

マトリックス法による月降水量のシミュレーション

— 第 2 報 —

正 員 ○星

清 *

1 はじめに

水資源計画策定には、まず基礎資料としての水文量時系の模擬発生が重要な要素となる。季節変動を除いた水文量時系列の一般的構造として、流量時系列はマルコフ過程に基づくことが多く、又降水量時系列はランダム系列と見なし得ることが多い。この事実から、降水量時系列の模擬発生にはマルコフ連鎖による方法とは違ったモデル式が要求される。

前報では、1個の基幹観測所から数個の衛星観測所の月降水量系列を同時に模擬発生させるモデル式を提案した。その結果、雨龍川流域の観測所において実測値とシミュレート値に幾分差がみられる月が存在した。その原因として次の要因が考えられる。(1) 原系列データの正規変換方法によるもの。(2) 乱数発生方法によるもの。(3) 流域間の降水特性の相異によるもの。

本報告では上の(1)と(2)の影響を調べるために前報のモデル式を修正した。すなわち、既往月降水量をすべて平方根変換で正規化して係数行列を算出し、模擬発生にはガンマ分布型の乱数を発生させた。又(3)の原因を客観的に説明するために、別のモデル式を提案し併せてそのモデル式の逆変換によって月降水量の模擬発生を行なった。本報告で提案する2つのモデル式は従来から行なわれている相関分析の線的解析を一步進めた平面的解析であり、観測所間に存在する降水事象の高い相関性を最大限に活用している。

本計算は北大計算センター内 F A C O M 230-60 上で実行した。

2 記号の定義

n : 観測所数 N : 各月の標本数
 Y : 衛星観測所間のデータ行列 $[n \times N]$ 行列
 X : 基幹観測所のデータ行列 $[1 \times N]$ 行列
 e : ランダム成分 $[n \times N]$ 行列

A : $[n \times 1]$ の係数行列 I : 単位行列
 B : $[n \times n]$ の係数行列 O : 零ベクトル
 Y^T : Y の転置行列 B^{-1} : B の逆行列
 ρ : 相関係数 w : $[n \times n]$ の係数行列
 Z : 観測所間のデータ行列 $[n \times N]$ 行列
 g_i : 第 i 合成変量行列 $[1 \times N]$ 行列
 w_i : w の第 i 番目の行ベクトル $[1 \times n]$ 行列
 G : $[n \times N]$ 行列 λ_i : 第 i 番目の固有値
 a_i : 第 i 番目の固有値ベクトル $[1 \times n]$ 行列
 R : 相関数行列 $[n \times n]$ 行列
 b_i : B の第 i 番目の列ベクトル $[n \times 1]$ 行列
 r : 尖度 η : 正規乱数
 ξ : ガンマ分布型乱数

3 基本式

2つのモデル式で扱われる変量はすべて標準化されているものとする。

3-1 モデル式 $1^{(1)}$

1個の基幹観測所から数個の衛星観測所の月降水量をシミュレートするための基本式として、次の回帰線モデルを考える。

$$Y = AX + Be \quad (1)$$

係数行列 A 、 B は次式で与えられる。

$$A = YX^T / N \quad (2)$$

$$BB^T = YY^T / N - AA^T \equiv C \quad (3)$$

$$(C - \lambda_i I) b_i = O \quad (4)$$

$$e = B^{-1}(Y - AX) \quad (5)$$

すなわち、係数行列 B の成分は(4)式で示されるように(3)式の右辺の固有値ベクトルを求めればよい。⁽²⁾

(2)式と(3)式の係数の性質から、2個の観測所だけを考える場合には、次の一次回帰線モデルに変形される。

$$y = \rho x + \sqrt{1 - \rho^2} e \quad (6)$$

* 北海道大学工学部 助 手

(6)式を使って数個の衛星観測所の月降水量を基幹観測所から順次模擬発生させる場合、衛星観測所間の情報量を(6)式ではいかすことができない。一方、(1)式ではそれらの情報を最大限に活用することが可能である。

3-2 モデル式 2⁽³⁾

このモデル式は前の回帰線モデルと違って、全観測所からなる一次変換式を導入する。

$$G = wZ \quad (7)$$

$$G = [g_1 \ g_2 \ g_3 \ \dots \ g_n]^T \quad (8)$$

$$w = [w_1 \ w_2 \ w_3 \ \dots \ w_n]^T \quad (9)$$

$$g_i = w_i Z \quad (10)$$

このモデル式の特徴は(10)式で示されるように、すべての合成変量が観測所間のデータ行列の一次変換式から成り立っている点である。

降水事象の空間分布特性が地域毎に異質であるという前提に立って、その異質をデータから客観的に抽出するため、合成変量が互いに直交するように(10)式の係数ベクトル w_i を求める。その結果すべての合成変量について次式が成立する。

$$(R - \lambda_i I) a_i = 0 \quad (11)$$

$$w_i = a_i / \lambda_i \quad (12)$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = n \quad (13)$$

(11)式から明らかに、 λ_i と a_i は相関係数行列 R の固有値、固有値ベクトルになる。(11)式と(12)式から(7)式の係数行列 w が決定されると、(7)式左から w の逆行列を乗ずることによって次式が得られる。

$$Z = w^{-1} G \quad (14)$$

(14)式は観測所間の月降水量を同時に模擬発生させるモデル式となる。

4 解析例と結果

以上述べた2つのモデル式を比較検討した結果を示す。採甲観測所はFig. 1に示す9地点である。モデル式1では基幹観測所として旭川を採用した。衛星観測所数 $n=8$ 、標本数 $N=20$ (1952-1971)である。モデル式2では観測所数 $n=9$ 、標本数 $N=20$ である。両モデルとも模擬発生は80年間でこれは旭川の標本数に等しい。

正規変換型は両モデルとも平方根変換で統一して係数

行列を算出し、模擬発生では(1)式の e の項と(14)式の G の項にガンマ分布型⁽⁴⁾の乱数を発生させた。この分布型は次式で与えられる。

$$\xi = \frac{2}{\gamma} \left(1 + \frac{\gamma \eta}{6} - \frac{\gamma^2}{36} \right)^3 - \frac{2}{\gamma} \quad (15)$$

既往月標本数から(5)式と(7)式の e と G について各行毎の歪度を(15)式の γ に代入してガンマ分布型乱数を発生させた。

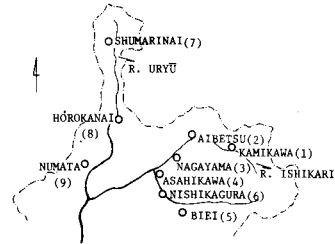


Fig. 1 Location of Selected Basin and Stations

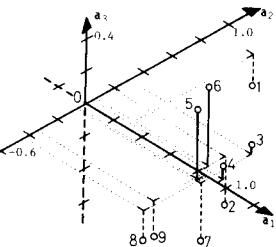
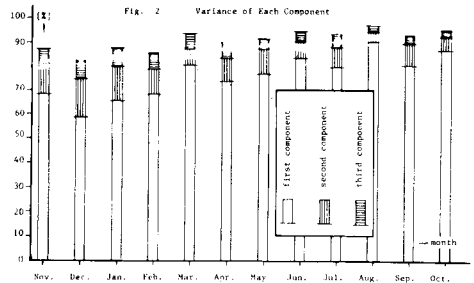


Fig. 3A Distribution of Three Eigen Vectors (January)

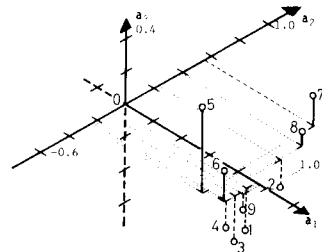


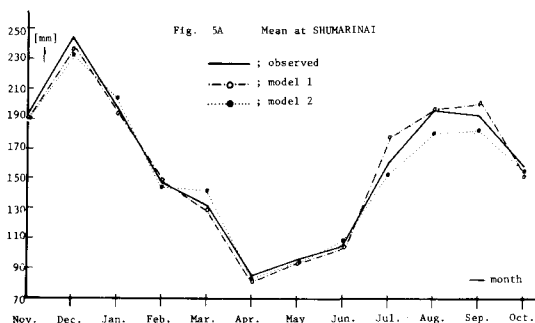
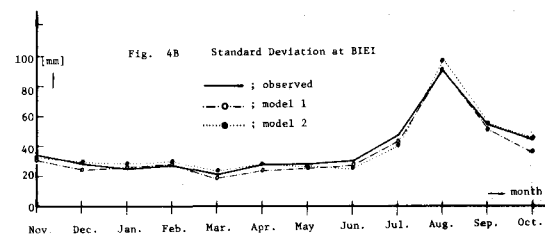
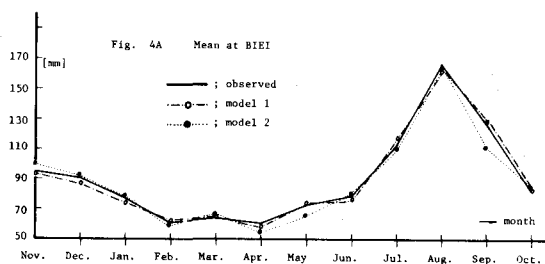
Fig. 3B Distribution of Three Eigen Vectors (July)

Fig. 2 は(13)式の性質に基づいて、各合成変量の全変動に対する割合を示したものである。この図は降水事象の季節変動を示すものである。第1合成変量の全変動に対する割合は冬期の場合には小さく、夏期の場合は大きくなっている。又第2合成変量については冬期の場合、比較的大きい値をもつ。

このことは冬期の降雪は局所変動が著しく、又夏期の降雨分布は一様であることと符合する。一方第3合成変量まででどの月においても全変動の90%近くを説明しているので、(14)式の係数行列の寄与の割合を定量的に把握できる。Fig. 3は(11)式の固有値ベクトルを3次元空間で示したものである。この図の番号はFig. 1の観測所番号と対応する。この図は月降水量の地域分布特性の相異を把握するのに有効である。すなわち、9個の観測所は同じ降水特性を有する小グループに分けられる。1月では(1、2)、(3、4、6)、(5)、(7、8、9)の観測所群、7月では(1、3、4、9)(2)、(5、6)、(7、8)の観測所群に分けられることを示している。特に雨龍川流域に属する観測所が他の観測所の降水特性と異質である点は興味深い。

Fig. 4からFig. 7までは2つのモデル式によって得られたシミュレート値を実測値と対比して掲げたものである。その結果、2つのモデル式によるシミュレート値に有意な差は見られなかった。

以上いくつかの結果を要約してみると

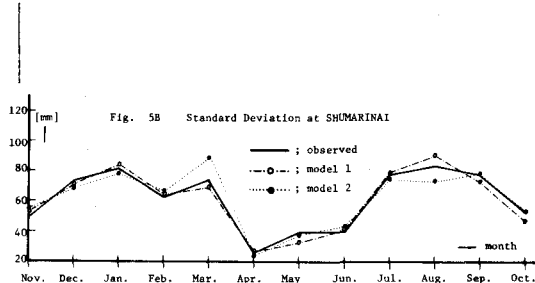


(1) モデル式 1では基幹観測所の月降水量系列(旭川の80年間)が(1)式のXの項に使われている点ではモデル式 2に比べて不確定要素が1個少なくなっており、モデル式 1による模擬発生の方が実測値をよく対応している。しかし、実際問題として長期間にわたって観測値が完備している地点がなかったりあるいは基幹観測所が持っているデータ期間より長い期間にわたって水文量を模擬発生させる必要が生ずる場合には、モデル式 2が有効な手段となる。

(2) 前報では特に夏期の降雨期において雨龍川流域の観測所で、実測値とシミュレート値に幾分差がみられた。本年度は前述したようにモデル式 1を修正し、さらにモデル式 2を導入したが、Fig. 5 Aと5 Bに示されるように顕著には改善されなかった。その原因として夏期の降雨は年毎に変動が著しいことが考えられるので、特に夏期の降水量の模擬発生には大きさの層別化を行なう必要があると考えられる。

模擬発生の手段としては、前報で示したように最適な正規変換型を選択するのはかなり手数がかかるので、本報告で述べたように正規変換型を統一して、従来の正規乱数のかわりに尖度を考慮したガンマ分布型の乱数の発生も実際の適用には有効である。

(3) 本報告で提案した2つのモデル式に基本的には



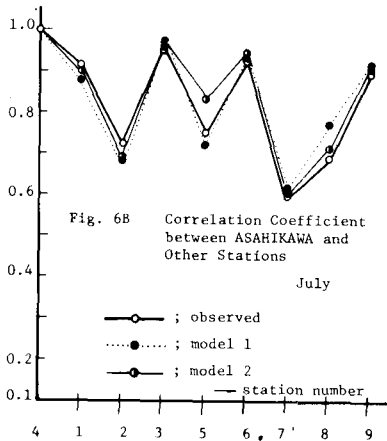
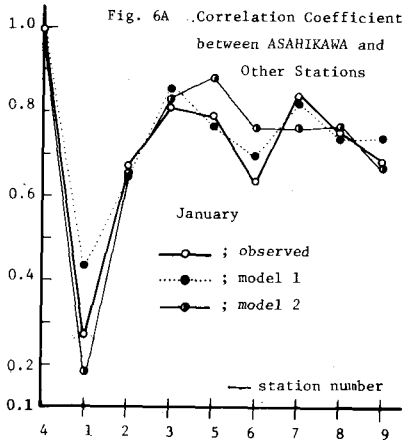
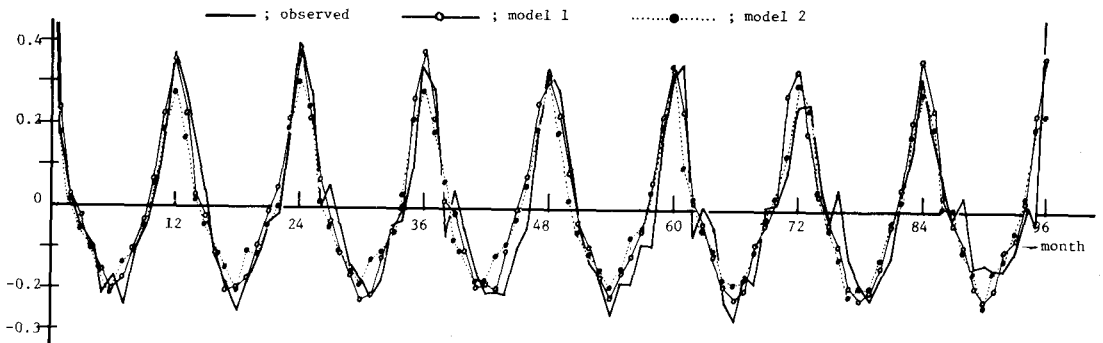


Fig. 7A Correlogram at BIEI



(4)式と(11)式で示されるように、対称行列の固有値、固有値ベクトルを算定することに帰着される。モデル式 2では、ベクトルの直交性を導入することによって降水事象の空間分布特性が地域毎に異質であることが客観的に説明された。一方モデル式 1では、(1)式の係数行列 B の列ベクトルは(4)式の固有値ベクトルに一致するから、やはり互いに直交している。この事実から、モデル式 1における B の成分はモデル式 2と同様に、降水事象の地域分布の相異を説明する指標となる。

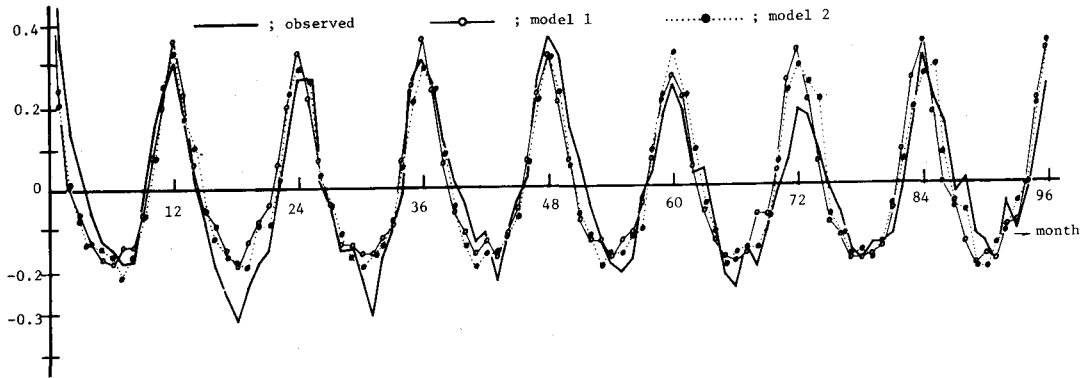
5 おわりに

本報告では降水量時系列の模擬発生上必要と思われる2つのシミュレーションモデルを提案し、比較検討してきた。その結果、2つのモデル式は本質的には差が認められないので、実際の適用にあたっては、観測値の完備の度合を考慮しながら、目的に応じて2つのモデル式を使いわけることが可能である。

最後にこの研究に際して指導して下さいました山岡 勲教授ならびに藤田 陸博助教授に深く感謝いたします。

Fig. 7B

Correlogram at SHUMARINAI



参 考 文 献

- (1) 星：「マトリックス法による月降水量のシミュレーション」、土木学会北海道支部研究発表論文集，第28号，昭和47年2月
- (2) 星，風間：「降水量の流域特性とシミュレーションについて」，第27回土木学会年次講演会概要集，(Ⅱ)，昭和47年
- (3) 星，山岡：「降水量時系列を考慮した多地点月流量シミュレーションについて」，第16回水理講演会講演集，土木学会，昭和47年
- (4) N. C. Matalas：「*Mathematical Assessment of Synthetic Hydrology*」，*Water Resources Research*, Vol 3, No 4, 1967