

軸対称問題の円板要素による応力解析

正員 能 町 純 雄*

同 ○松 岡 健 一**

1. ま え が き

三次元軸対称問題や平面元力問題、平板の曲げ解析などの微分方程式の解は、積分変換およびその逆変換によってえられる。この場合一般には、二方向の無限級数を集めることになり、精度の良い解をえるためにはかなりの労力を要することとなる。この欠点を補うため、また、異方性体の解析や、箱桁等の立体解析を容易にするために、筆者らは、これまで、有限要素法的な発想にもとずき、連続体を細長い帯板要素の集合として解析する方法を発表してきた。この方法では一方向には有限箇の和として与えられ、また直交異方性体の解析も容易となる。本論文は、この手法により、軸対称問題の新しい要素を開発し、2, 3の計算例を示したものである。

2. 円板要素の定式化

軸対称応力問題における力のつり合成は、

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial Z} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial Z} + \frac{r}{\tau_{rz}} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} = 0 \quad (2)$$

ここで、 r は半径方向、 Z は厚さ方向を示す。また、 u , w をそれぞれ r , Z 方向の変位とすると、

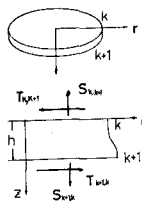
$$(\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z) = 2G \left(\frac{\partial u}{\partial r}, \frac{u}{r}, \frac{\partial w}{\partial Z} \right) + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial Z} \right) \quad (3)$$

$$\tau_{rz} = G \left(\frac{\partial u}{\partial Z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \quad (4)$$

いま図-1の円板要素 k , $k+1$ を考え、変位は厚さ方向にすべり一次変化と仮定すると、

$$u = u_k(1-\eta) + u_{k+1}\eta \quad (5)$$

$$w = w_k(1-\eta) + w_{k+1}\eta \quad (6)$$



ただし、 u_k , w_k はそれぞれ境界 k における r および Z 方向変位であり r の関数である。また $\eta = Z/h$, h は板厚である。

(1)式に(3)式を代入し、(5), (6)式を考慮して、 Z で積分し、 $Z=0$ で式を満足するように積分定数を定めると、

$$(2G+\lambda)h \left\{ L_2(u_k) \left(\eta - \frac{\eta^2}{2} \right) + L_2(u_{k+1}) \frac{\eta^2}{2} \right\} + \lambda L'_1(w) + \tau_{rz} - \lambda L'_1(w_k) - T_{k,k+1} = 0 \quad (7)$$

ここで、 $T_{k,k+1}$ は、要素 $k_1 k+1$ の k 境界に作用するせん断元巾である。 $T_{k+1,k}$ についても同様である。

(7)式に(4)式を代入し、さらに Z で0から h まで定積分して、 $T_{k,k+1}$ を求めると、

$$T_{k,k+1} = \frac{G}{h} (u_{k+1} - u_k) + \frac{2u+\lambda}{6} h L_2(2u_k + u_{k+1}) + \frac{G}{2} L'_1(w_k + w_{k+1}) + \frac{\lambda}{2} L'_1(w_{k+1} - w_k) \quad (8)$$

(7)式で $\eta=1$ として(8)式を代入し $T_{k+1,k}$ を求めると、

$$T_{k+1,k} = \frac{G}{h} (u_{k+1} - u_k) - \frac{2G+\lambda}{6} h L_2(2u_k + u_{k+1}) + \frac{G}{2} L'_1(w_k + w_{k+1}) - \frac{\lambda}{2} L'_1(w_{k+1} - w) \quad (9)$$

ただし、

$$L_2(f) = \frac{d}{dr} \left\{ \frac{d}{r dr} (f \cdot r) \right\}, \quad L'_1(f) = \frac{df}{dr}$$

同様に、(2)式に(4)式を代入し、(5), (6)を考慮して Z で積分し、 $Z=0$ で式を満足するように積分定数を定めると、

$$\sigma_r + G \left\{ L'_2(w_k) \left(\eta - \frac{\eta^2}{2} \right) + L'_2(w_{k+1}) \frac{\eta^2}{2} \right\} + GL_1(u) - S_{k,k+1} - GL_1(u_k) = 0 \quad (10)$$

* 室蘭工業大学教授

** 同 助教授

ここで、 $S_{k \cdot k+1}$ は、要素 $k \cdot k+1$ の k 境界に作用する直応力である。 $S_{k+1 \cdot k}$ についても同様である。

(10)式に(3)式を代入し、さらに Z で 0 から h まで積分し、ただし、

$S_{k \cdot k+1}$ を求めると、

$$\begin{aligned} S_{k \cdot k+1} = & \frac{2G+\lambda}{h} (w_{k+1} - w_k) + \frac{Gh}{6} L'_2 (2w_k \\ & + w_{k+1} + \frac{\lambda}{2} L_1 (u_k + u_{k+1}) \\ & + \frac{G}{2} L_1 (u_{k+1} - u_k) \end{aligned} \quad (11)$$

従って、

$$\begin{aligned} S_{k+1 \cdot k} = & \frac{2G+\lambda}{h} (w_{k+1} - w_k) - \frac{Gh}{6} L'_2 (w_k \\ & + 2w_{k+1}) + \frac{\lambda}{2} L_1 (u_{k+1} + u_k) \end{aligned}$$

$$S_{k \cdot k-1} - S_{k \cdot k+1} = 0$$

(11), (12)式を代入して、

$$\begin{aligned} & \frac{2G_k+\lambda_k}{h_k} (w_{k+1} - w_k) - \frac{2G_{k-1}+\lambda_{k-1}}{h_{k-1}} (w_k - w_{k-1}) + \frac{G_k h_k}{6} L'_2 (2w_k + w_{k+1}) + \frac{G_{k-1} h_{k-1}}{6} L'_2 (2w_k + w_{k-1}) \\ & + \frac{\lambda_k}{2} L_1 (u_k + u_{k+1}) - \frac{\lambda_{k-1}}{2} L_1 (u_k + u_{k-1}) + \frac{G_k}{2} L_1 (u_{k+1} - u_k) + \frac{G_{k-1}}{2} L_1 (u_k - u_{k-1}) = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

せん断力のつり合いから、

$$T_{k \cdot k-1} - T_{k \cdot k+1} = 0$$

(8), (9)式を代入して、

$$\begin{aligned} & \frac{G_k}{h_k} (u_{k+1} - u_k) - \frac{G_{k-1}}{h_{k-1}} (u_k - u_{k-1}) + \frac{2G_k+\lambda_k}{6} h_k L_2 (2u_k + u_{k+1}) \\ & + \frac{2G_{k-1}+\lambda_{k-1}}{6} h_{k-1} L_2 (2u_k + u_{k-1}) + \frac{\lambda_k}{2} L'_1 (w_{k+1} - w_k) \\ & + \frac{\lambda_{k-1}}{2} L'_1 (w_k - w_{k-1}) + \frac{G_k}{2} L'_1 (w_k + w_{k+1}) - \frac{G_{k-1}}{2} L'_1 (w_k + w_{k-1}) = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

(13), (14)式を連立微分積分方程式として解き、変位を求め、(8), (9), (11), (12)式から断面力を計算する。

今、等方性体の場合を考え、分割も等分割であるものとする(13), (14)式は次のようになる。

$$\frac{2G+\lambda}{h} \Delta^2 w_{k-1} + \frac{Gh}{6} L'_2 (\Delta^2 w_{k-1} + 6w_k) + \frac{G+\lambda}{2} L_1 (\Delta u_k) = 0 \quad (15)$$

$$\frac{G}{h} \Delta^2 u_{k-1} + \frac{2G+\lambda}{6} h L_2 (\Delta^2 u_{k-1} + 6u_k) + \frac{G+\lambda}{2} L'_1 (\Delta w_k) = 0 \quad (16)$$

式中、 $\Delta f_k = f_{k+1} - f_k$ 、 $\Delta^2 f_k = f_{k+1} - f_{k-1}$ である。

分割を無限に小さくしていくと、

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta^2 f_{k-1}}{h^2} = \frac{d^2 f}{dZ^2}, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta f_k}{2h} = \frac{df}{dZ}$$

となるから(15), (16)式はそれぞれ

$$(2G+\lambda) \frac{\partial^2 w}{\partial Z^2} + G \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \cdot \frac{\partial w}{\partial r} \right\} + (G+\lambda) \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial Z} \right) = 0 \quad (17)$$

$$G \frac{\partial^2 u}{\partial Z^2} + (2G+\lambda) \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (u \cdot r) \right\} + (G+\lambda) \frac{\partial w}{\partial r \partial Z} = 0 \quad (18)$$

$$- \frac{G}{2} L_1 (u_{k+1} - u_k) \quad (12)$$

$$L_1(f) = \frac{d}{r dr} (f_1 r), \quad L'_2(f) = \frac{d}{r dr} \left\{ r \frac{df}{dr} \right\}$$

(8), (9), (11), (12)式は、要素境界における断面力と境界変位との関係式である。

3. 軸対称応力問題の基本微分差分方程式

連続体としての軸対称問題は、円板要素を Z 方向に重ねることによってえられる。ここで、要素 k 、 $k+1$ の弾性定数、層厚を添字 k で表わすものとする、境界 k における直応力のつり合いから、

(17), (18)式は、軸対称応力問題に対する基本微分方程式である。即ち、この円板要素による解法は、要素厚を無限に小さくしたとき、厳密解と一致することがわかる。

4. 変位のHankel 変換および逆変換

(13), (14)式は、 r 方向に連続関数であるから、 r 方向にHankel 変換し、 $2k$ ($k=0, 1, \dots, n$)の連立方程式を解き逆変換することにより、各変位を求めることが、出来るが、ここでは簡単のため、等方性体の場合について考える。

等方性体で等分割の場合には(15), (16)式となるから、 k 方向 (Z 方向)にはフーリ工定和分変換を用いることが可能となる。即ち(15), (16)式を r 方向にHankel 変換、 Z 方向に定和分変換すると、内径 a 、外径 b の円筒の場合 (図-2)

$$\left\{ \frac{G}{h} D_i + \frac{2G+\lambda}{6} h (6-D_i) \xi_j^2 \right\} \mathbf{U}_{i,j} + (G+\lambda) \sin \frac{i\pi}{n} \xi_j \mathbf{W}_{i,j}$$

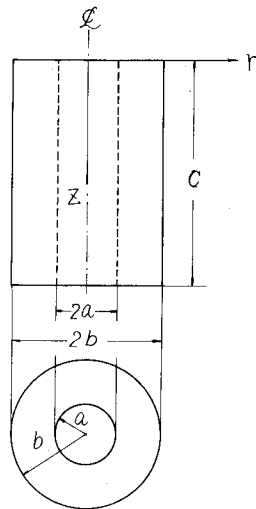
$$= - \left\{ \mathbf{T}_{0,j} - (-1)^i \mathbf{T}_{n,j} \right\} + \left\{ \lambda - \frac{G+\lambda}{4} D_i \right\} \xi_j \left\{ \mathbf{W}_{0,j} - (-1)^i \mathbf{W}_{n,j} \right\}$$

$$- \frac{2G+\lambda}{6} h (6-D_i) \xi_j [\bar{\mathbf{u}}_i r H_0(\xi r)]_a^b \quad (19)$$

$$(G+\lambda) \sin \frac{i\pi}{n} \xi_j \mathbf{U}_{i,j} + \left\{ \frac{2G+\lambda}{h} D_i + \frac{Gh}{6} \xi_j^2 (6-D_i) \right\} \mathbf{W}_{i,j}$$

$$= \left\{ \frac{2G+\lambda}{h} - \frac{Gh}{6} \xi_j^2 \right\} \sin \frac{i\pi}{n} \left\{ \mathbf{W}_{0,j} - (-1)^i \mathbf{W}_{n,j} \right\} - (G+\lambda) \sin \frac{i\pi}{n}$$

$$\times [\bar{\mathbf{u}}_i r H_0(\xi r)]_a^b + \frac{Gh}{6} (6-D_i) [\tilde{\mathbf{w}}_i r H_0(\xi r)]_a^b \quad (20)$$



ここで、

$$\mathbf{U}_{ij} = \int_a^b \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{u}_k \cos \frac{i\pi}{n} k \cdot r H_1(\xi r) dr,$$

$$\mathbf{W}_{ij} = \int_a^b \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{w}_k \sin \frac{i\pi}{n} k \cdot r H_0(\xi r) dr, \quad (i=0, 1, 2, \dots, n; j=0, 1, 2, \dots, \dots),$$

$$\mathbf{T}_{0,j} = \int_a^b T_{01} r H_1(\xi r) dr, \quad \mathbf{W}_{0,j} = \int_a^b w_{01} r H_0(\xi r) dr,$$

$$\bar{\mathbf{u}}_i = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{u}_k \cos \frac{i\pi}{n} k, \quad \tilde{\mathbf{w}}_i = \sum_{k=1}^{n-1} L_i(\mathbf{w}_k) \sin \frac{i\pi}{n} k$$

$$H_1(\xi_j r) = J_1(\xi_j r) Y_1(\xi_j a) - J_1(\xi_j a) Y_1(\xi_j r),$$

$$H_0(\xi_j r) = J_0(\xi_j r) Y_1(\xi_j a) - J_1(\xi_j a) Y_0(\xi_j r),$$

また、 ξ_j は $H_1(\xi_j a) = 0$ の根であり、 $D_i = 2(1 - \cos \frac{i\pi}{n})$ 。(19), (20)式を解いて、 $\mathbf{U}_{ij}$, $\mathbf{W}_{ij}$ を求め逆変換を行なうと、上下対称の場合、

$$w_k = (1 - \frac{2k}{n}) \left\{ \frac{2}{b^2 - a^2} \int_a^b w_{01} r dr + \frac{2}{b^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{H_0(\xi_j r)}{\theta_j^2} \mathbf{W}_{0,j} \right\}$$

$$+ \frac{2}{n} \cdot \frac{2}{b^2 - a^2} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \frac{Gh^2}{2G+\lambda} \cdot \frac{6-D_i}{6 D_i} [r \tilde{\mathbf{w}}_i]_a^b \sin \frac{i\pi}{n} k$$

$$- \frac{2}{n} \cdot \frac{2}{b^2} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{H_0(\xi_j r)}{\theta_j^2} \cdot \frac{6}{D_i (6-D_i)} \{1 + (-1)^i\} \sin \frac{i\pi}{n} \mathbf{W}_{0,j} \sin \frac{i\pi}{n} k$$

$$+ \frac{4}{nb^2} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{H_0(\xi_j r)}{\theta_j^2} \cdot \sin \frac{i\pi}{n} k \cdot \frac{1}{B_{ij}} \cdot \{G(4G+3\lambda)$$

$$+ \frac{(G+\lambda)^2}{2} \cdot \frac{D_i}{6-D_i} + \frac{6G(2G+\lambda)}{h^2}\} \{1 + (-1)^i\} \sin \frac{i\pi}{n} \mathbf{W}_{0,j}$$

$$\begin{aligned}
& + Gh \left(1 - \frac{D_i}{6}\right) \left\{ \frac{G}{h} D_i + (2G + \lambda) h \xi_j^2 \left(1 - \frac{D_i}{6}\right) \right\} [\tilde{w}_i r H_0 (\xi_j)]_a^b \\
& - \frac{G(G + \lambda)}{h} D_i \sin \frac{i\pi}{n} [u_i r H_0 (\xi_j)]_a^b + (G + \lambda) \xi_j \sin \frac{i\pi}{n} \{1 + (-1)^i\} \mathbf{T}_{0j} \} \\
u_k = & \frac{4}{nb^2} \sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^{\infty} \frac{H_1(\xi_j)}{\theta_j^2} \cdot \cos \frac{i\pi}{n} k \cdot \frac{1}{B_{ij}} \cdot \left(\left[\lambda h \xi_j^2 - \frac{G(2G + \lambda)}{h} \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{G^2}{6} h \xi_j^2 + \frac{G(G + \lambda)}{4} h \xi_j^2 \right\} D_i \right] \xi_j \{1 + (-1)^i\} \mathbf{W}_{0i} - G(G + \lambda) h \xi_j \\
& \times \left(1 - \frac{D_i}{6}\right) \sin \frac{i\pi}{n} [\tilde{w}_i r H_0 (\xi_j)]_a^b - \left[G(2G + \lambda) h^2 \xi_j^2 \left(1 - \frac{D_i}{6}\right)^2 \right. \\
& \left. - \{(G + \lambda)^2 \left(1 - \frac{D_i}{4}\right) - (2G + \lambda)^2 \left(1 - \frac{D_i}{6}\right)\} D_i \right] \xi_j [\bar{u}_i r H_0 (\xi_j)]_a^b \\
& - \left\{ \frac{2G + \lambda}{h} D_i + Gh \xi_j^2 \left(1 - \frac{D_i}{6}\right) \right\} \{1 + (-1)^i\} \mathbf{T}_{0j} \}
\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
& \text{ただし,} \\
B_{ij} = & G(2G + \lambda) \left\{ \left(1 - \frac{D_i}{6}\right) h \xi_j^2 + \frac{D_i}{h} \right\}^2 + \frac{(G + \lambda)^2}{12} D_i^2 \xi_j^2
\end{aligned} \tag{22}$$

ただし,

$$B_{ij} = G(2G + \lambda) \left\{ \left(1 - \frac{D_i}{6}\right) h \xi_j^2 + \frac{D_i}{h} \right\}^2 + \frac{(G + \lambda)^2}{12} D_i^2 \xi_j^2$$

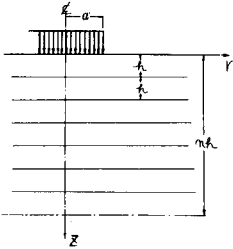
この結果は図-4に示すよう、載荷面付近では、要

5. 数値計算例

1) 半無限体の場合

本解法の精度を検討するため、半無限体の応力解析を行ない、*Boussinesq* の式の値と比較する。

図-3に示すように、半無限体から厚さ C の無限板を



取り出し、これが半無限体に接続しているものとして、この無限板を n 等分して、載荷中心下の σ_z を計算した。この場合 *Hankel* 変換は無限積分となり、逆変換も ξ による無限積分で与えられる。また r 方向の境界値は全て 0 となる。

従って境界条件を *Hankel* 変換すると、

$$\left. \begin{aligned}
& k=0 \text{ で, } \mathbf{S}_0 = \frac{a}{\xi} J_1(\xi a), \mathbf{T}_0 = 0 \\
& k=n \text{ で, } \mathbf{S}_n = -G \left\{ \frac{2G + \lambda}{3G + \lambda} \mathbf{W}_n + \frac{2G}{3G + \lambda} \mathbf{U}_n \right\} \\
& \mathbf{T}_n = -G \left\{ \frac{2G}{3G + \lambda} \mathbf{W}_n + \frac{2G + \lambda}{3G + \lambda} \mathbf{U}_n \right\}
\end{aligned} \right\} \tag{23}$$

この場合上下非対称となるので(19), (20)式を無限変換として(23)式を用いて解くこととなる。

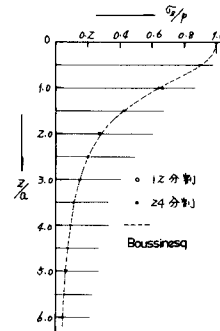


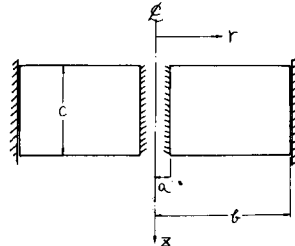
図-4 σ_z 分布(載荷中心)

素の仮定上、正解値と一致しないが、分割布を載荷半径の半分にすれば、分割点では正解値にほぼ一致している。

2) 有限円筒の場合

有限円筒の場合は、上下対称変形を仮定すると(21), (22)式となり、 r 方向の境界値が残るので、問題により精度は異なるものと思われる。

今、図-5のような内側固定された円筒を考え、これ



の内側の w が直線変化する場合の内側のせん断応力分布を計算する。このとき境界条件は、

$$\left. \begin{aligned} k=0 \text{ で, } S_0=T_0=0, \\ r=a \text{ で, } u=0, w=w_0(1-2k/n), \\ r=b \text{ で, } u=\partial w/\partial r=0 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

従って、 $T_{0j}=\bar{u}_i=\bar{w}_i)_{r=b}=0$ となり、 W_{0j} および $\bar{w}_i)_{r=a}$ を(24)式から求めることになる。結果は図-6の

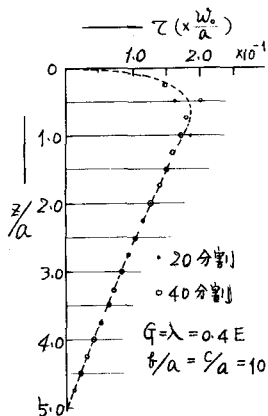


図-6 τ 分布 ($r=a$)

ようである。20分割および40分割の場合を示したが $Z/a = 1.0$ 以下では両方の値ともほぼ等しい値となっているが、 $Z < a$ では、40分割でもまだ十分収束していないようである。この原因としては、表面付近では、変位、応力とも変化が急であり、40分割でも直線分布を仮定する

ことが無理なためと思われる。この解決としては、全体を等分割することなく、表面付近ではより細かい分割を行なうことが考えられるが、本論文では行なっていない。

6. む す び

軸対称応力問題を、円板要素を用いて解決する方法を述べた。円板要素の定式化は、変位仮定と、逐次積分の方法により簡単に行なうことが出来、えられた式も、変位と断面力の関係を簡単な形で与えることを示した。また若干の計算例を示したが、半無限体に応用した場合にはかなりの精度で解がえられることがわかったので、多層体の解析に用いて有効であろう。有限円柱の場合は、境界値の処理に、多少の問題があるようである。なお、ここに示した計算は全て、室蘭工業大学電子計算機室の FACOM-231 を使用した。

参 考 文 献

- 1) Ian. N. Sneddon : Fourier Transforms, McGraw-Hill, 1951.
- 2) S. G. Nomachi : On Finite Fourier Sine Series with Respect to Finite Differences, Memoirs of Muroran Ins. of Tech., Vol. 5, NO. 1, 1965