

拘束ブロックによる抗の曲げ効果

正員 能町純雄*

正員 松岡健一**

学生員○古路太一***

1. ま え が き

たわみ角を拘束することにより、構造物全体の剛性を高め、耐荷力を増加することは、構造工学の原則的常識であるが、たわみ角のみを拘束する場合、その効果はどうであろうか？ 本研究は、それにつけて、鋼管杭構造にたわみ角のみを拘束する拘束ブロックを適用した場合の簡単な例について理論的、実験的な検討を行なったものである。

2. 拘束ブロック杭の解式

図-1の如き荷重状態において、杭は荷重の増加とともにまず前杭が拘束を受け、更に荷重が増大すると後杭も拘束を受けるとすると、解式を行なう順序として、前杭の拘束開始前までの状態を「第1段階」、次に前杭の拘束開始後から後杭の拘束開始前までの状態を「第2段階」、そして、後杭の拘束開始後の状態を「第3段階」とする。

(第1段階)

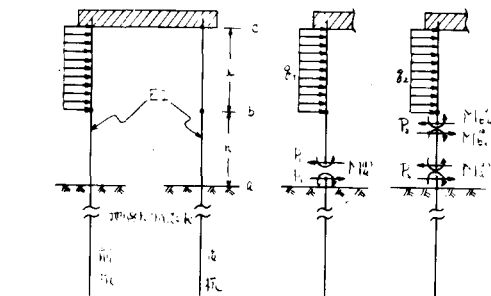
図-2において、前杭の a c 間の相対変位 $\delta_{ac}^{(1)}$ および a 点の撓み角 θ_{au} は、それぞれ

$$\delta_{ac} = \frac{P_1 \ell^3 (1+\mu)^3}{3EI} - \frac{M_a^{(1)} \ell^2 (1+\mu)^2}{2EI} - \frac{g_1 \ell^4 (3+4\mu)}{24EI} \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$\theta_{au} = \frac{P_1 \ell^2 (1+\mu)^2}{2EI} - \frac{M_a^{(1)} \ell (1+\mu)}{EI} - \frac{g_1 \ell^3}{6EI} \quad \dots\dots\dots(2)$$

(但し、 $\mu = h/\ell$)

次に弾性体内の無限に長い杭に $M_a^{(1)}$ 、 P_1 なる外力が作用した時の a 点の変位 $\delta_a^{(1)}$ および撓み角 $\theta_{a\ell}^{(1)}$ は



● 拘束ブロックの位置

図-1

図-2

図-3

$$\delta_a^{(1)} = \frac{1}{2EI} (M_a^{(1)} \ell^2 \beta^2 + P_1 \ell^3 \beta^3) \quad \dots\dots\dots(3)$$

$$\theta_{a\ell}^{(1)} = \frac{1}{2EI} (2M_a^{(1)} \ell \beta + P_1 \ell^2 \beta^2) \quad \dots\dots\dots(4)$$

(但し、 $\beta^4 = 4EI/K\ell^4$) $\theta_{au}^{(1)} = \theta_{a\ell}^{(1)}$ より、 $M_a^{(1)}$ は

$$M_a^{(1)} = \frac{P_1 \ell}{2} (1+\mu-\beta) - \frac{g_1 \ell^2}{6} \frac{1}{1+\mu+\beta}$$

上式と(1)、(3)、(4)とから $M_a^{(1)}$ を消去し c 点の全変位 $\delta_c^{(1)}$ を求めると、

$$\delta_c^{(1)} = \frac{P_1 \ell^3}{12EI} \{ (1+\mu+\beta)^3 + 2\beta^3 \} - \frac{g_1 \ell^4}{24EI} (1+2\mu+2\beta) \quad \dots\dots\dots(5)$$

また後杭の全変位 $\bar{\delta}_c^{(1)}$ 以後、前杭と区別するために－をつける) は明らかに、

$$\bar{\delta}_c^{(1)} = \frac{P_1 \ell^3}{12EI} \{ (1+\mu+\beta)^3 + 2\beta^3 \} \quad \dots\dots\dots(6)$$

前後の杭は互いに剛な物で連結されているので、両方の杭の変位は等しいという条件を用いて、(5)、(6)から

$$P_1 - \bar{P}_1 = \frac{g_1 \ell}{2} \frac{1+2\mu+2\beta}{(1+\mu+\beta)^3 + 2\beta^3} \quad \dots\dots\dots(7)$$

* 室蘭工業大学 教授 工博

** 室蘭工業大学 助教授 工修

*** 室蘭工業大学 大学院

水平方向の力のつり合いより

$$P_1 + \bar{P}_1 = g_1 \ell \quad \dots\dots\dots (8)$$

(7) (8)から

$$P_1 = g_1 r_1 \ell, \quad \bar{P}_1 = g_1 \bar{r}_1 \ell$$

$$\text{但し, } r_1 = \frac{1}{4} \left\{ 2 + \frac{1+2\mu+2\beta}{(1+\mu+\beta)^3 + 2\beta^3} \right\}$$

$$\bar{r}_1 = 1 - r_1$$

上式を用いて、前杭の a 、 b 、 c 点における曲げモーメントは、それぞれ

$$\begin{aligned} M_a^{(1)} &= \frac{g_1 \ell^2}{2} \left\{ r_1 (1+\mu-\beta) - \frac{1}{3} \frac{1}{1+\mu+\beta} \right\} \\ M_b^{(1)} &= -\frac{g_1 \ell^2}{2} \left\{ r_1 (\mu-1+\beta) + \frac{1}{3} \frac{1}{1+\mu+\beta} \right\} \\ M_c^{(1)} &= -\frac{g_1 \ell^2}{2} \left\{ r_1 (1+\mu+\beta) + \frac{1}{3} \frac{1}{1+\mu+\beta} - 1 \right\} \end{aligned}$$

となり、後杭のそれは、

$$\begin{aligned} \bar{M}_a^{(1)} &= \frac{g_1 \ell^2}{2} \bar{r}_1 (1+\mu-\beta) \\ \bar{M}_b^{(1)} &= \frac{g_1 \ell^2}{2} \bar{r}_1 (-1+\mu+\beta) \\ \bar{M}_c^{(1)} &= \frac{g_1 \ell^2}{2} \bar{r}_1 (1+\mu+\beta) \end{aligned}$$

b 点の前杭の撓み角は、

$$\theta_b^{(1)} = \frac{g_1 \ell^3}{2EI} \left\{ r_1 (\mu+\beta) + \frac{1}{3} \frac{1}{1+\mu+\beta} - \frac{1}{3} \right\}$$

拘束角を θ_0 とし、 $\theta_b = \theta_0$ のときの g_1 を g_0 とすると g_0 は、

$$g_0 = \frac{6EI\theta_0}{\ell^3 \left\{ 3r_1(\mu+\beta) + \frac{1}{1+\mu+\beta} - 1 \right\}}$$

(第2段階)

図-3は、拘束開始時の状態を新たな基準にとつたもので、その時の荷重を0とし、その後の荷重増加分を、 g_2 とすると、 $g_2 = g - g_0$ である。ただし g は第一段階から作用している荷重で、 g_2 は後杭に拘束を起す程大きくない。変位、撓み角は前と同様な表示方法で書くと、

$$\delta_{bc}^{(2)} = \frac{P_2 \ell^3}{3EI} - \frac{M_{bu}^{(2)} \ell^2}{2EI} - \frac{g_2 \ell^4}{8EI} \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$\theta_b^{(2)} = \frac{P_2 \ell^2}{2EI} - \frac{M_{bu}^{(2)} \ell}{EI} - \frac{g_2 \ell^3}{6EI} \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$\delta_{ab}^{(2)} = \frac{P_2 \ell^3 \mu^3}{3EI} - \frac{M_a^{(2)} \ell^2 \mu^2}{2EI} \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$\theta_{au}^{(2)} = \frac{P_2 \ell^2 \mu^2}{2EI} - \frac{M_a^{(2)} \ell \mu}{EI} \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$\delta_a^{(2)} = \frac{-1}{2EI} (M_a^{(2)} \ell^2 \beta^2 + P_2 \ell^3 \beta^3) \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$\theta_{a\ell}^{(2)} = \frac{1}{2EI} (2M_a^{(2)} \ell \beta + P_2 \ell^2 \beta^2) \quad \dots\dots\dots (14)$$

(12) (14) で、 $\theta_{au}^{(2)} = \theta_{a\ell}^{(2)}$ より

$$M_a^{(2)} = \frac{P_2 \ell}{2} (\mu - \beta) \quad \dots\dots\dots (15)$$

また b 点の撓み角は g_2 の変化に対し常に一定である。このことから、 $\theta_b^{(2)} = 0$ となり

$$M_b^{(2)} = \frac{P_2 \ell}{2} - \frac{g_2 \ell^2}{6} \quad \dots\dots\dots (16)$$

前杭の全変位 $\delta_i^{(2)}$ 、および後杭の全変位 $\bar{\delta}_i^{(2)}$ はそれぞれ

$$\begin{aligned} \delta_i^{(2)} &= \frac{P_2 \ell^3}{12EI} \left\{ 1 + 2\beta^3 + (\mu + \beta)^3 \right\} \\ &\quad - \frac{g_2 \ell^4}{24EI} \quad \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

$$\bar{\delta}_i^{(2)} = \frac{P_2 \ell^3}{12EI} \left\{ (1 + \mu + \beta)^3 + 2\beta^3 \right\} \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$\delta_i^{(2)} = \bar{\delta}_i^{(2)} \text{ と } P_2 + \bar{P}_2 = g_2 \ell \text{ より}$$

$$P_2 = g_2 r_2 \ell, \quad \bar{P}_2 = g_2 \bar{r}_2 \ell$$

但し

$$r_2 = \frac{0.5 + (1 + \mu + \beta)^3 + 2\beta^3}{1 + (\mu + \beta)^3 + (1 + \mu + \beta)^3 + 4\beta^3}$$

$$\bar{r}_2 = 1 - r_2$$

前杭の曲げモーメントは、

$$M_a^{(2)} = \frac{g_2 r_2 \ell^2}{2} (\mu - \beta)$$

$$M_b^{(2)} = -\frac{g_2 r_2 \ell^2}{2} (\mu + \beta)$$

$$M_{bu}^{(2)} = \frac{g_2 r_2 \ell^2}{2} - \frac{g_2 \ell^2}{6}$$

$$M_c^{(2)} = -\frac{g_2 \ell^2}{2} \left(r_2 - \frac{2}{3} \right)$$

後杭の曲げモーメントは

$$\bar{M}_a = \frac{g_2 \ell^2}{2} \bar{r}_2 (1 + \mu - \beta)$$

$$M_b^{(2)} = -\frac{g_2 \ell^2}{2} \bar{\tau}_2 (\mu + \beta - 1)$$

$$M_c^{(2)} = -\frac{g_2 \ell^2}{2} \bar{\tau}_2 (1 + \mu + \beta)$$

荷重による第2段階までの前杭の全曲げモーメントは、

$$M_a = M_a^{(1)} + M_a^{(2)}, \quad M_b \ell = M_b^{(1)} \ell + M_b^{(2)} \ell$$

$$M_{bu} = M_b^{(1)} + M_b^{(2)} u, \quad M_c = M_c^{(1)} + M_c^{(2)}$$

と与えられる。後杭についても同様である。

(第3段階)

最後に後杭が拘束を受ける状態を考える。 $\bar{\theta}_b = \theta_o$ のときの荷重 g_2 を $\bar{g}_2$ とし、後杭の拘束の始まる状態を基準にとると、前と同様にして、 g_3 なる荷重増加分は、 $g_3 = g - (g_o + \bar{g}_o)$ で、これより $M_a^{(3)}$, $M_b u^{(3)}$, $\delta t^{(3)}$, δt は、同様にして、

$$M_a^{(3)} = \frac{\bar{P}_3 \ell}{2} (\mu - \beta), \quad M_{bu}^{(3)} = \frac{\bar{P}_3}{2} \ell$$

$$\delta t^{(3)} = \frac{\bar{P}_3 \ell^3}{12EI} \{1 + 2\beta^3 + (\mu + \beta)^3\}$$

$$\delta t^{(3)} = \delta t^{(2)} - \frac{g_3 \ell^4}{12EI}$$

$$\bar{g}_o = \left\{ \frac{2EI\theta_o}{(\beta + \mu)\ell^3} - g^o \bar{\tau}_1 \right\} / \bar{\tau}_2$$

となり、 P_3 、 $\bar{P}_3$ は

$$P_3 = g_3 \tau_3 \ell, \quad \bar{P}_3 = g_3 \bar{\tau}_3 \ell$$

$$\text{但し } \tau_3 = \frac{1}{4} \left\{ 2 + \frac{1}{1 + 2\beta^3 + (\mu + \beta)^3} \right\}$$

$$\bar{\tau}_3 = 1 - \tau_3$$

となる。故に前杭の曲げモーメントは

$$M_a^{(3)} = \frac{g_3 \tau_3 \ell^2}{2} (\mu - \beta)$$

$$M_b \ell^{(3)} = -\frac{g_3 \tau_3 \ell^2}{2} (\mu + \beta)$$

$$M_{bu}^{(3)} = \frac{g_3 \tau_3 \ell^2}{2} - \frac{g_3 \ell^2}{6}$$

$$M_c^{(3)} = -\frac{g_2 \ell^2}{2} \left(\tau_3 - \frac{2}{3} \right)$$

後杭の曲げモーメントは

$$M_a^{(3)} = \frac{g_3 \bar{\tau}_3 \ell^2}{2} (\mu - \beta)$$

$$M_b \ell^{(3)} = -\frac{g_3 \bar{\tau}_3 \ell^2}{2} (\mu + \beta)$$

$$M_{bu}^{(3)} = \frac{g_3 \bar{\tau}_3 \ell^2}{2} = -M_c^{(3)}$$

荷重による第3段階までの前杭の全曲げモーメントは

$$M_a = M_a^{(1)} + M_a^{(2)} + M_a^{(3)}, \quad M_b \ell = M_b^{(1)} \ell + M_b^{(2)} \ell + M_b^{(3)} \ell$$

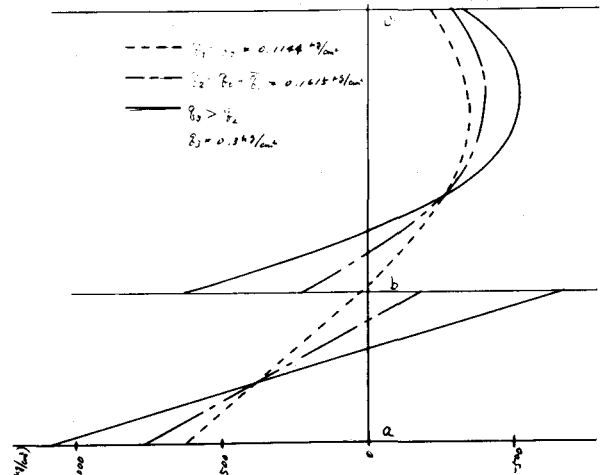
$$M_{bu} = M_b^{(1)} + M_b^{(2)} u + M_b^{(3)} u, \quad M_c = M_c^{(1)} + M_c^{(2)} + M_c^{(3)}$$

となり、後杭についても同様にすれば良い。

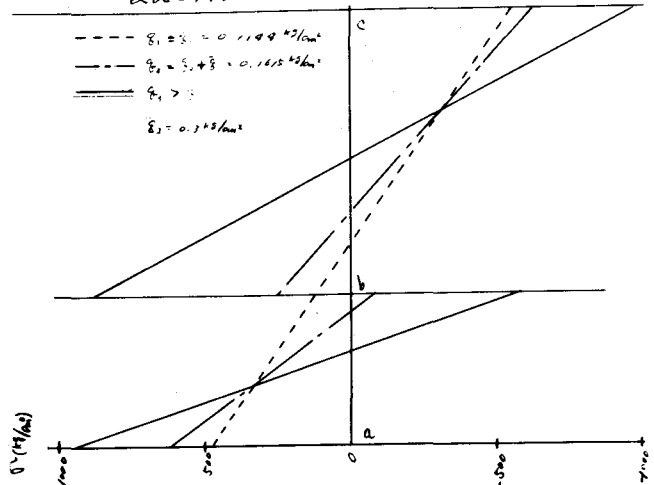
3. 数値計算例

次の諸数値を用いて計算し、その結果を図-4、図-5に示す。 $\ell = 58.6$, $h = 31.1$, $I = 0.1486$
 $E = 2.1 \times 10^6$, $K = 612$, $\theta_o = 0.01$

前杭の曲げモーメントによる応力分布 図-4

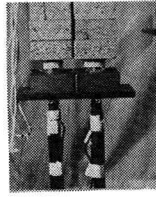


後杭の曲げモーメントによる応力分布 図-5



4. 実験例

実験は写真のように、前後の杭の a 点をヒンデとし、 c 点に集中荷重 $2P$ を作用させて行なった。この条件における b 、 c 点の曲げモーメントの理論値は拘束が前後の杭で同時に起ることを考慮すれば、



(第1段階)

$$M_b^{(1)} = P_1 \mu \ell, \quad M_c^{(1)} = P_1 \ell (1 + \mu)$$

(第2段階) or (第3段階)

$$M_b^{(2)} \ell = P_2 \mu \ell, \quad M_b^{(2)} u = -0.5 P_2 \ell$$

$$M_c^{(2)} = 0.5 P_2 \ell \quad \text{但し、} P_1 \leq P_0$$

$$P_0 = \frac{2EI\theta_0}{\ell^2 (1 + 2\mu)}$$

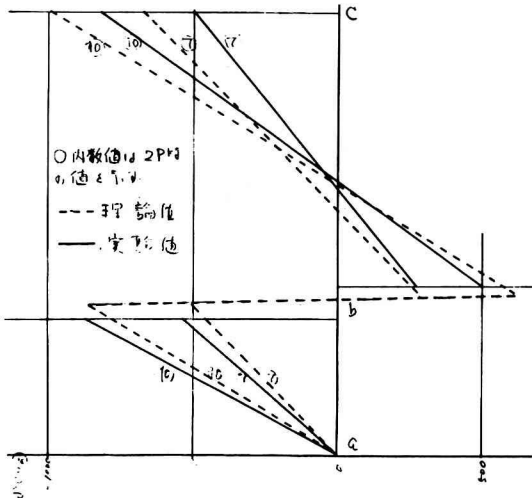
故に

$$M_b \ell = M_b^{(1)} + M_b^{(2)} \ell, \quad M_b u = M_b^{(1)} + M_b^{(2)} u$$

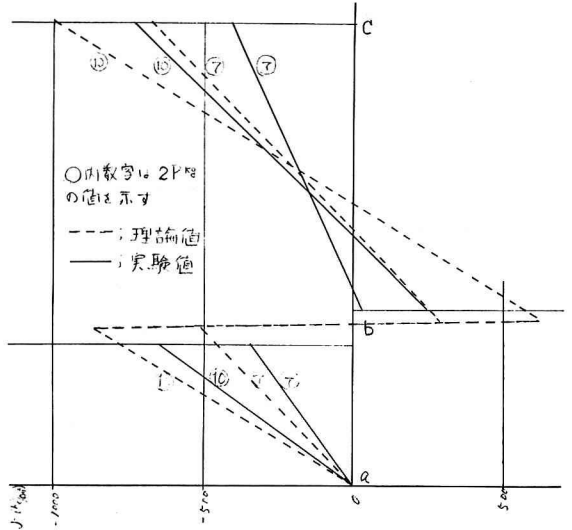
$$M_c = M_c^{(1)} + M_c^{(2)}$$

実験は計算例の諸数値をもつ模型で行ない、結果は理論値とともに図-6、図-7に示す。

後杭の曲げモーメントによる応力分布 図-6



前杭の曲げモーメントによる応力分布 図-7



5. 考察

数値計算例、実験例から明らかのように、杭の途中に拘束ブロックがあることにより、上端の曲げモーメントの値が非常に減少し、杭全体にわたって曲げモーメントの分配が良好になることがわかる。尚、実験値と理論値の相違は拘束ブロックの固定が確実でなかったこと、および理論値において軸力を考慮していないことによると思われる。

参考文献

Timoshenko and Woinowsky-Krieger; *Theory of Plates and Shells*