土木学会北海道支部　研究発表論文集　昭和47年度

除雪ルート探索に関する一考察

正員 ○ 桝　谷　有　三＊
〃　　加　来　照　俊＊＊

1. まえがき

最近、自動車交通の発達によって冬期積雪のみられる都市においても、自動車による輸送需要が増大し、特に都市内街路においては夏期と同じ様な交通を呈している。したがって、一時的にせよ積雪によって、所要時間の増加、あるいは、走行速度が減少することは街路網全体として、交通のまひ、混雑を引きおこす。しかしながら、現在まで除雪の経済効果推定、除雪機械の開発などについての研究はなされているが、効率的な除雪方法などについてはあまり研究されていない。本稿は、これらの事を考慮して、都市内街路が降雪によって所要時間が増加したとき、どのようなルートを除雪車が走行すれば街路網全体の交通混雑・交通まひを最小にくいとめることができるかという点に注目して、街路網をグラフにモデル化することによってオペレーショズ・リサーチで発展しているグラフ理論（*Graph Theory*）、分岐限界法（*Branch and Bound Method*）を用いて除雪車の最適ルート探索を試みた。なお、本稿は、上述の方法が実際の問題に適用するための第一段階として簡単なモデルのみについて検討したものである。

2. 除雪車走行ルート探索

(1)　ルート探索について[1)2)]

いま、ある与えられた街路網を n 個のノードと m 個のアーク（無向グラフにおいてリンクという）をもつ有向グラフ（*Digraph*）（以下グラフという）G にモデル化して、このグラフについて考える。

$$G = (N, A) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

ここで、N はノードの集合で、また、A はアークの集合で(2), (3)式で表わされる。

$$N = \{ n_i \mid i = 1, 2, \cdots\cdots, n \} \cdots\cdots \quad (2)、$$

$$A = \{ a_i \mid i = 1, 2, \cdots\cdots, m \} \cdots\cdots \quad (3)$$

このグラフを1台の除雪車ですべてのアークを除雪すると考える。このとき、あるターミナル（この場合、n 個のノードのうちのどれかとする）から出発した除雪車がすべてのアークを重複することなく走行可能なルート（グラフ理論でのべられているオイラー線(*Euler Line*)をいい、また、有向グラフ G はオイラー有向グラフ（*Eulerian Digraph*）である）は数多く求められる。いまノードとアークの接続関係を示す接続行例（*Incidence Matrix*）をDと表わす。

$$D = \{ e_{ij} \} = \begin{array}{c|c} {\scriptstyle ノード \backslash アーク} & \begin{matrix} 1 & 2 & \cdots\cdots & m \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{matrix} & \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & \cdots\cdots & e_{1m} \\ e_{21} & e_{22} & \cdots\cdots & e_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e_{n1} & e_{n2} & \cdots\cdots & e_{nm} \end{bmatrix} \end{array} \cdots (4)$$

ここで

$$e_{ij} = \begin{cases} 1 ：アーク\ j\ がノード\ i\ から出ているとき \\ -1 ：アーク\ j\ がノード\ i\ に入っているとき \\ 0 ：アーク\ j\ がノード\ i\ に接続していないとき \end{cases}$$

とする。また、行列Dは各列にそれぞれ1個の1、-1を含んでいる。

除雪車があるノード k より出発するとき、最初に走行可能なアークはノード k から出ているアーク、すなわち行列Dの行（*Row*）k において要素（*Element*）1（$e_{kj} = 1$、$j = 1, 2, \cdots p$）をもつアークである。このとき、行 k に p（$< m$）個の1があれば第1段階において p 通りの走行が可能である。いま、除雪車が p 通りの一つのアーク l（$e_{kl} = 1$）を走行したとき、行列Dにおける列（*Column*）l において要素 -1（$e_{kl} \fallingdotseq -1$）をもつノード h に到達する。次の段階では、前の段階で走行したアークに対応する行列Dにおける列 l をすべて0に変換した行例をD1として、除雪車はさらに行列D1の行 h

＊北海道大学工学部　助手
＊＊　　〃　　　　教授

において要素1をもつアークを求めて走行する。以下同様に、前の段階において走行したアークに対応する列を0に変換した行列を求めて、順次除雪車の走行ルートを探索する。このように、順除雪車のルートは数多く考えられ、さらにターミナルを固定しないで考えた場合には莫大なルートが求められる。

(2) 最適ルートへの接近

(1)において求められる数多くのルートのうち、いずれのルートが求める最適なものであるかについて求める。

除雪によって街路網におけるおのおのアークは走行所要時間の増加(または、走行速度の減少)をきたし、その結果、街路網全体としての交通のまひ 混雑を引きおこす。したがって、除雪によってこのような状態を早急に解消しなければならない。このように考えた場合、本稿においては道路交通の効率化を主たる評価基準として遅れを採用し、街路網における全車両の遅れが最小になるように除雪車の最適ルートを探策した。

除雪後まったく除雪されていない時には、街路網全体として次式で示される遅れ(L_0)を生じる。

$$L_0 = \sum_{j=1}^{m} X_j \times (t'_j - t_j) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (5)$$

ここで、

L_0 :(台・分)

t_j :アーク j の除雪後(降雪前)の所要時間(分)

t'_j :アーク j の除雪前(降雪後)の所要時間(分)

X_j :アーク j に存在する車の台数(台)

とする。

最初に、あるアーク l が除雪されたときに遅れは

$$L_1 = \sum_{j=1}^{m} X_j \times (t'_j - t_j) \quad (j \neq l) \cdots\cdots (6)$$

となり、さらに、t 番目にあるアークが除雪されたときの街路網全体としての遅れは次式で示される。

$$L_t = \sum_{j \in A_t} X_j \times (t'_j - t_j) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

ここで、A_t は t 番目までに除雪されていないアークの集合とする。また、すべてのアークが除雪されたときには、

$$L_m = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (8)$$

となる。

結局、すべてのアークが除雪されるまでには街路網全体としての総遅れ L は

$$L = L_0 + \sum_{t=1}^{m} L_t \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (9)$$

となり、最適ルート探索においては次に示される式を目的関数とした。

$$T(\omega) = \sum_{t=1}^{\omega} L_t \quad (\omega = 1, 2, \cdots m) \cdots\cdots\cdots \quad (10)$$

前述したように、可能なルートは数多くありそれらをすべて列挙して、それぞれについて(9)式に示す値を求めて、その中で最適なルートを探索する方法は、街路網が大きくなれば実際上不可能に近くなる。しかし、この問題は、(10)式を目的関数とする多段決定過程としての組合せ的な最適問題として把えることができる。したがって、この解析は次節でのべる分岐限界法(以下 $B-B$ 法という)を用いて求めた。

3. 分岐限界法を用いた解法[3)4)5)6)]

(1) $B-B$ 法について

$B-B$ 法は、よく知られているように、種々の計画、設計の問題に用いられている。また、この手法を用いる場合には、目的関数に対する条件はなく、種々の形をとることができる。しかし、ただ一つの条件として必ず有限な解をもつことである。この条件を満たしているならば、他の計算法が適用できないような場合に対しても最適解を求めることができる便利な方法である。

次に、この手法の基本的原理についてのべる。いま、ある目的関数を最小(最大でも同様)にする問題を考えると、目的関数の定義されたすべての状態の集合を、ある基準(本稿においては、除雪車があるノードに到達したとき、次に走行可能なアークは接続行列においてそのノードに対応する行の要素が1をもつものであるということ)に従って、部分集合の直和に分解し(分岐(*Branch*)させること)、各部分集合に含まれる状態での目的関数の値の下界(*Lower Bowud*)を求める。最小下界(目的関数(10)式の値が最小なもの)をもつ部分集合に対して、上と同様に、ある基準のもとに、その部分集合の直和に分解し、各部分集合での下界を求める。以後同様にして、1個の状態を含む部分集合で、しかも最小下界を有するものが求める最適解を与える。下界値という概念は膨大な計算量を減少せしめる有効な手段である。また、分岐の方法には次の2通りがあり、一つはある段階までの分解されていないすべての部分集合を考慮して、その中でもっとも下界値が最小なものに対して次の分岐を行なう方法で、他の一つは、前段階の分解で得られた部分集合のみを考慮して、その中でもっとも下界値が最小なものに対して次の分岐を行なう方法である。

(2) $B-B$ 法を用いた解法

次に、前節で示した(10)式を目的関数として、除雪車最適ルート探索を行なった。

計算は、除雪車があるノード（ターミナル）から出発するところから始め、各決定段階においてアークの順序集合（除雪車の走行ルートを表わす）を最終的に最適解が得られるよう、次に走行可能なアークを加えていく変換操作を行なっていく。

本問題を多投決定過程としてとらえたとき、いま（$k-1$）段階目の変換操作がおこなわれたあとの、ある一つのアークの順序集合をR_p^k、その集合族をR^kとする。したがって

$$R^k = \bigcup_p R_p^k \quad \cdots\cdots (11)$$

下界値の概念を用いて集合族R^kから部分集合族R_0^kへの変換が定まり、その部分集合族R_0^kに対して分岐が行なわれる。

$$R_0^k \subset R^k \quad \cdots\cdots (12)$$

$$R_0^k = \left[R_0^k \mid \min_p \{ T(\omega)(R_p^k) \} \right] \quad \cdots\cdots (13)$$

このようにして、$B-B$法による計算が行なわれていくが、そのとき、R^kは次の基本状態方程式(14)式によって記述される。

$$R^k = \bigcup_{R_r^{k-1} \subset R_0^{k-1}} \left\{ \bigcup_{\substack{a_i \in A_i \\ a_i \notin R_i^{k-1}}} (R_i^{k-1} + \{a_i\}) \right\}$$

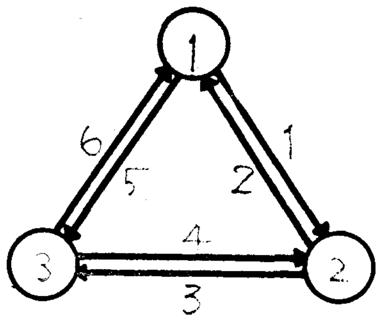
$$\cup \left[R^{k-1} - R_0^{k-1} \right] \quad \cdots\cdots (14)$$

ここで、A_iは順序集合R_i^{k-1}が次に走行可能なアークの集合で、a_iはその元（アークを示す）である。

(14)式において、右辺第一項は、最小下界をもつ順序集合R_i^{k-1}にアークa_iを加える変換操作で、a_i^{k-1}が次に走行可能なすべてについて行なう。また、第二項は、集合族R^{k-1}から最小下界値をもつ部分集合族R_0^{k-1}を取除いた集合族である。上式はR^kとR^{k-1}との繰返し方程式であり、この繰り返しによって最適ルートを探索した。

4 計算結果

図－1に示す簡単な街路網について行なう。この街路網上のアークに存在する車の台数（X_j）、降雪前のアークの所要時間（t_j）、降雪後のアークの所要時間は（t_j'）は、それぞれ表－1、表－2に示した。



図－1　街　路　図

表－1　アーク存在台数（台）

	1	2	3	4	5	6
X_j	100	100	300	300	200	200

表－2　アーク所要時間（分）

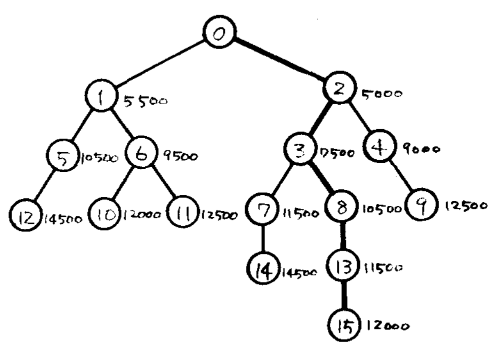
	1	2	3	4	5	6
t_j	12	12	15	15	18	18
t_j'	17	17	20	20	23	23

降雪後、まったく除雪されていない時の街路網全体の遅れL_0は

$$L_0 = \sum_{i=1}^{6} X_j \times (t_j' - t_j)$$

$$= 6{,}000 \text{ 台分} \quad \cdots\cdots (15)$$

となる。この計算例においては、ある段階までの、分岐されていないすべての順序集合を考慮して、その中で最小な下界値をもつものに対して次の分岐を行なった。その結果は、おのおの順序集合をノードと考えたトリー表現を用いて図－2に示す。図－2において、始点ノード0には可能なすべてのルートを対応させており、また



図－2　ト　リ　ー　図

各ノードの順序集合は表－3に表わす。ノードの横にかいてある数字は⑽式の値を示す。さらに各段階における集合族 R^k、および部分集合族 R_0^k を表－3におけるノード番号で表－4に表わした。以上の結果、最適ルートとしては

ノード	順序集合
1	(1)
2	(5)
3	(5. 4.)
4	(5. 6.)
5	(1. 2.)
6	(1. 3.)
7	(5. 4. 2.)
8	(5. 4. 3.)
9	(5. 6. 1.)
10	(1. 3. 4.)
11	(1. 3. 6.)
12	(1. 2. 5.)
13	(5.4. 3. 6.)
14	(5. 4. 2. 1.)
15	(5. 4. 3. 6. 1.)

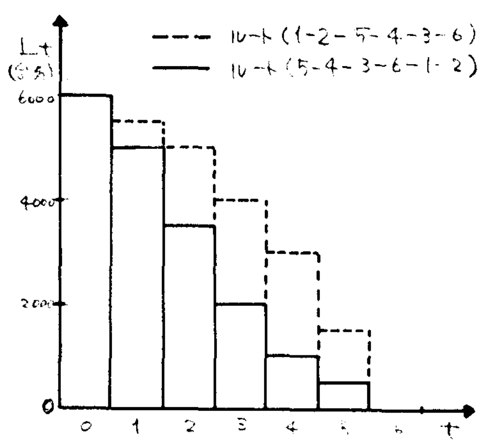
表－3　各ノードにおける順序集合

$R_0^8 =$ (5. 4. 3. 6. 1. 2.) ………………… (16)

表－4　各段階における集合族・部分集合族

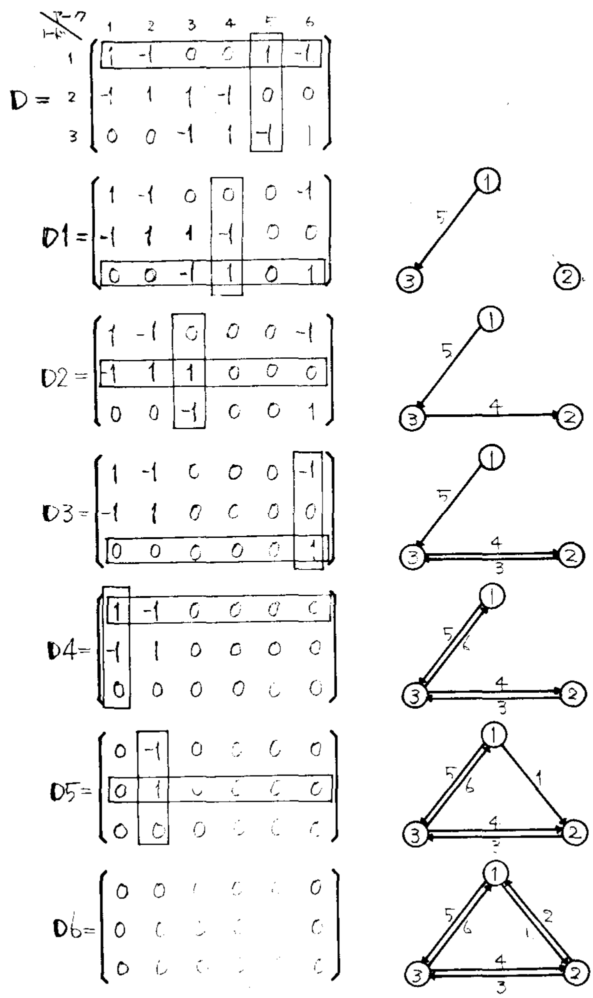
k	R^k	R_0^k
1.	1. 2.	2
2.	1. 3. 4.	1
3.	3. 4. 5. 6.	3
4.	4. 5. 6. 7. 8.	4
5.	5. 6. 7. 8. 9.	6
6.	5. 7. 8. 9. 10. 11.	5. 8.
7.	7. 9. 10. 11. 12. 13.	7. 13.
8.	9. 10. 11. 12. 14. 15.	14.

となる。また、図－3に最適ルートを走行したときと、最悪なルート（1. 2. 5. 4. 3. 6.）を走行したときの遅れの変化について図示した。



図－3　遅れの変化

なお、2(1)でのべたルート探索の方法を、最適ルートの場合について図－4に示した。



図－4　除雪車の走行ルート探索

5　あとがき

街路網をグラフにモデル化して、いままであまり考えられていなかった除雪方法について考察を行なった。街路網をグラフ、あるいはネットワークにモデル化すること、あるいは、本問題のような組合せ的最適問題において分岐限界法を用いることが有効であることがわかった。

今後、さらに次の諸点について研究を進めていく。

(1)　街路網が大きくなった時の除雪車の配置

(2)　(9)、(10)式における評価値の検討

(3)　街路除雪と交通規制・制御との関係

などである。

最後に本研究を進めるにあたり、有益なコメントをいただいた長大橋設計センター堀江清一氏（元北大工学部助手）をはじめ北大工学部交通管理研究室の皆様の多大な協力を得た。ここに、深く感謝の意を表わす。

参考文献

(1)　ハラリイ著・池田貞雄訳：グラフ理論　共立出版　1971.

(2)　小野寺力男著：グラフ理論の基礎　数学ライブラリー　6　森山出版　1968.

(3)　鍋島一郎：動的計画法　数学ライブラリー7　森山出版　1968.

(4)　*John D.C. Little・Katta G. Murty*　他：*An Algorithem for The Traveling Salesman Problem Opens. Res* 11　1963.

(5)　*E.L. Lawler・D.E. Wood*：*Branech and Bowud Method*：*A Survey Opens Res* 15　1967

(6)　飯田恭敬：最適道路網の探索法について－最適解と近似解－　第25回土木学会年次学術講演集　1969