

ホーロー斯拉ブの応力計算について

正 員 能 町 純 雄 *

正 員 尾 崎 訊 **

学生員 大 島 俊 之 ***

学生員 ○ 佐 藤 博 ***

但し $0 \leq \eta \leq 1$

(1)に(5)を代入

$$\frac{\partial P_s}{\partial s} + Gt \left(\frac{\partial u}{\partial s} + v \right) = 0 \quad (7)$$

(7)に(6-1), (6-2)の関係を代入, s について
0 から s まで積分し, $s=0$ で S_{AB} なることを考えると

$$P_s - S_{AB} + Gt(\dot{u}_B - \dot{u}_A)\eta + Gth \left\{ v_A \left(\eta - \frac{\eta^2}{2} \right) + v_B \frac{\eta^2}{2} \right\} = 0 \quad (8-1)$$

同様に(7)を h から s まで積分し, $s=h$ で $P_s = S_{BA}$
なることを考えると

$$P_s - S_{AB} + Gt(\dot{u}_A - \dot{u}_B)(1-\eta) - \frac{Gth}{2} \left\{ v_A(1-2\eta+\eta^2) + v_B(1-\eta^2) \right\} = 0 \quad (8-2)$$

1. ま え が き

帯板を要素とする折板構造に対して, 本学においては
平面保持を基とする変位せん断方程式⁽¹⁾を設定し, 箱桁
等の諸問題において数多くの研究がなされてきている。
この在来の変位せん断方程式では, せん断力 T は, 法線
力 S と変位とによって表わされており, 解析を進める上
で S の取扱いに種々の仮定⁽²⁾を設け繁雑となっていた。

ここでは, せん断力と法線力をそれぞれ変位のみで表
わした新たな変位公式を示し, これによりホーロースラ
ブの解析が簡単に行なえることを示したものである。

2. 細長い短形板部材における変位せん断方程式

短形板部材について, 図-1のように座標 x, s をと
り, それぞれの方向の変位を u, v とし, 法線力を P_x
 P_s とする。また, せん断力を q とすると次の式が得ら
れる。

$$\frac{\partial P_s}{\partial s} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial s} = 0 \quad (2)$$

$$P_x = \frac{Et}{1-\nu^2} \left(\dot{u} + \nu \frac{\partial v}{\partial s} \right) \quad (3)$$

$$P_s = \frac{Et}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial v}{\partial s} + \nu \dot{u} \right) \quad (4)$$

$$q = Gt \left(\frac{\partial u}{\partial s} + v \right) \quad (5)$$

ここで $\dot{}$ は x での偏微分を表わす。

軸方向変位 u の変化を深さ方向 s に直線的であり, ま
た, 深さ方向の変位 v も同じく直線的であると仮定する
と,

$$u = u_A(1-\eta) + u_B\eta \quad (6-1)$$

$$v = v_A(1-\eta) + v_B\eta \quad (6-2)$$

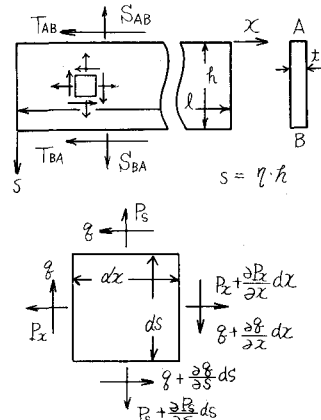


図 - 1

(8-1), (8-2)に(4)を代入, s について0 から
 h まで積分すると, 次の法線力と変位の関係式が得られ

* 室蘭工業大学 教授 工博

** 室蘭工業大学 助教授工修

*** 室蘭工業大学 大学院

$$S_{AB} = \frac{N}{h}(v_B - v_A) + \frac{\nu N}{2}(\dot{u}_A + \dot{u}_B) + \frac{Gt}{2}(\dot{u}_B - \dot{u}_A) + \frac{Gth}{6}(2v_A + v_B) \quad (9-1)$$

$$S_{BA} = \frac{N}{h}(v_B - v_A) + \frac{\nu N}{2}(\dot{u}_A + \dot{u}_B) - \frac{Gt}{2}(\dot{u}_B - \dot{u}_A) - \frac{Gth}{6}(2v_B + v_A) \quad (9-2)$$

ここで $N = \frac{Et}{(1-\nu^2)}$

次に(1)に(3)を代入

$$N(\ddot{u} + \nu \frac{\partial v}{\partial s}) + \frac{\partial q}{\partial s} = \quad (10)$$

(10)に(6-1), (6-2)の関係式を代入, s について 0 から s まで積分し, $s = 0$ で $q = T_{AB}$ なることを考えると

$$q - T_{AB} + \nu N(v_B - v_A)\eta + Nh \left\{ \ddot{u}_A \left(\eta - \frac{\eta^2}{2} \right) + \ddot{u}_B \frac{\eta^2}{2} \right\} = 0 \quad (11-1)$$

3. ホーロースラブの解析

荷重は折板の接合部に作用するものとして解析を行なう。

(a)部材モーメント M および断面のラーメン作用によるせん断力 X

接合点の回転角を θ とすれば, 断面変形に抵抗する曲げモーメント M は, たわみ角公式を用いて,

$$M_{r, r+1} = 2K(2\theta_r + \theta_{r+1} - 3\Delta w_r/b) \quad (13)$$

$$M_{r+1, r} = 2K(2\theta_{r+1} + \theta_r - 3\Delta w_r/b) \quad (14)$$

$$M_{r, R} = 2K_1 \{ 2\theta_r + \theta_R - 3(v_r - v_R)/a \} \quad (15)$$

せん断力 X は

$$bX_{r, r+1} = -6K(\theta_r + \theta_{r+1} - 2\Delta w_r/b) \quad (16)$$

$$aX_{r, R} = -6K_1 \{ \theta_r + \theta_R - (v_r - v_R)/a \} \quad (17)$$

$$X_{r, r+1} = X_{r+1, r}$$

$$\Delta w_r = w_{r+1} - w_r \quad K = \frac{Et^3}{12b(1-\nu^2)} \quad K_1 = \frac{Et^3}{12a(1-\nu^2)}$$

ここで, $M_{r, r+1}$, $X_{r, r+1}$ は, 接合点 r における上側部材 $r, r+1$ のモーメントとせん断力を表す。

(b) 部材接合部における力のつり合式は, 図-3より次のようになる。

$$S_{r, r+1} - S_{r, r-1} - X_{r, R} = 0 \quad (18)$$

$$X_{r, r+1} - X_{r, r-1} + S_{r, R} + P_r = 0 \quad (19)$$

$$T_{r, r+1} + T_{r, r-1} + T_{r, R} = 0 \quad (20)$$

$$M_{r, r+1} + M_{r, r-1} + M_{r, R} = 0 \quad (21)$$

同様に(10)を, s について h から s まで積分し, $s = h$ で $q = T_{BA}$ なることを考えると

$$q - T_{BA} + \nu N(v_A - v_B)(1-\eta) - \frac{Nh}{2} \left\{ \ddot{u}_A(1-2\eta+\eta^2) + \ddot{u}_B(1-\eta^2) \right\} = 0 \quad (11-2)$$

(11-1), (11-2)に(5)を代入, s について 0 から h まで積分すると, せん断力を変位のみで表わした新たな変位せん断方程式が得られる。

$$T_{AB} = \frac{Nh}{6}(2\ddot{u}_A + \ddot{u}_B) + \frac{\nu N}{2}(v_B - v_A) + \frac{Gt}{2}(v_A + v_B) + \frac{Gt}{h}(u_B - u_A) \quad (12-1)$$

$$T_{BA} = \frac{Nh}{6}(2\ddot{u}_B + \ddot{u}_A) + \frac{\nu N}{2}(v_B - v_A) - \frac{Gt}{2}(v_A + v_B) - \frac{Gt}{h}(u_B - u_A) \quad (12-2)$$

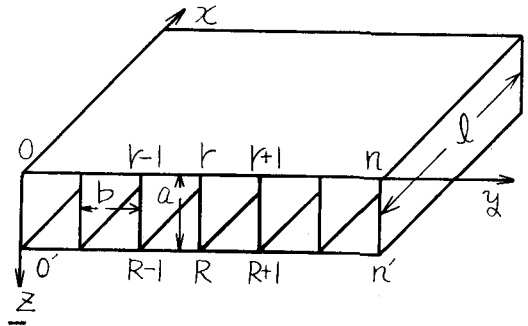


図 - 2

また, 端部材接合部 0 点では次のようになる。

$$S_{0,1} - X_{0,R} + Y_0 = 0 \quad (22)$$

$$X_{0,1} + S_{0,R} + P_0 = 0 \quad (23)$$

$$T_{0,1} + T_{0,R} = 0 \quad (24)$$

$$M_{0,1} + M_{0,R} + M_0 = 0 \quad (25)$$

なを, 他端 n 点においても $n, n-1$ の添字を用いて同様に求める。

(9), (12)~(17)を(18)~(25)に代入すると

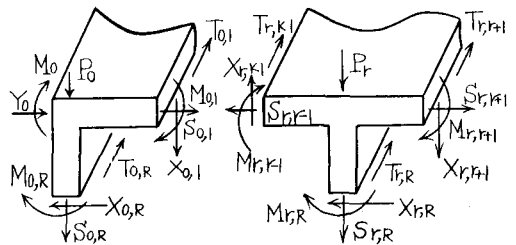


図 - 3

$$\frac{Gtb}{6}(\mathcal{A}^2 \ddot{v}_{r-1} + 6\ddot{v}_r) + \left(\frac{Gt}{2} + \frac{\nu N}{2} \right) \mathcal{A} \dot{u}_{r-1} + \frac{N}{b} \mathcal{A}^2 v_{r-1} + \frac{6K_1}{a} \{\theta_r + \theta_R - 2(v_r - v_R/a)\} = 0 \quad (26)$$

$$\frac{Gta}{6}(2\ddot{w}_r + \ddot{w}_R) + \frac{Gt}{2}(\dot{u}_R - \dot{u}_r) - \frac{\nu N_1}{2}(\dot{u}_r + \dot{u}_R) + \frac{N_1}{a}(w_R - w_r) - \frac{6K}{b}(2\mathcal{A}\theta_{r-1} - \frac{2}{b}\mathcal{A}^2 w_{r-1}) = -P_r \quad (27)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{Nb}{6}(\mathcal{A}^2 \ddot{u}_{r-1} + 6\ddot{u}_r) + \frac{N_1 a}{6}(2\ddot{u}_r + \ddot{u}_R) + \frac{\nu N_1}{2}(\ddot{w}_R - \ddot{w}_r) + \frac{Gt}{2}(\dot{w}_r + \dot{w}_R) + \left(\frac{\nu N}{2} + \frac{Gt}{2} \right) \mathcal{A} v_{r-1} + \frac{Gt}{b} \mathcal{A}^2 u_{r-1} \\ & + \frac{Gt}{a} (u_R - u_r) = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

$$2K(\mathcal{A}^2 \theta_{r-1} + 6\theta_r) - \frac{6K}{b} \mathcal{A} w_{r-1} + 2K_1(2\theta_r + \theta_R) - \frac{6K_1}{a}(v_r - v_R) = 0 \quad (29)$$

ここで、

$$\mathcal{A} f(x-1) = f(x+1) - 2f(x) + f(x-1)$$

$$\mathcal{A} f(x-1) = f(x+1) - f(x-1)$$

$$\frac{Gtb}{6}(2\ddot{v}_0 + \ddot{v}_1) + \frac{Gt}{2}(\dot{u}_1 - \dot{u}_0) + \frac{\nu N}{2}(\dot{u}_0 + \dot{u}_1) + \frac{N}{b}(v_1 - v_0) + \frac{6K_0}{a}\{\theta_0 + \theta_R - 2(v_0 - v_R/a)\} + Y_0 = 0 \quad (30)$$

$$\frac{Gta}{6}(2\ddot{w}_0 + \ddot{w}_R) + \frac{Gt}{2}(\dot{u}_R - \dot{u}_r) + \frac{\nu N_0}{2}(u_r - u_R) + \frac{N_0}{a}(w_R - w_r) - \frac{6K}{b}\{\theta_0 + \theta_1 - 2(w_1 - w_0)/b\} + P_0 = 0 \quad (31)$$

$$\begin{aligned} & \frac{(Nb + N_0 a)}{3} \ddot{u}_0 + \frac{Nb}{6} \ddot{u}_1 - \frac{N_0 a}{6} \ddot{u}_R + \frac{\nu N}{2}(\dot{v}_1 - \dot{v}_0) + \frac{Gt}{2}(\dot{v}_0 + \dot{v}_1) + \frac{Gt}{b}(u_1 - u_0) + \frac{\nu N_0}{2}(\dot{w}_R - \dot{w}_0) \\ & + \frac{Gt}{2}(\dot{w}_0 + \dot{w}_1) + \frac{Gt}{a}(u_R - u_0) = 0 \end{aligned} \quad (32)$$

$$2K(2\theta_0 + \theta_1) + 2K_0(2\theta_0 + \theta_R) - 6K(w_1 - w_0)/b - 6K_0(v_0 - v_R)/a + M_0 = 0 \quad (33)$$

(C) X, Y軸に平行な中心線に対称断面の場合

上下部材に対称な荷重が作用している場合、次のこと

がいえる。

$$\left. \begin{aligned} u_r + u_R &= 0 & v_r + v_R &= 0 \\ w_r - w_R &= 0 & \theta_r - \theta_R &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

さらに、x方向に両端で単純支持され、部材の軸方向には自由に變形でき、かつ、両端でy方向には完全に剛な隔壁でもって變形が阻止されているものとする、

$x=0, \dots, x=l$ で $u_r = v_r = w_r = \theta_r = 0$ になるから $\dot{u}_r, v_r, w_r, \theta_r$ は x に関してフーリエ $\sin$ 級数に変換される。また、 y 方向については差分の形で表わされているのでフーリエ定積分変換(3)を用いると有効である。

(26)~(33)に $G = E/2(1+\nu)$ と(34)の関係を代入して変換を行い、端部材接合部におけるつり合式から求まる y 方向の境界条件とから次の式が得られる。

$$\begin{aligned} & \left\{ \left(\frac{N}{b} - \frac{1-\nu}{12} b N M^2 \right) D_i + \frac{1-\nu}{2} b N M^2 + \frac{24}{a^2} K_1 \right\} V_{im} - \frac{1-\nu}{2} N \sin \frac{i\pi}{n} \dot{U}_{im} - \frac{12}{a} K_1 \theta_{im} = \frac{N}{4} \left\{ (1-\nu) \cos \frac{i\pi}{n} \right. \\ & \left. - 3\nu + 1 \right\} \{ \dot{U}_{nm}(-1)^i - U_{om} \} + \frac{6}{a} (K_1 - 2K_0) \left[\frac{2}{a} \{ v_{nm}(-1)^i + v_{om} \} - \{ \theta_{nm}(-1)^i + \theta_{om} \} \right] \\ & - Y_{nm}(-1)^i + Y_{om} \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} & \left\{ bN + \frac{aN_1}{6} + \frac{1-\nu}{aM^2} N_1 - \left(\frac{b}{6} - \frac{1-\nu}{2bM^2} \right) ND_i \right\} \dot{U}_{im} - \frac{1+\nu}{2} N \sin \frac{i\pi}{n} V_{im} + \frac{1-\nu}{2} NW_{im} \\ & = \left(\frac{b}{6} - \frac{1-\nu}{2bM^2} \right) N \sin \frac{i\pi}{n} \{ \dot{U}_{nm}(-1)^i - \dot{U}_{om} \} \end{aligned} \quad (36)$$

$$\left(\frac{1-\nu}{4} a N_1 M^2 + \frac{12}{b^2} K D_i \right) W_{im} + \frac{1-\nu}{2} N_1 U_{im} - \frac{12}{b} K \sin \frac{i\pi}{n} \theta_{im} = P_{im} - \frac{12}{b^2} K \sin \frac{i\pi}{n} \{ W_{nm}(-1)^i - W_{om} \} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} & \{ 2K(6 - D_i) + 6K_1 \} \theta_{im} - \frac{12}{a} K_1 V_{im} - \frac{12}{b} K \sin \frac{i\pi}{n} W_{im} = \frac{3K}{b} (4 - D_i) \{ W_{nm}(-1)^i - W_{om} \} - M_{nm}(-1)^i - M_{om} \\ & + 3(K_1 - 2K_0) \{ \theta_{nm}(-1)^i + \theta_{om} \} - \frac{2}{a} \{ v_{nm}(-1)^i + v_{om} \} \end{aligned} \quad (38)$$

ここで、 $D_i = 2(1 - \cos i\pi/n)$ $M^2 = (m\pi/l)^2$

また、 $U_{im}, V_{im}, W_{im}, \theta_{im}$ はフーリエ変換と定積分変換を行なったものであり、 $U_{om}, U_{nm}, V_{om}, V_{nm}$

$W_{om}, W_{nm}, \theta_{om}, \theta_{nm}$ は y 方向での境界の値を表したものである。

(35), (38)において $i=0, i=n$ とおくと

$$\left(\frac{1-\nu}{2} b N M^2 + \frac{24}{a^2} K_1 \right) V_{om} - \frac{12}{a} K_1 \theta_{om} = \frac{1-\nu}{2} N (\dot{U}_{nm} - \dot{U}_{om}) + \frac{6}{a} (K_1 - 2K_o) \left\{ \frac{2}{a} (v_{nm} + v_{om}) - \theta_{nm} - \theta_{om} \right\} - Y_{nm} + Y_{nm} \quad (39)$$

$$6(2K + K_1) \theta_{om} - \frac{12}{a} K_1 V_{om} = \frac{12}{b} K (W_{nm} - W_{om}) - M_{om} - M_{om} + 3(K_1 - 2K_o) \{ \theta_{nm} + \theta_{om} - \frac{2}{a} (v_{nm} + v_{om}) \} \quad (40)$$

$$\left\{ \frac{4}{b} N + \frac{1-\nu}{6} b N M^2 + \frac{24}{a^2} K_1 \right\} V_{nm} - \frac{12}{a^2} K_1 \theta_{nm} = -\nu N \{ U_{nm} (-1)^n - \dot{U}_{om} \} + \frac{6}{a} (K_1 - 2K_o) \left[\frac{2}{a} \{ v_{nm} (-1)^n + v_{nm} \} - \{ \theta_{nm} (-1)^n + \theta_{om} \} \right] - Y_{nm} (-1)^n + Y_{om} \quad (41)$$

$$2(2K + 3K_1) \theta_{nm} - 12K_1 V_{nm}/a = -M_{nm} (-1)^n - M_{om} + 3(K_1 - 2K_o) \{ \theta_{nm} (-1)^n + \theta_{om} \} - 2 \{ v_{nm} (-1)^n + v_{om} \} / a \quad (42)$$

(39)~(42)から V_{om} , V_{nm} , θ_{om} , θ_{nm} が求まる。

また, θ_{nm} , θ_{om} , v_{nm} , v_{om} は次の関係式が成立している。

$$\left. \begin{aligned} n v_{nm}/2 &= \sum_{i=0}^n V_{im} (-1)^i & n v_{om}/2 &= \sum_{i=0}^n V_{im} \\ n \theta_{nm}/2 &= \sum_{i=0}^n \theta_{im} (-1)^i & n \theta_{om}/2 &= \sum_{i=0}^n \theta_{im} \end{aligned} \right\}$$

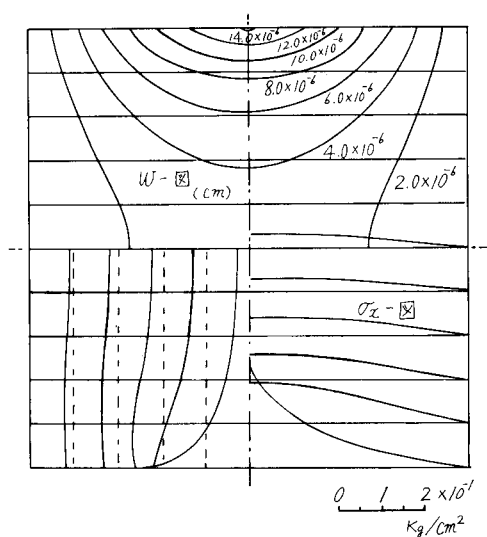


図 - 4

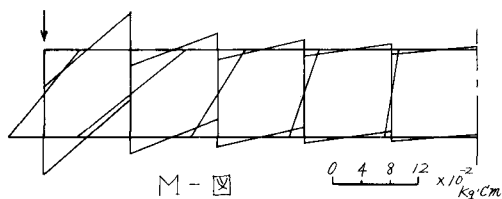


図 - 5

(43)により W_{nm} , W_{om} , $\dot{U}_{nm}$, $\dot{U}_{om}$ は端部材接合部におけるつり合から得られる y 方向の境界条件式から求まる。

以上より(35)~(38)の4元の連立方程式を解いて逆変換式から $\dot{u}$, v , w , θ が求まり $\dot{u}$ に弾性係数 E を乗ずると σ_x が得られる。

4. 数 値 計 算 例

端隔壁のたわみ剛性 K_o を他の隔壁 K_1 の半分とすると,

(35), (38)で v_{nm} , v_{om} , θ_{nm} , θ_{om} の項は削除される。

例として $r = 0$, n で単純支持された場合と自由端である場合についてそれぞれ計算を行った。

(a) 単純支持, 単集中荷重載荷

$$W_{nm} = W_{om} = \dot{U}_{nm} = \dot{U}_{om} = 0$$

$$P_{im} = P \sin \frac{m\pi f}{\ell} \sin \frac{i\pi c}{n}$$

(b) 自由端, 両端部に集中荷重載荷

$$P_{om} = P_{nm} = P \sin \frac{m\pi f}{\ell}$$

なお, 図は自由端で両端部に集中荷重が載荷されている場合の例である。計算に用いた断面諸元は次に示すごとくである。

$$n = 10, \quad \ell = 100\text{cm}, \quad a = b = 10\text{cm}, \quad t = 1.0\text{cm}$$

$$t_1 = 2.0\text{cm}, \quad E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2, \quad \nu = 0.15,$$

$$P = 1 \text{ kg}, \quad f = \ell / 2$$

5. あ と が き

以上, 新しい型の変位せん断方程式を示し, これとフーリエ定和変換を用いてホーローシートの応力解析を行った。構造は複雑ではあるが4元の連立方程式を解き繰返し計算を行うことにより簡単に解析が出来た。なを, この研究は文部省科学研究費補助金(試験研究)を受けて行なったものの一部である。

参 考 文 献

(1) 能町純雄：剛なダイヤフラムで等区画に分けられる薄肉長方形箱桁の曲げねじれについて，土木学会論文集 146号（昭和42. 10）

(2) S. G. Nomachi : On Bending of Multi-

Equi-Cell Plate 室蘭工業大学紀要 Vol 6
No.2 1968

(3) S. G. Nomachi : On Finite Fouier Sine
Series with Respect to Fivite Defferences
室蘭工業大学紀要 Vol 5 No.7 1965