

Point Matching による有孔板の解析とその応用について

正員 芳村 仁*
 正員 谷 中 幸 和**
 学生員 ○小 間 憲 彦***

1. は し が き

平板曲げの問題は厳密解を求めることが困難な場合が多いため、種々の近似解法が提案されてきた。最近の電算機の発達により、多元の連立方程式を組み立てて、解を求める有限要素法は種々の境界条件を容易に満すことができ、複雑な形状にも適用しやすい。しかし最新の電算機を用いても、容量の点でかなりプログラムに働力を費やせねばならない。本論文では、比較的小さな連立方程式を解くことにより、境界条件を近似的に満すPoint Matching 法を用い、2, 3の例題で解の精度を検討し、有孔板の曲げ問題を解析したので報告する。有孔板はラーメン脚底部のアンカプレートに現われる構造で、種々の荷重条件、境界条件が考えられるが、ここで円孔周辺に等分布線荷重を担う三辺固定、一辺自由の板について解析し、応力性状を検討した。

この方法による解析についてはF. Tölke⁽¹⁾, H. D. Couaag⁽²⁾がFlat Slab, 全辺固定正方形板および三角形板に適用し更に正六角形断面を有する棒の捩り解析にも応用している。またA. W. Leissa⁽³⁾等は片持板について報告している。G. J. Matthews⁽⁴⁾等は三次元軸対称問題としてのshouldered shaft の捩り解析にも適用している。特にleissa⁽⁵⁾等は板の種々の近似解法を比較し、Point Matching 法が良好なことを示している。

2. Point Matching 法

この方法は平板の方程式を満足する一般解を極座標で表わし、境界上の有限個の点で境界条件を満足させるものである。例えば境界上に N 個の点をとると、1点につき板理論により2個の条件があり、境界全体として $2N$ 個の方程式を生じるが、ここで一般解に含まれる未定係

数を A_m, C_m ($m=1, 2, \dots, \infty$) とすると、未定数の項数 M を $N=M$ にすることにより連立方程式が成立し、未知数 A_m, C_m について境界条件を満すように、有限個の未定係数 A_m, C_m ($m=1, 2, \dots, N$) を定めることができる。

境界条件はまず (r, θ) 系について求め、それを境界の法線方向へ変換した形で表わす。(図-1参照) 動径 r と法線 n のなす角 ϕ は n が r に対して反時計方向にあるとき正とする。

2, 3の論文では境界上にとった点と点の間において、指定した境界条件からのずれが大きいたことが指摘されている。⁽⁵⁾この対策として未定係数の項数 M よりも多い点を境界上にとり、最小自乗法により境界条件を満す方法も提案されている。

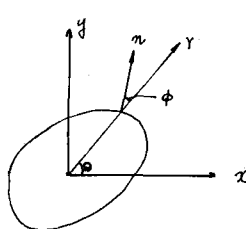


図-1

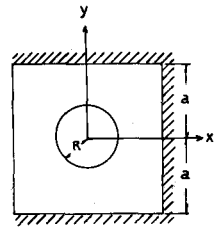


図-2

3. 有孔板への適用

本法は円孔を有する場合、その周辺では条件を厳密に満すことができるため、他の方法に比し特に有効である。

板の方程式

$$\Delta \Delta w = p / D \quad \dots \dots \dots (1)$$

の一般解は極座標で

$$w = R_0 + \sum_{m=1}^{\infty} R_m \cos m\theta + \sum_{m=1}^{\infty} R'_m \sin m\theta + w_p \quad \dots \dots \dots (2)$$

* 北海道大学工学部 教授 工博

** 本四連絡橋公団

*** 北海道大学大学院

ここで

$$m=0, R_0=A_0+B_0r^2+C_0\ln r$$

$$m=1, R_1=A_1r+B_1r^3+C_1r^{-1}+D_1r\ln r$$

$$m>1, R_m=A_mr^m+B_mr^{-m}+C_mr^{m+2}+D_mr^{-m+2}$$

w, p は荷重に対する特解で、今の場合線荷重であるので

$$w, p = 0$$

境界条件は、図-2のように円孔周辺に線荷重を担う三辺固定、一辺自由の板の場合、次のようになる。

内部境界条件 (円孔周辺)

$$w = \frac{Pa^2}{D} [A_0 + B_0 \ln \rho + C_0 \rho^2 + D_0 \rho^2 \ln \rho + (A_1 \rho + B_1 \rho^{-1} + C_1 \rho^3 + D_1 \rho \ln \rho) \cos \theta + \sum_{m=2}^{\infty} (A_m \rho^m + B_m \rho^{-m} + C_m \rho^{m+2} + D_m \rho^{-m+2}) \cos m\theta] \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\begin{aligned} Mr &= -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right] \\ &= -P \left[-(1-\nu) B_0 \rho^{-2} + 2(1+\nu) C_0 + \{2(1+\nu) \ln \rho + (3+\nu)\} D_0 \right. \\ &\quad + \{2(1-\nu) B_1 \rho^{-3} + 2(3+\nu) C_1 \rho + (1+\nu) D_1 \rho^{-1}\} \cos \theta \\ &\quad + \sum_{m=2}^{\infty} \{ (1-\nu) m(m-1) A_m \rho^{m-2} + (1-\nu) m(m+1) B_m \rho^{-m-2} \\ &\quad + (m+1) \{ (m+2) - \nu(m-2) \} C_m \rho^m + (m-1) \{ (m-2) - \nu(m+2) \} D_m \rho^{-m} \} \cos m\theta \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_\theta &= -D \left[\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right] \\ &= -P \left[(1-\nu) B_0 \rho^{-2} + 2(1+\nu) C_0 + \{2(1+\nu) \ln \rho + (1+3\nu)\} D_0 \right. \\ &\quad + \{ -2(1-\nu) B_1 \rho^{-3} + 2(1+3\nu) C_1 \rho + (1+\nu) D_1 \rho^{-1} \} \cos \theta \\ &\quad + \sum_{m=2}^{\infty} \{ -m(m-1)(1-\nu) A_m \rho^{m-2} - m(m+1)(1-\nu) B_m \rho^{-m-2} \\ &\quad - (m+1) \{ m(1-\nu) - 2(1+\nu) \} C_m \rho^m - (m-1) \{ m(1-\nu) + 2(1+\nu) \} \\ &\quad \times D_m \rho^{-m} \} \cos m\theta \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Mr_\theta &= -D(1-\nu) \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right] \\ &= -P \left[(2 B_1 \rho^{-3} - 2 C_1 \rho - D_1 \rho^{-1}) \sin \theta - \sum_{m=2}^{\infty} \{ m(m-1) A_m \rho^{m-2} \right. \\ &\quad \left. - m(m+1) B_m \rho^{-m-2} + m(m+1) C_m \rho^m - m(m-1) D_m \rho^{-m} \} \sin m\theta \right] \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Qr &= -D \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right] \\ &= -\frac{P}{a} \left[4 \rho^{-1} D_0 + (8 C_1 - 2 \rho^{-2} D_1) \cos \theta + \sum_{m=2}^{\infty} \{ 4 m(m+1) \rho^{m-1} C_m \right. \\ &\quad \left. + 4 m(m-1) \rho^{-m-1} D_m \} \cos m\theta \right] \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

式(8), (9)より Vr を求めると

$$\begin{aligned} Vr &= Qr + \frac{1}{r} \frac{\partial Mr_\theta}{\partial \theta} \\ &= -\frac{P}{a} \left[4 \rho^{-1} D_0 + \{2(1-\nu) B_1 \rho^{-4} + 2(3+\nu) C_1 - (3-\nu) \rho^{-2} D_1\} \cos \theta \right. \\ &\quad + \sum_{m=2}^{\infty} \{ -(1-\nu) m^2(m-1) A_m \rho^{m-3} + (1-\nu) m^2(m+1) B_m \rho^{-m-3} \\ &\quad + m(m+1) \{ 4 - (1-\nu)m \} \rho^{m-1} C_m + m(m-1) \{ 4 + (1-\nu)m \} D_m \rho^{-m-1} \} \cos m\theta \} \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} (Mr)_{r=R} &= 0 \\ (Vr)_{r=R} &= -p = -P/2\pi R \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

外部境界条件

$$\left. \begin{aligned} \text{固定辺 } w &= 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \\ \text{自由辺 } Mn &= 0, \quad Vn = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

ここで R は円孔の半径, P は円孔周辺の線荷重である。

式(2)は4個の未定係数を含んでいるが境界条件(3)より B_m, D_m を A_m, C_m で表わし、最終的には2個とする。

境界条件(3)は式(2)より次のように求められる。

内部境界条件(3)より

$M_r = 0$, $V_r = -\frac{P}{2\pi R}$ より B_m , D_m を A_m , C_m で表わすと,

$$D_0 = \frac{1}{8\pi}$$

$$B_0 = \frac{2(1+\nu)}{(1-\nu)} R^2 C_0 + \{2(1+\nu) \ell n R + (3+\nu)\} \frac{R^2}{8\pi(1-\nu)}$$

$$D_1 = 0$$

$$B_1 = -\frac{3+\nu}{1-\nu} C_1 R^4$$

$$B_m = -(m-1) R^{2m} A_m \frac{1-\nu}{3+\nu} - \{(3+\nu)^2 + (m^2-1)(1-\nu)^2\} \frac{C_m R^{2m+2}}{m(1-\nu)(3+\nu)}$$

$$D_m = m R^{2m-2} A_m \frac{1-\nu}{3+\nu} + (m+1) R^{2m} C_m \frac{1-\nu}{3+\nu}$$

(11)

式(11)より B_m , D_m を消去し, 外部境界条件を求めると次のようになる。ここで $H = \frac{R}{\rho}$ である。

$$\begin{aligned} w = & \frac{P a^2}{D} \left[A_0 + \rho^2 \left\{ \frac{2(1+\nu) H^2 \ell n \rho}{(1-\nu)} + 1 \right\} C_0 + \left\{ A_1 \rho - \rho^3 \left\{ \frac{H^4 (3+\nu)}{(1-\nu)} - 1 \right\} C_1 \right\} \cos \theta \right. \\ & + \sum_{m=2}^{\infty} \left\{ 1 - \frac{(m-1)(1-\nu) H^{2m}}{3+\nu} + \frac{(1-\nu) m H^{2m-2}}{3+\nu} \right\} \rho^m A_m \\ & + \left\{ 1 - \frac{\{(3+\nu)^2 + (m^2-1)(1-\nu)^2\} H^{2m+2}}{m(1-\nu)(3+\nu)} + \frac{(m+1)(1-\nu) H^{2m}}{3+\nu} \right\} \rho^{m+2} C_m \left. \right\} \cos m \theta \\ & + \left\{ \frac{2(1+\nu) \ell n R + (3+\nu)}{1-\nu} H^2 + 1 \right\} \frac{\rho^2 \ell n \rho}{8\pi} \right] \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

境界法線方法の曲げモーメント M_n は

$$\begin{aligned} M_n = & \frac{(M_r + M_\theta)}{2} + \frac{(M_r - M_\theta) \cos 2\phi}{2} + M_{r\theta} \sin 2\phi \\ = & -P \left[2(1+\nu)(1-H^2 \cos 2\phi) C_0 \right. \\ & + 2 \{ 2(1+\nu) \cos \theta + (1-\nu) \cos (\theta + 2\phi) - (3+\nu) H^4 \cos (\theta - 2\phi) \} \rho C_1 \\ & + \sum_{m=2}^{\infty} \{ m(m-1)(1-\nu) \{ \cos (m\theta + 2\phi) - (1-\nu)(m+1) \cos (m\theta - 2\phi) \} \\ & \times \frac{H^{2m}}{3+\nu} - \{ 2(1+\nu) \cos m\theta - (1-\nu) m \cos (m\theta - 2\phi) \} \frac{H^{m-2}}{3+\nu} \} \rho^{m-2} A_m \\ & + (m+1) \{ 2(1+\nu) \cos m\theta + (1-\nu) m \cos (m\theta + 2\phi) \\ & - \{ (3+\nu)^2 + (m^2-1)(1-\nu)^2 \} \cos (m\theta - 2\phi) \frac{H^{2m+2}}{3+\nu} - (m-1)(1-\nu) \\ & \times \{ 2(1+\nu) \cos m\theta - (1-\nu) m \cos (m\theta - 2\phi) \} \frac{H^{2m}}{3+\nu} \} \rho^m C_m \\ & \left. - \left\{ \{ 2(1+\nu) \ell n R + (3+\nu) \} H^2 \cos 2\phi - \{ 2(1+\nu)(\ell n \rho + 1) + (1-\nu) \cos 2\phi \} \right\} \frac{1}{8\pi} \right] \quad (13) \end{aligned}$$

境界法線方向のたわみ角 $\frac{\partial w}{\partial n}$ は,

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial r} \cos \phi + \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\sin \phi}{r}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{Pa}{D} \left[2 \left\{ \frac{1+\nu}{1-\nu} H^2 + 1 \right\} \rho \cos \phi C_0 + A_1 \cos (\theta + \phi) \right. \\
&\quad + \left\{ \frac{3+\nu}{1-\nu} H^4 \cos (\theta - \phi) + 2 \cos (\theta + \phi) + \cos (\theta - \phi) \right\} \rho^2 C_1 \\
&\quad + \sum_{m=2}^{\infty} \left\{ m \rho^{m-1} \left\{ \cos (m\theta + \phi) + \frac{1-\nu}{3+\nu} (m-1) \cos (m\theta - \phi) \right\} H^{2m} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1-\nu}{3+\nu} \left\{ (m-1) \cos (m\theta - \phi) - \cos (m\theta + \phi) \right\} H^{2m-2} \right\} A_m \\
&\quad + \rho^{m+1} \left\{ (m+1) \cos (m\theta + \phi) + \cos (m\theta + \phi) + \left\{ (3+\nu)^2 + (m^2-1)(1-\nu)^2 \right\} \right. \\
&\quad \times \frac{H^{2m+2} \cos (m\theta - \phi)}{(1-\nu)(3+\nu)} - (m+1) \frac{1-\nu}{3+\nu} \left\{ (m-1) \cos (m\theta - \phi) - \cos (m\theta + \phi) \right\} H^{2m} \left. \right\} C_m \\
&\quad + \left\{ 2(1+\nu) \ell n R + (3+\nu) \right\} \frac{H^2}{1-\nu} + 2 \ell n \rho + 1 \left\{ \frac{\rho \cos \phi}{8\pi} \right\} \dots\dots\dots (14)
\end{aligned}$$

V_n を求めるためには,

$$M_{nt} = -\frac{Mr - M\theta}{2} \sin 2\phi + Mr\theta \cos 2\phi$$

$$Q_n = Q_r \cos \phi + Q_\theta \sin \phi$$

より M_{nt} , Q_n を求める。すると V_n は次のようになる。

$$\begin{aligned}
V_n &= Q_n + \frac{\partial M_{nt}}{\partial t} \\
&= -\frac{P}{a} \left[-4(1+\nu) H^2 \rho^{-1} \cos 3\phi C_0 + 2 \left\{ (5-\nu) \cos (\theta + \phi) - 3(3+\nu) H^4 \cos (\theta - 3\phi) \right\} C_1 \right. \\
&\quad + \sum_{m=2}^{\infty} \left\{ (1-\nu)(m-1) m \rho^{m-3} \left\{ -(m-2) \cos (m\theta + 3\phi) - \frac{(1-\nu)}{(3+\nu)} (m+1) \right. \right. \\
&\quad \times (m+2) \cos (m\theta - 3\phi) H^{2m} + m \left\{ (1-\nu)(m+1) (\cos (m\theta - 3\phi) \right. \\
&\quad + (5-\nu) \cos (m\theta - \phi) \left. \right\} \frac{H^{2m-2}}{(3+\nu)} \left. \right\} A_m + (m+1) \rho^{m-1} \left\{ -m \left\{ (1-\nu)(m-1) \cos (m\theta + 3\phi) \right. \right. \\
&\quad - (5-\nu) \cos (m\theta + \phi) \left. \right\} + (1-\nu)m(m-1) \left\{ (1-\nu)(m+1) \cos (m\theta - 3\phi) \right. \\
&\quad + (5-\nu) \cos (m\theta - \phi) \left. \right\} \frac{H^{2m}}{3+\nu} \frac{(m+2)}{(3+\nu)} \left\{ (3+\nu)^2 + (m^2-1)(1-\nu)^2 \right\} \\
&\quad \times \cos (m\theta - 3\phi) H^{2m+2} \left. \right\} C_m \\
&\quad - \left\{ 2 \left\{ 2(1+\nu) \ell n R + (3+\nu) \right\} H^2 \cos \phi - \left\{ (1-\nu) \cos 3\phi + (5-\nu) \right. \right. \\
&\quad \dots\dots\dots (15)
\end{aligned}$$

式(12), (13), (14), (15), に含まれる A_m , C_m を未知数として, 解くことにより点で境界条件を満たすように A_m , C_m を定めることができる。従って未知数 A_m , C_m を含む連立方程式の係数行列を A , 定数項を C とすると,

$$AX = C \quad \dots\dots\dots (16)$$

ここで $X^T = [A_0, A_1, \dots, A_m, C_0, C_1, \dots, C_m]$ である。 C は式(12), (13), (14), (15)中の荷重項すなわち A_m , C_m を含まない項を右辺に移項したものである。境界上にとった点数 N と未定係数の項の数 M を等しくとると, (16)式は

連立方程式として解けるが, (2)節で述べたように $N > M$ の場合, (16)式は連立方程式として解けなくなるので, 最小自乗法の考え方を使って A の転置行列 A^T を左よりかけて正規化する。すなわち,

$$A^T A X = A^T C$$

このようにすると境界上の各点で指定した境界条件からの誤差を最小にするように A_m , C_m を定めることができる。

4. 数 値 計 算

計算例は短形と扇形の有孔板について行った。短形は短形断面ラーメン、扇形は円形断面ラーメンの脚底部に現われる構造である。扇形有孔板についての解析は当日発表の予定である。

短形板については線荷重載荷有孔板と等分布満載荷重短形板について比較した結果を報告する。

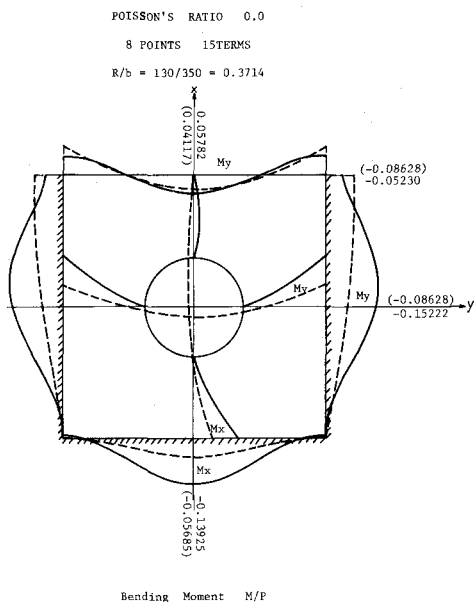


図 - 3

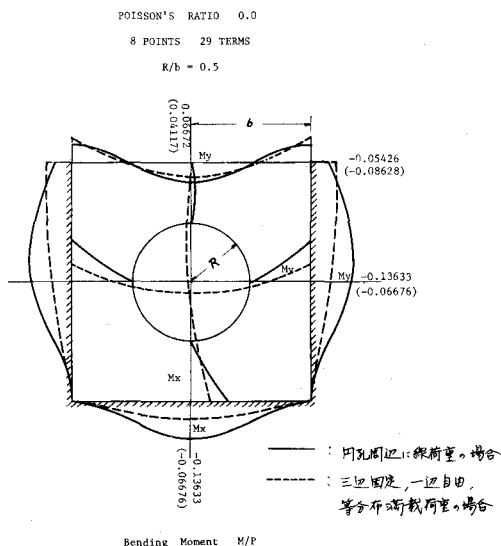


図 - 4

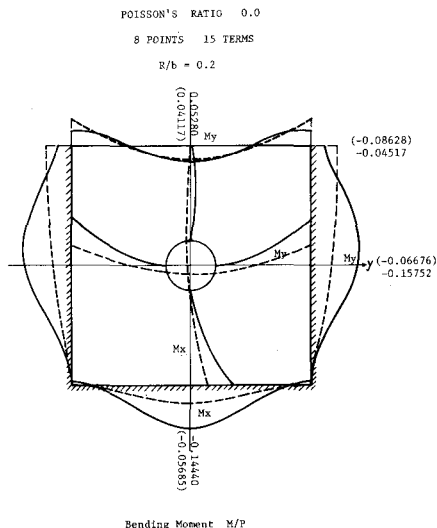


図 - 5

5. あ と が き

*Point matching*法の有孔板への適用について報告した。円孔周辺で厳密に条件を満足できるので、この種の問題に対しては非常に有効であることがわかった。

参 考 文 献

- (1) F. Tolke : Praktische Functionlehre
- (2) H. D. Conway : The Approximate Analysis of Certain Boundary-Value Problems, Jour. App. Mech 1960
- (3) A. W. Leissa and F. W. Nedenfuhr
A Study of the Cantilevered Square Plate Subjected to a Uniform Loading
Jour. Aero. Sciences, Feb. 1962
- (4) G. J. Matthews and C. J. Hooke
Solution of Axisymmetric Torsion Problems By Point Matching Jour. Strian Analy. 1971 Vol 6 No. 2
- (5) A. W. Leissa 他: A Comparison of Approximate Methods for the Solution of Plate Bending Problems AIAA Jour. May 1969 Vol 7 No 5