

トポロジカル一致を有する構造物間の収斂について

正員 能 町 純 雄^{*}
 正員 松 岡 健 一^{**}
 学生員 ○佐 藤 隆^{***}

1. まえがき

構造物を解析するのに、その構造物と互にトポロジカル一致を有する構造物を考え、実際の解析演算を一方の構造物により行ない、もう一方の構造物で力のつりあいをとりながら、解を逐次近似できることを示し、その収束条件を求めたものである。

2. 定 義

任意の幾つかの構造物を考える。これらの構造物間の位相の不変量を

- (1) 格点数 (連続体ならば、格点数無限大)
 - (2) 対応格点の自由度 (境界条件を含む)
 - (3) 対応格点の相対的位置 (格点の順序の不変性)
- の3つにとる。この位相の不変量が一致する構造物を互にトポロジカル一致を有する構造物とする。この不変量には、格点間の距離、断面特性、材料特性が含まれていないことに注意する。

3. トポロジカル一致を有する構造物間の関係

構造物を変位法で解析する。stiffness matrix を $\mathbf{B}$ 、変位 vector を $\mathbf{U}$ 、および、荷重 vector を $\mathbf{P}$ により表わす。今解析の対象となる構造物においては添字 O をまた、それと topological 一致を有する構造物を考え、その添字を M とし、区別する。簡単の為、今後本文では、前者の構造物を *object structure*、後者を *model structure* と呼ぶことにする。各々の構造物において、荷重 $\mathbf{P}$ に対して、

$$\mathbf{B}_O \cdot \mathbf{U}_O = \mathbf{P} \quad (1)$$

$$\mathbf{B}_M \cdot \mathbf{U}_M = \mathbf{P} \quad (2)$$

(1) の stiffness matrix $\mathbf{B}_O$ については、一意的に

$$\mathbf{B}_O = \mathbf{B}_M + \mathbf{B}' \quad (3)$$

とできる。(1), (2) に $\mathbf{B}_M^{-1}$ を左から作用させ

$$\mathbf{B}_M^{-1} \cdot \mathbf{B}_O \cdot \mathbf{U}_O = \mathbf{B}_M^{-1} \mathbf{P} = \mathbf{U}_M \quad (4)$$

* 室蘭工業大学 教 授 工博

** 室蘭工業大学 助教授 工修

*** 室蘭工業大学大学院

(4) で (3) を用いると

$$\mathbf{B}_M^{-1} \cdot (\mathbf{B}_M + \mathbf{B}') \mathbf{U}_O = \mathbf{U}_M \quad (6)$$

ここで、

$$\mathbf{C} = \mathbf{B}_M^{-1} \mathbf{B}' = \mathbf{B}_M^{-1} \mathbf{B}_O - \mathbf{E} \quad (7)$$

ただし、 $\mathbf{E}$ は単位行列とおくと (6) は、

$$(\mathbf{C} + \mathbf{E}) \mathbf{U}_O = \mathbf{U}_M \quad (8)$$

(8) を、逐次近似により解くと、

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{U}_O &= (\mathbf{E} - \mathbf{C} + \mathbf{C}^2 - \dots) \mathbf{U}_M \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} (-\mathbf{C})^p \mathbf{U}_M \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

(9) の巾級数、

$$\sum_{p=0}^{\infty} (-\mathbf{C})^p \quad (10)$$

が、収束することにより、解 $\mathbf{U}_O$ が $\mathbf{U}_M$ により近似される。(8) の逐次近似は、 $\mathbf{U}_M$ を定数項とする連立方程式の逐次近似法に他ならない。この場合は特別な場合で、その係数行列から単位行列を分離できる場合である。この連立方程式の係数行列を単位行列ともう1つの一意的に定まる行列 (この場合行列 $\mathbf{C}$) に分離することができる場合の力学的意味が (1) ~ (7) になる。更に、(8) を逐次近似した (9) の力学的意味を考える。まず (4) から $\mathbf{U}_M$ を求め、この $\mathbf{U}_M$ を $\mathbf{U}_O$ の第1近似値とする、(1) は

$$\square \quad \mathbf{B}_O \cdot \mathbf{U}_M = \mathbf{B}_M \cdot \mathbf{U}_M + \mathbf{B}' \cdot \mathbf{U}_M = \mathbf{P} + \mathbf{B}' \cdot \mathbf{U}_M \quad (12)$$

(12) の第2項は $\mathbf{U}_O$ を $\mathbf{U}_M$ で近似した時の力の釣合の残余 (Residual) である。この Residual $\mathbf{B}' \mathbf{U}_M$ を打消すような変位 $\mathbf{U}_{(1)}$ を、model structure で求めると、

$$\mathbf{B}_M \mathbf{U}_{(1)} = -\mathbf{B}' \cdot \mathbf{U}_M \quad (13)$$

から、

$$\mathbf{U}_{(1)} = -\mathbf{B}_M^{-1} \cdot \mathbf{B}' \cdot \mathbf{U}_M = -\mathbf{C} \mathbf{U}_M \quad (14)$$

この $\mathbf{U}_{(1)}$ を $\mathbf{U}_M$ に加え第2近似値とする。すなわち

$$\mathbf{U}_O = \mathbf{U}_M + \mathbf{U}_{(1)} = (\mathbf{E} - \mathbf{C}) \mathbf{U}_M \quad (15)$$

この $\mathbf{U}_{(1)}$ による object structure での力の釣合は、

$$\begin{aligned} &(\mathbf{B}_M + \mathbf{B}') (\mathbf{B}_M^{-1} \mathbf{B}' \mathbf{U}_M) \\ &= \mathbf{B}' \mathbf{U}_M + \mathbf{B}' \cdot \mathbf{B}_M^{-1} \mathbf{B}' \mathbf{U}_M \\ &= \mathbf{B}' \mathbf{U}_M + \mathbf{B}' \mathbf{U}_{(1)} \quad (16) \end{aligned}$$

(16)の第1項は(12)の *Residual* (すなわち、前回の近似値 $\mathbf{U}_M$ による *Residual*) であり、第2項は(15)による力の釣合での *Residual* である。再びこの *Residual* を打消す変位 $\mathbf{U}_{(2)}$ を *model structure* で求め、

$$\mathbf{U}_{(2)} = -\mathbf{B}_M^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{U}_{(1)} = (-\mathbf{C})^2 \mathbf{U}_M \dots\dots\dots (17)$$

これで、第3近似値が求まり、その時の *object structure* の解は

$$\mathbf{U}_0 = (\mathbf{E} - \mathbf{C} + \mathbf{C}^2) \mathbf{U}_M \dots\dots\dots (18)$$

以上を繰り返し逐次近似してゆく。これが、本解法の力学的意味である。

4. 収束条件

(10)の巾級数が収束する条件は

$$N(\mathbf{C}) < 1 \dots\dots\dots (19)$$

であることが、証明されている。⁽¹⁾ここで $N(\mathbf{C})$ は行列 $\mathbf{C}$ を線型作用素と見た時の作用素 *norm* である。本文では、作用素 *norm* の定義を、 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ を $(n \times n)$ 行列として、

$$N(\mathbf{A}) = \max_i \left(\sum_{k=1}^n |a_{ik}| \right) \quad i=1, 2, \dots, n;$$

とする。この時、この作用素 *norm* は次の4つの性質を満たす

- (A) $N(\mathbf{A}) < 0$, 且つ $N(\mathbf{0}) = 0$ (正値性)
 - (B) $N(\lambda \mathbf{A}) = |\lambda| N(\mathbf{A})$ λ は実数
 - (C) $N(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \leq N(\mathbf{A}) + N(\mathbf{B})$ 三角不等式
 - (D) $N(\mathbf{AB}) \leq N(\mathbf{A}) N(\mathbf{B})$ Schwarz 不等式
- (7)から

$$\mathbf{B}_0 = \mathbf{B}_M(\mathbf{C} + \mathbf{E}) \dots\dots\dots (20)$$

(20)の作用素 *norm* は

$$N(\mathbf{B}_0) = N(\mathbf{B}_M(\mathbf{C} + \mathbf{E})) \dots\dots\dots (21)$$

上述の性質(C), (D)から

$$N(\mathbf{B}_0) \leq N(\mathbf{B}_M) (N(\mathbf{C}) + N(\mathbf{E})) \dots\dots\dots (22)$$

$N(\mathbf{E}) = 1$, $N(\mathbf{B}_M) > 0$ および(19)から

$$0 < \frac{N(\mathbf{B}_0)}{N(\mathbf{B}_M)} \leq N(\mathbf{C}) + 1 < 2 \dots\dots\dots (23)$$

定義から

$$0 < \frac{\max_i \left(\sum_{k=1}^n |b_{ik}^Q| \right)}{\max_i \left(\sum_{k=1}^n |b_{ik}^M| \right)} < 2 \dots\dots\dots (24)$$

(24)の意味は各釣合式において、係数の絶対値の和の最大値の比が0と2の間にあることである。

5. 誤差評価

$\mathbf{U}_{(p)}$ を $p-1$ 回目で打切った時の変位の近似値とすると (9)から

$$\mathbf{U}_0 - \mathbf{U}_{(p)} = \sum_{k=p}^{\infty} (-\mathbf{C})^k \mathbf{U}_M \dots\dots\dots (25)$$

(25)の *norm* をとり

$$N(\mathbf{U}_0 - \mathbf{U}_{(p)}) = N \left(\sum_{k=p}^{\infty} (-\mathbf{C})^k \mathbf{U}_M \right) \dots\dots\dots (26)$$

(26)の左辺で、 $N(\mathbf{C}) = N(-\mathbf{C})$ を考慮して

$$N(\mathbf{U}_0 - \mathbf{U}_{(p)}) \leq N(\mathbf{C})^p \frac{N(\mathbf{U}_M)}{1 - N(\mathbf{C})} \dots\dots\dots (27)$$

ここで

$$N(\mathbf{U}_0 - \mathbf{U}_{(p)}) = \max_i |u_0 - u_{(p)}|$$

$$N(\mathbf{U}_M) = \max_i |u_M|$$

である。

6. 応 用

object structure と互いにトポロジカル一致を考えた極めて *regular* な (例えば、断面一定とか等区画に分離された *node* を持つとか) 構造物を *model structure* に用意すれば、解析が簡単になることは明かである。更に、このように *regular* な構造物を解析するのに有利な *Fourier* 定和分変換を用いる。 *model structure* の解析にこの *Fourier* 定和分変換を用いると、剛性行列の元数が大巾に減少する。本解析法の場合、実際に解析演算を行なうのは *model structure* であり、 *object structure* では、変位を与えて力の釣合を得るのみである。 $\mathbf{B}_M$ の元数を大巾に減少させることにより *model structure* での解析式、すなわち、任意の荷重に対して変位を求める式を数値計算以前に準備することができる。まとめると、本解析法は巨大な *core* を有する *object structure* を直接に解かず、それと互にトポロジカル一致を有する *model structure* に *Fourier* 定和分変換をほどこし、数値計算以前に解析式として変位を表現しておき、この変位により *object structure* を、そこで力の釣合をとりながら、逐次近似することである。特徴は

- (1) 巨大な *core* を有する $\mathbf{B}_0$ の宣言は不必要で、任意点での力の釣合を求めておくだけでよい。
- (2) (1) により小型の電子計算機により、かなり *core* の大きい構造物の解析が可能である。

7. 数値計算例1

内部不静定構を例にとる。 *Fourier* 定和分変換による解析は、文献2)参照。例題では *stiffness matrix* $\mathbf{B}_0$, $\mathbf{B}_M$ を明らかにする為に書いてあるが、実際には、考慮せずともよく、(24)のみを求めて、収束の判定をすればよい。(10)の収束条件にはもう1つ $\mathbf{C}$ の固有値による方法があり $\max_i |\mu_i| < 1$ μ_i は $\mathbf{C}$ の固有値である。⁽¹⁾この $\mathbf{C}$ の固

有値による判定は、**C** 行列を作り、評価せねばならず、この解析法の特徴の(1)を消してしまうことになるので、本来、取扱うべきでないが、この例題では、一応、確認の為、調べてみた。RATIOとはEA/dの平均値に対する比である。

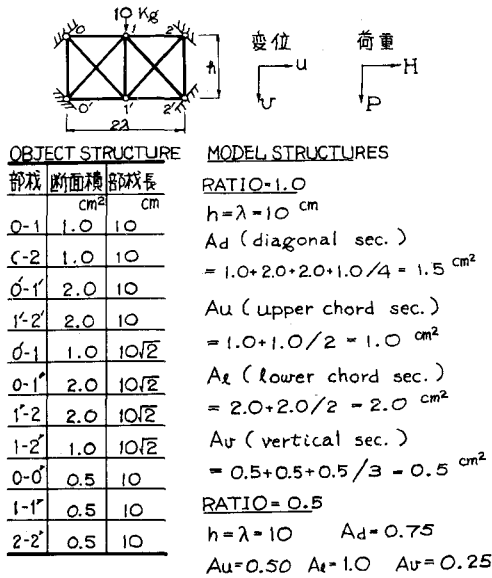


図-1

$$B_0 = E \times \begin{bmatrix} 0.2707, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0.5414, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0.1207, & -0.05 \\ 0, & 0, & -0.05, & 0.1914 \end{bmatrix}$$

RATIO=1.0

$$B_M = E \times \begin{bmatrix} 0.3061, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0.5061, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0.1561, & -0.05 \\ 0, & 0, & -0.05, & 0.1561 \end{bmatrix}$$

RATIO=0.5

$$B_M = E \times \begin{bmatrix} 0.1530, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0.2530, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0.0780, & -0.025 \\ 0, & 0, & -0.025, & 0.0780 \end{bmatrix}$$

EIGENVALUES OF MATRIX **C** RATIO=1.0

$$\mu = -0.1142, 0.0716, 0.2414, -0.2377 < 1$$

EIGENVALUES OF MATRIX **C** RATIO=0.5

$$\mu = 0.7689, 1.1396, -1.4781, -0.5217$$

(24)による判定 $N(B_0) = 0.5414 \times E$

RATIO=1.0

$$N(B_M) = 0.5061 \times E,$$

$$0 < \frac{0.5414}{0.5061} = 1.070 < 2 \dots \dots \dots \text{収束}$$

RATIO=0.5 $N(B_M) = 0.2530 \times E$

$$\frac{0.5414}{0.2530} = 2.140 > 2 \dots \dots \dots \text{発散}$$

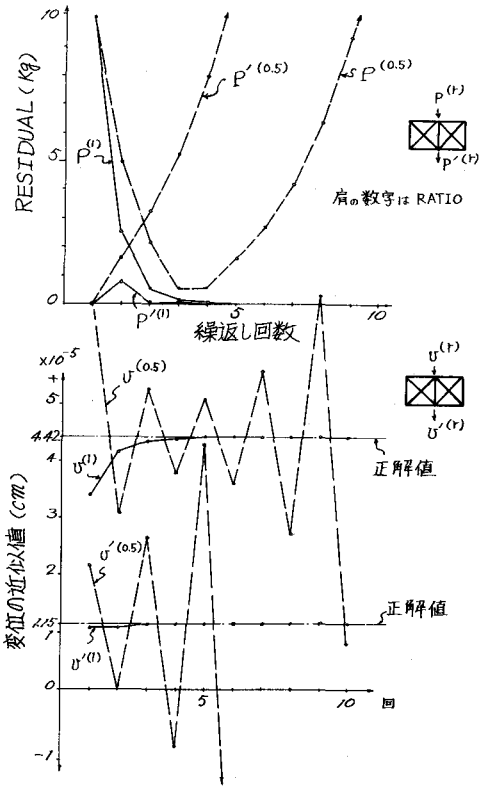


図-2

8. 数値計算例 2

例 1 の剛性行列は所謂、性質の良い行列であったが、剛性行列が常に良いとは限らず、例えば図の連続梁を考え、変位 vector として、格点の Bending Moment と接みをとることにより、剛性行列は、本計算例の場合、最大元と最小元の比が 10^{10} 程異なる。この時、(24)の収束条件の限界が現れる。

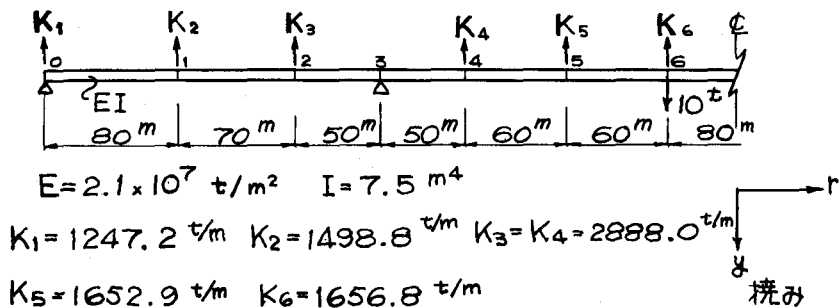


図-3

任意点 r でのつりあい

剪断力

$$P_r = K_r y_r - \frac{M_{r+1}}{\lambda_{r+1}} + \left(\frac{1}{\lambda_{r+1}} + \frac{1}{\lambda_r} \right) M_r - \frac{1}{\lambda_r} M_{r-1} \dots\dots\dots (a)$$

たわみ角

$$\theta_r = -\frac{\lambda_{r+1}}{EI_{r+1}} M_{r+1} - 2 \left(\frac{\lambda_{r+1}}{EI_{r+1}} + \frac{\lambda_r}{EI_r} \right) M_r - \frac{\lambda_r}{EI_r} M_{r-1} - \frac{y_{r+1}}{\lambda_{r+1}} + \left(\frac{1}{\lambda_{r+1}} + \frac{1}{\lambda_r} \right) y_r - \frac{1}{\lambda_r} y_{r-1} \dots\dots\dots (b)$$

$$N(\mathbf{B}_0) = 2888.1$$

Model structures

CASE (A) $EI = 3.15 \times 10^8 \text{ tm}^2 \quad \lambda = 63 \text{ m (av)}$
 $K = 1960.45 \text{ t/m (av)}$

$$N(\mathbf{B}_M) = 1960.5$$

$$N(\mathbf{B}_0) / N(\mathbf{B}_M) = 1.473 < 2$$

CASE (B) $EI = 1.575 \times 10^8 \quad \lambda = 63 \quad K = 1960.45$

$$N(\mathbf{B}_0) / N(\mathbf{B}_M) = 1.473 < 2$$

CASE (C) $EI = 1.575 \times 10^8 \quad \lambda = 63 \quad K = 2940.675$

$$N(\mathbf{B}_0) / N(\mathbf{B}_M) = 0.9821 < 2$$

撓みと Bending moment の値は、載荷点直下である。

9. 考 察

互いにトポロジカル一致を有する構造物間の収束条件を求め、実際に収束するかどうかを調べ、更にその適用限界を数値計算例 2 により明らかにした。また、本論文では、model structure を探す一方法として RATIO なるものを導入し、強力な一指標として有用であると思われる。

10. 文 献

- (1) 例えば 入江昭二，線形数学Ⅱ 共立数学講座 4
- (2) 能町純雄：差分方程式で表わされる不静定構造物の和分変換による解法例—Cross Diagonal を有する平行弦 Truss について—
土木学会北海道支部 技術資料 23号

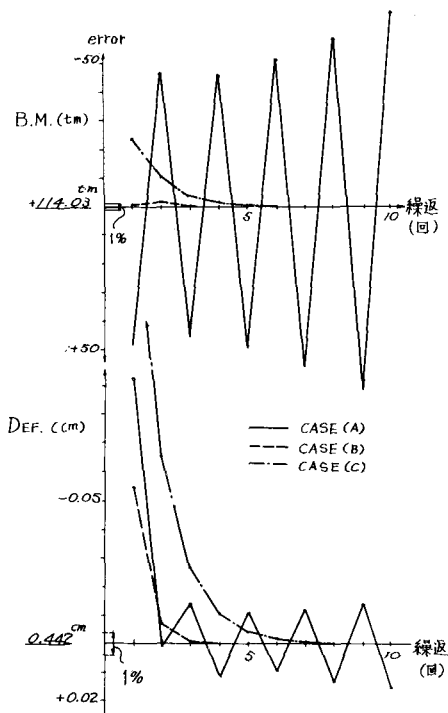


図-4

- (3) S. G. Nomachi : A Note on Finite Fourier Transforms Concerning Finite Integration
The Memoirs of the Muroran I. T. Vol. 5, No. 2