土木学会北海道支部　研究発表論文集　昭和47年度

利水制御のシステム・モデルについて

正員　小　森　保　数＊

要　旨

今日、多方面より水資源の開発・管理および利水の効率化が要求されている。管理・利水の効率化を考える上において、流域を一つのシステムとして扱う必要があるが、この問題は降雨入力の不確定性、対象の規模の大きさ、経済的な考察を要することから、統一的に扱った例は少ない。

ここでは、利水制御のためのシステム・モデルを示しその解析法について検討する。

§1　概　説

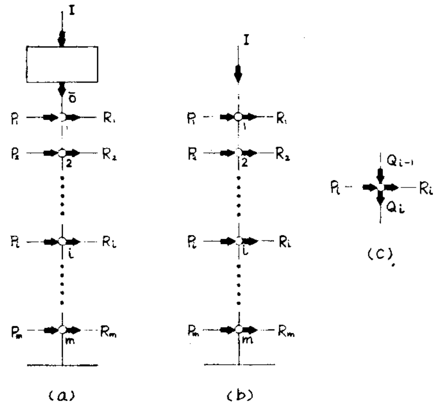
我が国における水資源の特性は、諸外国に比して期間的な変動が大きいことにある。年間降水量は全国平均で1,818㎜である。これは諸外国ではトップクラスであるにもかかわらず、変動の巾は最大流量と最小流量の比として与えられる河状係数で表わすと石狩川において205天塩川は3,068である。利用率の上では全流出量の20%[1]以下であり、他は洪水となって無駄に捨てられている。すなわち、日本における水資源の利用がいかに困難かを示しているといえる。したがって、この水資源を有効に利用するためには、ダムなどの利水施設を用いて流況を平滑化し、さらに渇水時には各利水地点での調整が必要となる。

このようなダムおよび取水施設での利水制御系を1つのシステムと考えることが出来る。システムの入力としての降雨流出、環元水、蒸散などの損失の予測については未だ非常に困難な問題を残してはいるが、一つのモデルを作成しておくことは今後の利水計画の研究の指針を与え、問題のありかを明確にするという意味で重要であると考えられる。このようなシステムモデルによって単に水の配分計画に留まらず、システムに改変が加えられた場合の解析や、最大可能利水量などの解析を行なうる。

＊　北海道開発局河川研究室　主任研究員

§2　システルモデルの記述

利水制御システムのモデルを、図－1のように与える。



図－1　システムの模式図

議論の展開を容易にするために、ここではダムを有する単水系を考える。

記号は以下のように与える。

I：ダムへの流入量
S：ダムの貯水量
O：ダムからの放水量
P：河道への流入量（支川流入、環元水、河道内での損失（蒸散、浸透））
R：利水量又は取水量（農業用水、発電用水、工業用水、上水その他）
Q：河道内流量
H：水位

基準点（評価地点）を図の1、2……i……mのように与える。P、Rは基準点での流入量、利水量である。取水量Rの目標値を$\bar{R}$、河道内流量の目標値、即ち維持流量をMとする。O、Rは人為的に制御可能な量、すなわち制御量である。I、Pは外乱であり、何らかの方法で前もって予測され、システムに与えられる量である。Qは制御量と外乱によって決まる量であり、状態量とよ

ばれる。システムには種々の制約（物理的、社会的な）が存在する。我々の目的はそれらの制約範囲内で外乱 I、Pに対して制御量 O、Rを制約して、R、Qをそれぞれの目標値に近づけしめ、全体としての利益を最大にすることにある。

さて、制御の期間を T ケに分割し、1分割の時間を△Tとする。k番目の分割の期末におけるダムの貯水量を S_k とすれば、

$$S_k = S_{k-1} + (I_k - O_k)\triangle T \qquad (1)$$

ここに、I、Oは各分割における流入、流出の平均である。

(1)を書きなおすと、

$$S_k = S_o + \sum_{t=1}^{k}(I_t - O_t)\triangle T \qquad (2)$$

ここに　S_o　：初期貯水量

ダムの貯水量 Sには利水容量 Cを越えることは出来ない。すなわち

$$0 \leqq S_k \leqq C \qquad (3)$$

(2)より

$$0 \leqq S_o + \sum_{t=1}^{k}(I_k - O_k)\triangle T \leqq C \qquad k=1、2\cdots\cdots T \qquad (4)$$

これがダムにおける制約条件になる。

評価地点 i （$i=1\sim m$）の時間帯 kにおける流量 $Q_{i,k}$は

$$Q_{i,k} = O_k + \sum_{j=1}^{i} P_{j,k} - \sum_{j=1}^{i} R_{j,k} \qquad (5)$$

Q_{ik}には負になりえないから、

$$O_k + \sum_{j=1}^{i} P_{j,k} - \sum_{j=1}^{i} R_{j,k} \geqq 0 \qquad i=1、2\cdots\cdots m,\ k=1、2\cdots\cdots T \qquad (6)$$

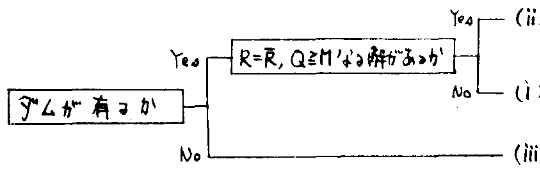
すなわち、(6)式が河道の各点において成立しなくてはならない。取水量 $R_{i,k}$ はその目標値 $\overline{R}_{i,k}$より大なる必要はない。したがって、取水量 $R_{i,k}$ は次式でしばられる。

$$0 \leqq R_{i,k} \leqq \overline{R}_{i,k} \qquad i=1.2\cdots\cdots m,\ k=1.2\cdots\cdots T \qquad (7)$$

これらがシステムの制約条件になる。これらの条件の下に後に与える目標関数（または評価関数）を最適化（最小化または最大化）する解が我々の求めるものである。

目的関数は利益の大きさを示すように与えられているものとして、ここでは最大値問題として考える。目的関数の詳細についての議論は次節で与えることにして、ここでは φと与えておく。

さて、これまでは一般的なシステムの条件を考えてきたが特殊な場合にはこれらの条件はもっと簡単に表わすことができる。すなわち、単水系の場合は考えるべげ制御量によってつぎの3つに分類出来る。図－2



図－2　定式の分類

(I)	制御量	OおよびR	一般的な場合
(II)	〃	Oのみ	水の豊富な場合
(III)	〃	Rのみ	ダムのない場合

(I)　制御量が Oおよび Rである場合

$R_{i,k} = \overline{R}_{i,k}$,　$Q_{i,k} \geqq M_{i,k}$　$i=1,2\cdots m$、$k=1,2\cdots T$が同時に満されない場合であって、この場合の最適値問題は上述の式をまとめて(4)、(6)、(7)より、

$$\sum_{t=1}^{k} O_t \leqq S_o/\triangle T + \sum_{t=1}^{k} I_t \qquad k=1,2\cdots T$$

$$-\sum_{t=1}^{k} O_t \leqq (C - S_o)/\triangle T - \sum_{t=1}^{k} I_t \qquad k=1,2\cdots T$$

$$-O_k + \sum_{j=1}^{i} R_{j,k} \leqq \sum_{j=1}^{i} P_{j,k} \qquad k=1,2\cdots T,\ i=1,2\cdots m \qquad (8)$$

$$0 \leqq P_{i,k} \leqq \overline{R}_{i,k} \qquad k=1,2\cdots T,\ i=1,2\cdots m$$

$$O_k \geqq 0 \qquad k=1,2\cdots T$$

の下に　$\varphi(O、R) \to Max$

(II)　制御量が Oのみである場合

外乱 I、Pの分布、量によっては $R=\overline{R}$、$O \geqq M$であるような制御が存在する。このような解は無数にあるわけであるが、そのうち1つが得られればよいわけではなく我々は残った流量を期間的になるべく平滑化された流況として放流したい。この場合は、$R_{i,k} = \overline{R}_{i,k}$に固定して考えればよく、制御量は Oのみである。

(8)を参照して、この場合の最適値問題は、

$$\sum_{t=1}^{k} O_t \leqq S_o / \triangle T + \sum_{t=1}^{k} I_t \qquad k=1,2\cdots T$$

$$-\sum_{t=1}^{k} O_t \leqq (C - S_o) / \triangle T - \sum_{t=1}^{k} I_t \qquad k=1,2\cdots T$$

$$O_k \geqq \sum_{j=1}^{i} (R_{j,k} - P_{j,k}) \qquad \begin{array}{l} k=1,2\cdots T \\ i=1,2\cdots m \end{array} \qquad (9)$$

$$O_k \geqq 0 \qquad k=1,2\cdots T$$

の下に

$$\varphi(O) \rightarrow Max$$

(Ⅲ) 制御量が R のみの場合

上流にダムがない場合には、利水の調整は利水量 R の間で行なわれなければならない。河川流量が十分である場合には当然、$R_{i,k} = \bar{R}_{i,k}$, $Q_{ik} \geqq M_{i,k}$ なる解が最適解となる。図－1 b に模式図を示す。

(8)を参照して

$$\sum_{j=1}^{i} \bar{R}_{j,k} \leqq I_k + \sum_{j=1}^{i} P_{j,k} \qquad \begin{array}{l} k=1,2\cdots T \\ i=1,2\cdots m \end{array}$$

$$R_{i,k} \leqq R_{i,k} \qquad R_{i,k} \geqq 0 \qquad \begin{array}{l} k=1,2\cdots T \\ i=1,2\cdots m \end{array} \qquad (10)$$

の下に　$\varphi(R) \rightarrow Max$

上述した3つのケースはすべて(Ⅰ)のケースに含まれるものであるが、未知数の多少と目的関数の形によって解法が異なる場合を考えて分類したものである。以下では一般的な形としてのケース(Ⅰ)について述べる。

一般の利水制御システムは単水系であるとは考えられないが、上述の基本的な考え方から容易に敷衍することが出来るであろう。

§3　目的関数

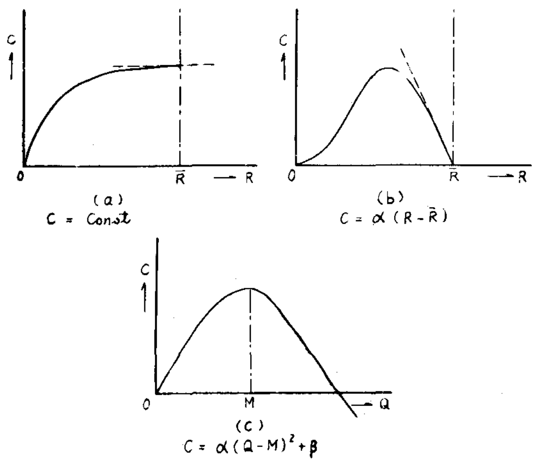
前節では目的関数の詳細についての説明を省き、制約条件についてのみ述べてきた。一般に目的関数は、それぞれのシステム、さらに同一システム内でも基準点により異なる。これは、システム制御の効果をどのように判断するかという問題であり、時代により　社会によって異なるものであり、かなり主観的な面をもっている。したがって、一般論として目的関数の具体的なものを示すには、システムの目的がはっきり固定され、A 点での Q_1 の水の評価と B 点で取水される Q_2 という水の評価が同一の基準で比較されなければならない。例えば、維持用水1 m³の効果と農業用水1 m³の効果との比較が出来なければならない。これはシステムをどのように記述し、どんな解法をとるにしても同様である。

さて我々が目的を同延的に比較できる一つの客観的な基準をもったとする。ここではこれを水の単位量が生む付加価値として考える。ある点での1 m³の水がどれだけの利益を生むか、あるいは価値があるということは、水の使途によって異なる。さらに水量、水質、水頭、季節によって異なるであろう。

基準点 i の時間 k における取水量 $R_{i,j}$ によって得られる利益を E とする。今取水を $\triangle R_{i,j}$ だけ増した時の利益が $\triangle E$ だけ増すとする。

$$C_{i,k}(R_{i,k}) = \lim_{\triangle R_{i,k} \to 0} \frac{\triangle E}{\triangle R_{i,k}} = \frac{dE}{dR_{i,k}} \qquad (11)$$

$C_{i,k}$ は単位取水量によって得られる付加価値を表わす。維持流量に対する単位水量当りの付加価値 D_{ik} (Q_{ik}) も同様に定義する。これは取水量 $R_{i,k}$ および $Q_{i,k}$ の関数であって図－3に示すような曲線になるであろう。維持流量 Q の付加価値 C は目標値で最大になり



図－3　付加価値曲線とその近似曲線

それ以上になれば漸減しついには、負の付加価値となる。これは、流量が大きくなればかえって有害になることに

相当する。これは(c)に当る発電用水、農水、工水、上水なども これらの曲線で近似出来るであろう。これらの曲線は目標値の近傍で高々２次の曲線によって近似しうるものと考えてよいだろう。（図中——）これをつぎのように表わす。

$$C_{i,k}(R)=\alpha_{i,k}R^2+\beta_{i,k}R+\gamma_{i,k}$$
$$D_{i,k}(Q)=\alpha'_{i,k}Q^2+\beta_{i,k}Q+\gamma_{i,k} \tag{12}$$

系全体での利益は、

$$B=\sum_{i,k}\left(\int_0^{R_{i,k}}C_{i,k}(R)\,dR+\int_0^{Q_{i,k}}D_{i,k}(Q)\,dQ\right) \tag{13}$$

我々の目的は B の最大値を求めることである。解が目標値の近傍にある場合には (12) 式を用いることが出来る。(13) に (12) を代入し積分し、定数項を省略し係数を適当に書きなおすと目的関数 φ はつぎのようになる。

$$\varphi=\sum_{i,k}\Big(\alpha_{i,k}R^3_{i,k}+\beta_{i,k}R^2_{i,k}+\gamma_{i,k}R_{i,k}+\alpha'_{i,k}Q^3_{i,k}+\beta'_{i,k}Q^2_{i,k}+\gamma'_{i,k}Q_{i,k}\Big) \tag{14}$$

$Q_{i,k}$ は(5)によって与えられる R と O の関数であるから、φ は R は O の関数となる。前節での(II)、(III)のケースも (14) の退化した形として求められる。

§4 解 法

システムモデルを前述のような非線型計画の問題として書き表わした場合には、つねに変量の多さによる解の困難さが生ずる。いま、時分割を10とし、評価点を10とすれば変数は、10×（10+1）=100 となる。一般にその記憶容量は変量の２乗に比例するとすれば、ここだけで１万以上の記憶容量を要し、計算時間もほぼ記憶容量に比例する。したがって解法は、個々の定式に応じて最もよいものを選択していかなければならない。さらにシステムを分割し、計算量を軽減するなどの考慮しなければならない。

ここでは、*Varaiya* による非線計画法の分解原理を摘要して、システムを分割するため、(8)式のベクトル表示を与えておく。変数 x をつぎのようにおく。

$$\mathrm{x}_k=(O_k,\ \lambda_k\ \lambda_{k+t},\ \mathrm{R}_{1,k},\ \mathrm{R}_{m,k}\cdots\cdots\mathrm{R}_{m,k})\quad k=1,\ 2\cdots\cdots T$$

ここに、λ_k，λ_{k+t}，は、(8)式の第１式、２式のそれぞれ k 番目の式に対応するスラック変数である。

(8)の第一、二式は、

$$A_1\mathrm{x}_1+A_2\mathrm{x}_2+\cdots\cdots\cdots\cdots+A_t\mathrm{x}_t=b \tag{15}$$

$$A_R=\begin{array}{r}\\ \\ \\ k\text{行}\\ \\ \\ \\ \\ \\ k+\\ T\text{行}\\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix}0&0&0&\\ \vdots&\vdots&\vdots&\\ 0&0&\vdots&\\ 1&1&\vdots&\\ \vdots&0&\vdots&\\ 1&\vdots&\vdots&0\\ 0&\vdots&\vdots&\\ \vdots&\vdots&\vdots&\\ 0&\vdots&0&\\ -1&\vdots&1&\\ \vdots&\vdots&0&\\ \vdots&\vdots&\vdots&\\ -1&0&0&\end{pmatrix}\qquad \mathrm{b}=\begin{pmatrix}So/\triangle T+I_1\\ So/\triangle T+I_1+I_2\\ \vdots\\ So/\triangle T+\sum_{j=1}^{t}I_j\\ (C-So)/\triangle T\quad I_1\\ (C-So)/\triangle T-I_1-I_2\\ \vdots\\ (C-So)/\triangle T-\sum_{j=1}^{t}I_j\end{pmatrix}$$

第三式より

$$G_R\,\mathrm{x}_R\ \leqq\ \mathrm{h}_k$$

$$G_k=\begin{pmatrix}-1\,0\,0\,1&&&\\ -1\,0\,0\,1\,1\,0&&&\\ \vdots\quad\vdots&&&\\ -1\,0\,0\,1\,1&\cdots&&1\\ &1&&\\ &&1\,0&\\ 0&&\ddots&\\ &&0&1\end{pmatrix}\qquad \mathrm{h}_k=\begin{pmatrix}P_{i,k}\\ P_{i,k}+P_{2k}\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^{m}P_{j,k}\\ R_{1,k}\\ R_{2,k}\\ \vdots\\ R_{m,k}\end{pmatrix}$$

Vavaiya によれば大規模静的最適化問題がつぎのように書ける時、小規模に分割されたサブシステムの最適化をくりかえすことにより、大規模静的最適化問題は解かれることを示した。

すなわち、

$$A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \cdots\cdots + A_{1,m}x_n = b_1$$

$$A_{m_1,1}x_1 + A_{m,2}x_2 + \cdots + A_{m,n}x_n = b_m$$

$$x_1 \quad T_1,\ x_2 \in T_2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ x_n \in T_n \qquad 17$$

の下に

$$\varphi = \varphi_1(x_1) + \varphi_2(x_2) + \cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\varphi_n(x_n) \to Max$$

これはm個の結合束縛条件とnケの独立な利約条件および目的関数がN個の独立な形に分離されることが必要である。

我々の問題は上式において$m=1$、$n=T$の場合に相当する。すなわち、(15)、(16)より

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \cdots\cdots\cdots + A_Tx_T = b$$
$$G_kx_k \leqq x_k \qquad k=1.2\cdots T \quad (18)$$
$$x_k \geqq 0 \qquad k=1.2\cdots T$$

目的関数は各時点、場所について分離形であるから、

$$\varphi = \varphi_1(x_1) + \varphi_2(x_2) + \cdots\cdots\cdots$$
$$+\varphi_T(x_T) \to Max$$

このような問題はつぎのようなアルゴリズムによって解を得ることが出来る。

<サブシステム・レベル>

$G_kx_k \leqq h_k,\quad x_k \geqq 0$の下に

$$\varphi_k(x_k) + \langle q_k,\ x_k\rangle \to Max$$

を$k=1,\ 2\cdots\cdots T$について解き、$x_k(q_k)$を求める。q_kの初期値は任意である。

<センター・レベル>

$$e(q) = \sum_{k=1}^{T} A_k x_k(q_k) - b$$
$$k=1,\ 2\cdots T \quad (20)$$

を計算し、$e \neq 0$であれば

$$\frac{dq_k}{dt} = -A'_k e(q) \qquad k=1,\ 2\cdots T \quad (21)$$

ここに$'$に転置を示す。

によりqを変更しサブシステム・レベルに戻る。$e=0$であれば計算停止である。

ここでtは計算回数を示し、差分近似すると

$$q(t+1) = -A'_k e(q^{(t)}) \triangle t + q^{(t)}$$

となる。$\triangle t$は初期には大きい値をとって収束性をよくし、くりかえしを進めるにしたがって小さくする。

D. P. (*Dynamic Programming*) などを用いることが出来る。

むすび

水資源の効率的利用のための制御システムについて、一つのモデルを例示し、その解法について検討した。このようなシステムは一般に大規模なシステムになり、多変数による解の困難性が生ずる。ここでは、*Vavaiya*による分解原理を用いてシステムの分割法を検討した。

参考文献

(1) 小田代 弘：道央地区の広域利水、講習会テキスト 47. 11. 土木学会道支部、土質工学会道支部

(2) 児玉 慎三：分割原理の最適制御への応用、計測と制御、43．2、*Vol* 7, No. 2