土木学会北海道支部　研究発表論文集　昭和47年度

円形 inclusion の移動による圧力分布について

正員　能町純雄 *
同　松岡健一 **

1 まえがき

極座標に関する二次元非軸対称問題は、*Fourier-Hankel*変換を用いると、簡単な境界値問題として取扱うことができる。本論では、中空同心円板の変位の一般式を導き、弾性体中の円形 *inclusion*の移動の問題に応用し、若干の数値解析を行なつた。

2 基本微分方程式およびその解法 (1) (2)

二次元非軸対称問題の力のつり合式は、物体力を無視し、r、θ 方向の直応力を、それぞれ σ_r、σ_θ、せん断応力を $\tau_{\theta r}$ とすると、

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}+\frac{\partial\tau_{\theta r}}{r\partial\theta}=0$$

$$\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r}+\frac{\tau_{r\theta}}{r}+\frac{\partial\sigma_\theta}{r\partial\theta}=0$$

また、*Hook* の法則は、u、v を r、θ 方向変位として

$$\sigma_r=(2\mu+\lambda)\frac{\partial u}{\partial r}+\lambda\left(\frac{u}{r}+\frac{2v}{r\partial\theta}\right)$$

$$\sigma_\theta=\lambda\frac{\partial u}{\partial r}+(2\mu+\lambda)\left(\frac{u}{r}+\frac{\partial v}{r\partial\theta}\right)$$

$$\tau_{r\theta}=\mu\left(\frac{2u}{r\partial\theta}+\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r}\right)$$

ただし、μ、λ は、*Lame*の定数である。

ここここで、(1)、(2)式にそれぞれ $L_1=\cos\nu\theta\cdot R(r)$、$L_2=\sin\nu\theta\cdot R(r)$ を乗じ、r、θ で積分する。このとき(3)〜(5)式を考慮すると

$$\int_a^b\int_0^{2\pi}(1)\times\cos\nu\theta R(r)dr\,d\theta=\Big[\mathrm{C}_m[\sigma_r]\cdot R\Big]_a^b$$

$$-\Big[C_m[u]\Big\{(2\mu+\lambda)\frac{dR}{dr}-2\mu\frac{R}{r}\Big\}-\nu\mu S_m[v]\frac{R}{r}\Big]_a^b$$

$$-\int_a^b C_m[u]\Big\{(2\mu+\lambda)\Big(\frac{d^2R}{dr^2}-\frac{dR}{rdr}\Big)-\nu^2\mu\frac{R}{r^2}\Big\}dr$$

$$-\nu\int_a^b S_m[v]\Big\{(\mu+\lambda)\frac{dR}{rdr}+2\mu\frac{R}{r^2}\Big\}dr=0 \qquad (6)$$

$$\int_a^b\int_0^{2\pi}(2)\times\sin\nu\theta R(r)dr\,d\theta=\Big[S_m[\tau_{r\theta}]\cdot R\Big]_a^b$$

$$-\Big[\nu\lambda C_m[u]\frac{R}{r}+S_m[v]\cdot\mu\Big(\frac{dR}{dr}-2\frac{R}{r}\Big)\Big]_a^b$$

$$+\int_a^b C_m[u]\cdot\nu\Big\{(\mu+\lambda)\frac{dR}{dr}-2(2\mu+\lambda)\frac{R}{r^2}\Big\}dr=0 \qquad (7)$$

ただし、a、b は円板の内径および外径、$\nu=m\pi/\varphi$　$m\pi/2\pi=m/2$、

また $S_m[f(\theta)]=\int_0^{2\pi}f(\theta)\sin\nu\theta\,d\theta$

$$C_m[f(\theta)]=\int_0^{2\pi}f(\theta)\cos\nu\theta\,d\theta$$

*Hankel*変換を簡単にするため、次の記号を用いる。

$$C_m[u]=A_{mr}+B_{mr}、S_m[v]=A_{mr}-B_{mr} \qquad (8)$$

(8)式を(6)、(7)式に代入し、(6)、(7)式を返々加え、$R(r)=rH_{\nu+1}(\xi_i r)$ として、さらに積分すると、

$$\{C_m[\sigma_r)_{r=b}]+S_m[\tau_{r\theta})_{r=b}]\}bH_{\nu+1}(\xi_i r)$$

$$+4\mu(\nu+1)\{A_{mb}H_{\nu+1}(\xi_i b)-A_{ma}H_{\nu+1}(\xi_i a)\}$$

$$-(3\mu+\lambda)\xi_i^2H_{\nu+1}[A_{mr}]+(\mu+\lambda)\xi_i^2H_{\nu-1}[B_{mr}]$$

$$=0 \qquad (9)$$

次に、(6)、(7)式を返々減じ、$R(r)=rH_{\nu-1}(\xi_i r)$ として、同様に積分を行なえば

$$\{C_m[\sigma_r)_{r=b}]-S_m[\tau_{r\theta})_{r=b}]\}bH_{\nu-1}(\xi_i b)$$

$$-\{C_m[\sigma_r)_{r=a}]-S_m[\tau_{r\theta})_{r=a}]\}aH_{\nu-1}(\xi_i a)$$

$$-4\mu(\nu-1)\{B_{mb}H_{\nu-1}(\xi_i b)-B_{ma}H_{\nu-1}(\xi_i a)\}$$

$$+(\mu+\lambda)\xi_i^2H_{\nu+1}[A_{mr}]-(3\mu+\lambda)\xi_i^2H_{\nu-1}[B_{mr}]$$

$$=0 \qquad (10)$$

* 室蘭工業大学　教授
** 同　助教授

ただし

$$H_{\nu\pm1}[f(r)]=\int_a^b f(r) r H_{\nu\pm1}(\xi r)\,dr$$

$$H_k(\xi_i r)=J_k(\xi_i r)Y_\nu(\xi_i a)-J_\nu(\xi_i a)Y_k(\xi_i r)$$

$k=\nu-1$ 、ν、$\nu+1$

ξ_i は、$H_\nu(\xi_i b)=0$ の根を並べたものである。

また、(10) 式の計算で、$R(r)=r^{\nu+2}$ とすると

$$\{C_m[\sigma_r)_{r=b}]-S_m[\tau_{r\theta})_{r=b}]\}b^{\nu+2}-\{C_m[\sigma_r)_{r=a}]-S_m[\tau_{r\theta})_{r=a}]\}a^{\nu+2}+2(\mu+\lambda)\times\{A_{mb}\times b^{\nu+1}-A_{ma}a^{\nu+1}\}+\{4\nu\mu+2(\mu+\lambda)\}\times\{B_{mb}b^{\nu+1}-B_{ma}a^{\nu+1}\}-4\nu(3\mu+\lambda)\int_a^b B_{mr}r^\nu dr=0 \quad (11)$$

3 変位の Fourier-Hankel 変換および逆変換

(9)式 (11) 式を、$H_{\nu+1}[A_m r]$ と $H_{\nu-1}[B_m r]$ の連立方程式として解き、変位の Fourier-Hankel 変換を求めると

$$H_{\nu+1}[A_m r]=\frac{H_{\nu+1}(\xi_i b)}{4\mu(2\mu+\lambda)\xi_i^2}\{2\mu bC_{mb}+2(2\mu+\lambda)bT_{mb}-4\mu(3\mu+\lambda)(\nu+1)A_{mb}+4\mu(\mu+\lambda)\times(\nu-1)B_{mb}\}-\frac{H_{\nu+1}(\xi_i a)}{4\mu(2\mu+\lambda)\xi_i^2}\{2\mu aC_{ma}+2(2\mu+\lambda)aT_{ma}-4\mu(3\mu+\lambda)(\nu+1)A_{ma}+4\mu(\mu+\lambda)(\nu-1)B_{mb}\} \quad (12)$$

$$H_{\nu-1}[B_m r]=\frac{H_{\nu-1}(\xi_i b)}{4\mu(2\mu+\lambda)\xi_i^2}\{2\mu bC_{mb}-2(2\mu+\lambda)bT_{mb}-4\mu(\mu+\lambda)(\nu+1)A_{mb}-4\mu(3\mu+\lambda)(\nu-1)B_{mb}\}-\frac{H_{\nu-1}(\xi_i a)}{4\mu(2\mu+\lambda)\xi_i^2}\times\{2\mu aC_{ma}-2(3\mu+\lambda)aT_{ma}-4\mu(\mu+\lambda)(\nu+1)A_{ma}-4\mu(3\mu+\lambda)(\nu-1)B_{ma}\} \quad (13)$$

ここで

$C_{mb}=C_m[\sigma_r)_{r=b}]$、$C_{ma}=C_m[\sigma_r)_{r=a}]$

$T_{mb}=S_m[\tau_{r\theta})_{r=b}]$、$T_{ma}=S_m[\tau_{r\theta})_{r=a}]$

(12)、(13) 式を逆変換して、各変位成分を求めるのであるが、Hankel 変換の逆変換は次のように表わされる。

$$A_{mr}=\frac{2\nu a^{2\nu}b^{2\nu}}{(b^{2\nu}-a^{2\nu})}\frac{1}{r^{\nu+1}}\int_a^b A_{mr}r^{-\nu}dr+\frac{2}{b^2}\sum\frac{H_{\nu+1}(\xi_i r)}{\Theta_{i\nu}}H_{\nu+1}[A_m r] \quad (14)$$

$$B_{mr}=\frac{2\nu}{b^{2\nu}-a^{2\nu}}r^{\nu-1}\int_a^b B_{mr}r^{\nu}dr+\frac{2}{b^2}\sum_i\frac{H_{\nu-1}(\xi_i r)}{\Theta_{i\nu}}H_{\nu-1}[B_m r] \quad (15)$$

ただし

$$\Theta_{i\nu}=\{H_{\nu-1}(\xi_i b)\}^2-\frac{a^2}{b^2}\{H_{\nu-1}(\xi_i a)\}^2$$

(14)、(15) 式に (11) ~ (13) 式を代入すると、

$$A_{mr}=\frac{1}{2(2\mu+\lambda)}\{\overset{(1)}{\chi}_{\nu+1}(r)C_{mb}+\overset{(2)}{\chi}_{\nu+1}(r)C_{ma}\}+\frac{11}{2\mu}\{\overset{(1)}{\chi}_{\nu+1}(r)T_{mb}+\overset{(2)}{\chi}_{\nu+1}(r)T_{ma}\}+\frac{3\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}(\nu+1)\{\overset{(1)}{\chi}_{\nu+1}(r)\frac{1}{b}A_{mb}+\overset{(2)}{\chi}_{\nu+1}(r)\frac{1}{a}A_{ma}\}+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+1}(\nu-1)\{\overset{(1)}{\chi}_{\nu+1}(r)\frac{1}{b}B_{mb}+\overset{(2)}{\chi}_{\nu+1}(r)\frac{1}{a}B_{ma}\}+\frac{2\nu a^{2\nu}b^{2\nu}}{b^{2\nu}-a^{2\nu}}\frac{Co}{r^{\nu+1}} \quad (16)$$

$$B_{mr}=\frac{1}{2(2\mu+\lambda)}\{\overset{(1)}{\chi}_{\nu-1}(r)C_{mb}+\overset{(2)}{\chi}_{\nu-1}(r)C_{ma}\}-\frac{1}{2\mu}\{\overset{(1)}{\chi}_{\nu-1}(r)T_{mb}+\overset{(1)}{\chi}_{\nu-1}(r)T_{ma}\}-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}(\nu+1)\{\overset{(1)}{\chi}_{\nu-1}(r)\frac{1}{b}A_{mb}+\overset{(2)}{\chi}_{\nu-1}(r)\times\frac{1}{a}A_{ma}\}-\frac{3\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}(\nu-1)\{\overset{(1)}{\chi}_{\nu-1}(r)\frac{1}{b}B_{mb}$$

$$+\chi^{(2)}_{\nu-1}(r)\frac{1}{a}B_{ma}\}$$

$$+\frac{2\nu}{b^{2\nu}-a^{2\nu}}r^{\nu-1}D_0 \qquad (17)$$

上式中、$x_0=b$、$x_1=a$、$x_2=b$として

$$D_0=\frac{1}{4\nu(3\mu+\lambda)}\{T_{mb}\,b^{\nu+2}\,T_{ma}\,a^{\nu+2}\}$$

$$-\frac{1}{4\nu(3\mu+\lambda)}\{C_{mb}\,b^{\nu+2}-C_{ma}\,a^{\nu+2}\}$$

$$+\frac{\mu+\lambda}{2\nu(3\mu+\lambda)}\{A_{mb}\,b^{\nu+1}-A_{ma}\,a^{\nu+1}\}$$

$$+\frac{2\nu\mu+\mu+\lambda}{2\nu(3\mu+\lambda)}\{B_{mb}\,b^{\nu+1}-B_{ma}\,a^{\nu+1}\}\text{、}$$

$$\chi^{(k)}_{\nu+1}(r)=\frac{2}{b^2}\sum_i\frac{x_{k-1}H_{\nu+1}(\xi_i\,x_{k-1})}{\Theta^2_{i\nu}\cdot\xi^2_i}$$

$$\times H_{\nu+1}(\xi_i r)$$

$$=\frac{a^\nu b^\nu}{b^{2\nu}-a^{2\nu}}\Big[\frac{1}{2(\nu+1)}\frac{r^{\nu+1}}{x_k^\nu}-\frac{1}{2}\frac{x_k^\nu}{r^{\nu-1}}$$

$$+\frac{1}{\nu+1}\cdot\frac{2\nu a^{2\nu}b^{2\nu}}{b^{2\nu}-a^{2\nu}}\Big\{\frac{a^2-b^2}{4(\nu+1)}$$

$$\times\frac{1}{x_k^\nu}+\frac{x_k^\nu}{4(\nu-1)}\Big(\frac{1}{a^{2(\nu-1)}}-\frac{1}{b^{2(\nu-1)}}\Big)\Big\}\Big]$$

$$\chi^{(k)}_{\nu-1}(r)=\frac{2}{b^2}\sum_i\frac{x_{k-1}H_{\nu-1}(\xi_i\,x_{k-1})}{\Theta^2_{i\nu}\cdot\xi^2_i}$$

$$H_{\nu-1}(\xi_i\,\nu)=\frac{a^\nu b^\nu}{b^{2\nu}-a^{2\nu}}\Big[\frac{\nu+1}{2x_k^\nu}+\frac{1}{2(\nu-1)}$$

$$\times\frac{x_k^\nu}{r^{\nu-1}}+\frac{2\nu r^{\nu-1}}{b^{2\nu}-a^{2\nu}}\Big\{\frac{a^2-b^2}{4(\nu-1)}x_k^\nu$$

$$+\frac{x_k^{-\nu}}{4(\nu+1)}(a^{2(\nu+1)}-b^{2(\nu+1)})\Big\}\Big]$$

従つて、変位u、vは

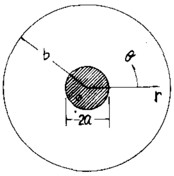
$$u=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u\,d\theta+\frac{1}{\pi}\sum_\nu\cos\nu\theta\,(A_m r+B_m r) \qquad (18)$$

$$v=\frac{1}{\pi}\sum_\nu\sin\nu\theta\,(A_m r-B_m r) \qquad (19)$$

各応力成分の一般式は(18)、(19)式を(3)〜(5)式に代入してえられるが、ここでは省略する。

4 応 用 例

弾性対中に、円形inclusionがあり、これの移部による弾性体の応力分布を考える。



図−1 同心円板

a) inclusion表面にせん断応力がない場合

このとき、境界条件は

$r=a$で: $u=u_0\cos\theta$ 、$\tau_{r\theta}=0$ (20)

$r=b$で: $u=\tau_{r\theta}=0$ (21)

従つて、$T_{mb}=T_{ma}=0$、$\nu=m/2=1$

b) inclusionと弾性対間に変位のずれがない場合

同様に、境界条件は

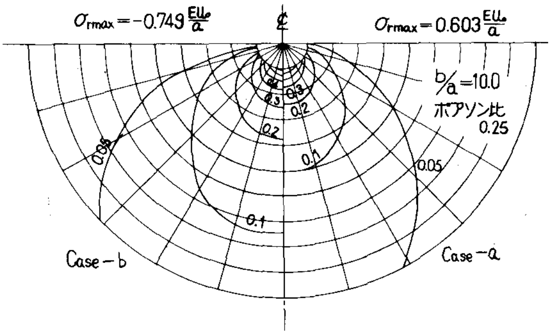
$r=a$で: $u=u_0\cos\theta$ $v=-u_0\sin\theta$、 (22)

$r=b$で: $u=v=0$ (23)

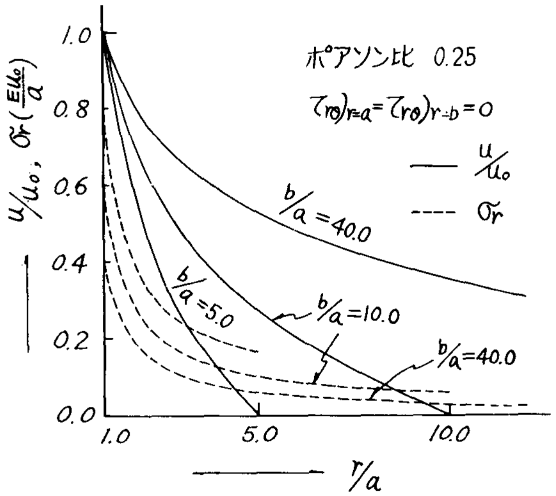
従つて$A_{mb}=A_{ma}=0$、$\nu=m/2=1$

以上の2つの場合の解析を行なつたが、いずれの場合もinclusion自体の変形は考え ないので、$\nu=1$のものだけの計算となる。また(20)〜(23)の条件の他に全体の力のつり合から$aC_{ma}=bC_{mb}$の関係がありさらに、(16)式で、$A_m r)_{r=a}=A_{ma}$, $A_m r)_{r=b}=A_{mb}$なる関係がある。これらを用いて、計算した結果を図に示す。図−2は$b/a=10$、ポアソン比0.25の場合のσ_rの分布図であり、図−3は、変位および応力のそれぞれの最大値を示したものである。また、図−4は、inclusionの変動量u_0と全反力gの比とb/aの関係を示したものである。ここで全反力gは

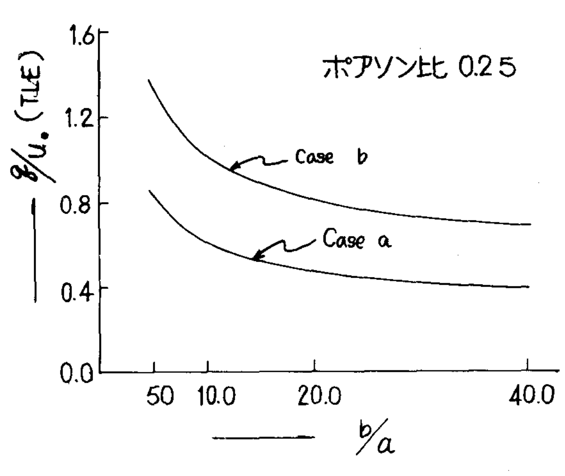
$$g=\int_0^{2\pi}\{\sigma_r)_{r=a}\cos\theta-\tau_{r\theta})_{r=a}\sin\theta\}\,a\,d\theta$$ である。



図−2　σ_r　分布図



図−3　$\theta=0$ における u、σ_r の分布



図−4　反力係数（q/u_o）と b/a の関係

変位、応力とも b/a に無関係に、境界付近で減少が著しい。また図−2に示すように、境界におけるずれがない場合の方が、単位移動量に対する、応力は大きい値を示している。これを弾性体中の杭の二次元的な解析に適用すると、図−4から明らかなように、周囲の変位が拘束されていれば、杭径の大きいもの程、反力が大きい（b＝const．として）ことを示している。また、当然のことであるが、せん断応力を無視しない場合の方が、全反力が大きい。

5　む　す　び

極座標における二次元非軸対称問題を*Fourier Hankel*変換を用いて解析する方法で、中空同心円板の一般式を導き、簡単な例を示したが、中実円板に関しては、文献2）にあるので、これを合せて、同心円状に異なる弾性体からなる円板の応力問題を取扱うことが出来る。なお、本研究は、三次元非軸対称応力解析の一部として行なつたものであり、数値計算は、北大大型計算機センターの*FACOM* 230−60　で行なつた。

参　考　文　献

1）. *S. G. Nomachi:Mem. of Muroran Institute of Tech. Vol.* 3　91 (1960)

2）. *S. G. Nomachi:Mem. of Muroran Institute of Tech. Vol. NO.* 4　127　(1961)

3）. *I. M. Sueddon:Fourier Transforms* (1951)