的な最適設計法に関する一提案を行なったものであるが，さらに鋼種を設計変数に含むことは容易であり，文献(6)を参照されたい。

なお，本研究において，北大工学部稼農知徳助教授の貴重な御助言があったことを付記し感謝の意を表したい。

計算は北海道大学大型計算機センター FACOM 230-60 を使用した。

参 考 文 献

- (1) 大久保禎二：“トラス構造物の最適設計法に関する研究”，土木学会論文報告集，No.177，1970—5
- (2) 大久保禎二：“連続桁の最適設計法に関する研究”土木学会第27回年次学術講演会概要，1972—10
- (3) 長 尚，小山健：“信頼性を条件にした最小重量設計”，土木学会第27回年次学術講演会概要，1972—10
- (4) 杉本博之：“骨組構造物の最適設計(その1)”，土木学会北海道支部研究発表論文集，1971—2
- (5) 杉本博之：“骨組構造物の最適設計(その2)”，土木学会第27回年次学術講演会概要，1972—10
- (6) 杉本博之：“トラス構造物の実用的最適設計に関する研究”，土木学会論文報告集，No.208，1972—12
- (7) J. コワリック，M. R. オスボーン：“非線形最適化問題”，培風館，1970—12