

沈埋構造物の帯板要素法による応力解析

正員 能 町 純 雄*

正員 松 岡 健 一**

学生員 ○ 越 後 隆 一***

1. ま え が き

交通量の増加や都市の美観上のため地下埋設構造物が多くなって来ているが、これら構造物は断面方向にはラーメン構造、軸方向には弾性床土の桁として解析されている。

土かぶりが多い場合はこれで十分であると思われるが、しかし比較的土かぶりが浅い *Opencut* 法や沈埋工法等ではラーメン方向に比べて軸方向にはどの位の応力が存在しているか、又は *BOX* の中に作用する荷重がどのような影響を与えるか興味の注る問題である。これらの問題を扱う手法として帯板要素法を *Box Culvert* に応用し、ラーメン作用と側壁応力とを相関させて立体的に応力解析を試みた。

モーメント：

$$\left. \begin{aligned} M_{r,r+1} &= \frac{N}{k\lambda} \left\{ \beta\theta_r + 2\alpha\theta_{r+1} - \frac{\phi w_{r+1} - \phi w_r}{\lambda} \right\} - \nu N \ddot{w}_r \\ M_{r,r-1} &= -\frac{N}{k\lambda} \left\{ \beta\theta_r + 2\alpha\theta_{r-1} - \frac{\phi w_r - \phi w_{r-1}}{\lambda} \right\} - \nu N \ddot{w}_r \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

せん断力：

$$\left. \begin{aligned} Q_{r,r+1} &= \frac{(2JM_{r+1,r} - DM_{r,r+1})}{\lambda} - \frac{N(1-\nu)(2J\ddot{w}_{r+1} - D\ddot{w}_r)}{\lambda} + \lambda \{ (\beta\ddot{M}_{r,r+1} + 2\alpha\ddot{M}_{r+1,r}) \\ &\quad - N(1-\nu)(\beta\ddot{w}_r + 2\alpha\ddot{w}_{r+1}) \} - K\lambda\beta w_r - K\lambda 2\alpha w_{r+1} \\ Q_{r,r-1} &= \frac{(DM_{r,r-1} - 2JM_{r-1,r})}{\lambda} - \frac{N(1-\nu)(D\ddot{w}_r - 2J\ddot{w}_{r-1})}{\lambda} - \lambda \{ (2\alpha\ddot{M}_{r-1,r} + \beta\ddot{M}_{r,r-1}) \\ &\quad - N(1-\nu)(2\alpha\ddot{w}_{r-1} + \beta\ddot{w}_r) \} + K\lambda 2\alpha w_{r-1} + K\lambda\beta w_r \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

$$c = 4 \sqrt{\frac{K}{N} \frac{\lambda^4}{\pi^4}} \quad K: \text{地盤反力係数}, \lambda: \text{帯板の巾}$$

$$N = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad E: \text{弾性係数}, t: \text{厚さ}, \nu: \text{ポアソン比}$$

$$\left. \begin{aligned} A \\ J \end{aligned} \right\} = \frac{\pi c}{H} \left\{ \cosh \frac{\pi c}{\sqrt{2}} \sin \frac{\pi c}{\sqrt{2}} \pm \sinh \frac{\pi c}{\sqrt{2}} \cos \frac{\pi c}{\sqrt{2}} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} B \\ D \end{aligned} \right\} = \frac{\pi c}{H} \left\{ \sinh \sqrt{2} \pi c \pm \sin \sqrt{2} \pi c \right\}$$

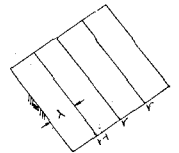


図 - 1

** 室蘭工業大学教授 工博
 ** 室蘭工業大学助教授 工修
 *** 室蘭工業大学大学院

$$H = \cosh \sqrt{2\pi c} - \cos \sqrt{2\pi c}, \quad \alpha = \frac{A}{c^2 \pi^2}, \quad \beta = \frac{B}{c^2 \pi^2}, \quad k = \beta^2 - 4\alpha^2, \quad \varphi = 4\alpha J + BD, \quad \phi = 2JB + 2D\alpha$$

3-2 普通平板の帯板要素式⁽¹⁾

帯板の境界 r 点でのモーメント，せん断力

モーメント：

$$\left. \begin{aligned} M_{r,r+1} &= \frac{2N}{\lambda} \left\{ 2\theta_r + \theta_{r+1} - \frac{3(w_{r+1} - w_r)}{\lambda} \right\} - \nu N w_r \\ M_{r,r-1} &= -\frac{2N}{\lambda} \left\{ 2Q_r + Q_{r-1} - \frac{3(w_r - w_{r-1})}{\lambda} \right\} - \nu N w_r \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

せん断力：

$$\left. \begin{aligned} Q_{r,r+1} &= \frac{M_{r+1,r} - M_{r,r+1}}{\lambda} = \frac{N(1-\nu)(w_{r+1} - w_r)}{\lambda} + \frac{\lambda}{6} \{ (2M_{r,r+1} + M_{r+1,r}) - N(1-\nu)(2w_r + w_{r+1}) \} \\ Q_{r,r-1} &= \frac{M_{r,r-1} - M_{r-1,r}}{\lambda} = \frac{N(1-\nu)(w_r - w_{r-1})}{\lambda} - \frac{\lambda}{6} \{ (2M_{r,r-1} + M_{r-1,r}) - N(1-\nu)(2w_r + w_{r-1}) \} \end{aligned} \right\} \dots\dots (4)$$

$$\left. \begin{aligned} T_{r,r+1} &= Et\lambda(2u_r + u_{r+1}) + \frac{S_{r,r+1} - S_{r+1,r}}{\lambda} \\ Gt v_s &= Gt \frac{u_r - u_{r-1}}{\lambda} + \frac{S_{r,r+1} - S_{r+1,r}}{\lambda} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

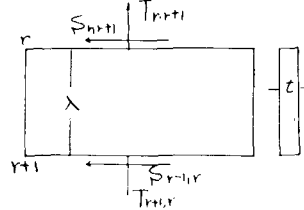


図-2

4. 各節点の力のつり合

4-1 つり合条件式

A 点

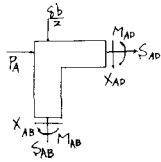


図-4

$$\Sigma M = 0 : M_{AD} + M_{AB} = 0 \dots\dots\dots (6)$$

$$\Sigma V = 0 : \frac{qb}{2} + S_{AB} + X_{AD} = 0 \dots\dots\dots (7)$$

$$\Sigma H = 0 : P_A + S_{AD} - X_{AB} = 0 \dots\dots\dots (8)$$

$$\Sigma T = 0 : T_{AD} + T_{AB} = 0 \dots\dots\dots (9)$$

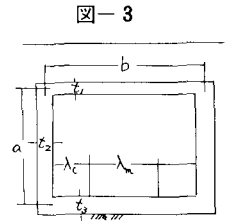


図-3

B 点

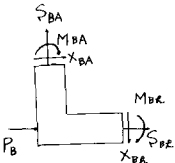


図-5

$$\Sigma M = 0 : M_{BA} + M_{Bh} = 0 \dots\dots\dots (10)$$

$$\Sigma V = 0 : S_{BA} - X_{Bh} = 0 \dots\dots\dots (11)$$

$$\Sigma H = 0 : P_B + S_{Bh} + X_{BA} = 0 \dots\dots\dots (12)$$

$$\Sigma T = 0 : T_{BA} + T_{Bh} = 0 \dots\dots\dots (13)$$

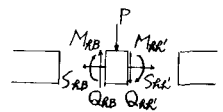
h 点

$$\Sigma M = 0 : M_{hB} + M_{hh'} = 0 \dots\dots\dots (14)$$

$$\Sigma V = 0 : Q_{hh'} - Q_{hB} = -P \dots\dots\dots (15)$$

$$\Sigma H = 0 : S_{Bh} - S_{hh'} = 0 \dots\dots\dots (16)$$

$$\Sigma T = 0 : T_{hB} + T_{hh'} = 0 \dots\dots\dots (17)$$



$$v_{hB} = v_{hh'} : Gt_3 \frac{v_B - v_h}{\lambda_\ell} + \frac{S_{Bh} - S_{Bh'}}{\lambda_\ell} = Gt_3 \frac{u_h - u_{h'}}{\lambda_m} + \frac{S_{hh'} - S_{hh'}}{\lambda_m} \dots\dots\dots (18)$$

(5) より

$$Gt_2 w_B = Gt_2 \frac{v_A - v_B}{a} + \frac{S_{AB} - S_{BA}}{a} \dots\dots\dots (19)$$

X : 代償せん断力を考慮した板のせん断力

△-2 つり合条件式より求まる微分方程式

(6) より

$$\frac{4}{a} \left\{ \frac{N_2}{N_1} + \frac{a}{b} \right\} \theta_A + \frac{2}{a} \frac{N_2}{N_1} \theta_B + \frac{2}{b} \theta_D - \nu w_B + \frac{6}{b^2} \ddot{w}_B - \frac{6}{b^2} w_C = -\frac{1}{N_1} \{C_{AD} + C_{AB}\} \quad (20)$$

(10) より

$$\frac{2}{a} \frac{N_2}{N_3} \theta_A + \frac{1}{\lambda_\ell} \left\{ 2 - \frac{\lambda_\ell}{a} \frac{N_2}{N_3} + \frac{\beta_\ell}{k_\ell} \right\} \theta_B + \frac{1}{\lambda_\ell} \frac{2\alpha_\ell}{k_\ell} \theta_h - \nu w_B + \frac{1}{\lambda_\ell^2 k_\ell} w_B - \frac{1}{\lambda_\ell^2 k_\ell} w_h = -\frac{1}{N_3} C_{BA} \quad (21)$$

(15) より

$$\frac{1}{\lambda_\ell} \frac{2\alpha_\ell}{k_\ell} \theta_B + \frac{1}{\lambda_\ell} \left\{ \frac{\beta_\ell}{k_\ell} + \frac{\lambda_\ell \beta_m}{\lambda_m k_m} \right\} \theta_h + \frac{1}{\lambda_m} \frac{2\alpha_m}{k_m} \theta_{h'} + \frac{1}{\lambda_\ell^2 k_\ell} w_B - \frac{1}{\lambda_\ell^2 k_\ell} w_h - \frac{1}{\lambda_m^2 k_m} w_{h'} = 0 \quad (22)$$

(16) より

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\lambda_\ell^2 k_\ell} \theta_B + \frac{1}{\lambda_\ell^2 k_\ell} \theta_h - \frac{1}{\lambda_m^2 k_m} \theta_{h'} - \lambda_\ell^2 2\alpha_\ell \ddot{w}_B + \frac{1}{\lambda_\ell} f(\ell) \ddot{w}_B - \frac{1}{\lambda_\ell^2} g(\ell) w_B - \lambda_\ell \left\{ \beta_\ell + \frac{\lambda_m \beta_m}{\lambda_m} \right\} w_h + \frac{1}{\lambda_\ell} \left\{ p(\ell) + \frac{\lambda_\ell}{\lambda_m} p^{(m)} \right\} w_h \\ & - \frac{1}{\lambda_\ell^3} \left\{ v(\ell) + \frac{\lambda_\ell^3}{\lambda_m^3} v^{(m)} \right\} w_h - \lambda_m 2\alpha_m \ddot{w}_{h'} + \frac{1}{\lambda_m} f^{(m)} \ddot{w}_{h'} - \frac{1}{\lambda_m^3} g^{(m)} w_{h'} = -\frac{P}{N_3} \end{aligned} \quad (23)$$

(9) と (19) より

$$Gat_2 w_B + 2Ea(at_2 + bt_1) \ddot{u}_A - Gt_2 \dot{u}_A + Ea^2 t_2 \ddot{u}_B + Gt_2 \dot{u}_B + Eabt_1 \ddot{u}_D + \frac{a}{b} (S_{AD} - S_{DA}) = 0 \quad (24)$$

(13), (18), (19) より

$$\begin{aligned} & -Gat_2 \ddot{w}_B + Ea^2 t_2 \ddot{u}_A + Gt_2 \dot{u}_A + 2Ea(at_2 + \lambda_\ell t_3) \ddot{u}_B - G \left(t_2 + \frac{t_3}{\lambda_\ell} a \right) \dot{u}_B + E\lambda_\ell at_3 \ddot{u}_h + Gat_3 \left(\frac{1}{\lambda_\ell} + \frac{1}{\lambda_m} \right) \dot{u}_h \\ & - G\alpha \frac{t_3}{\lambda_m} u_{h'} + \frac{a}{\lambda_m} (S_{hh'} - S_{h'h}) = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

(17), (18) より

$$E\lambda_\ell \ddot{u}_B + G \frac{1}{\lambda_\ell} \dot{u}_B + 2E(\lambda_\ell + \lambda_m) \ddot{u}_h - G \left(\frac{1}{\lambda_\ell} + \frac{1}{\lambda_m} \right) \dot{u}_h + E\lambda_m \ddot{u}_{h'} + G \frac{1}{\lambda_m} u_{h'} = 0 \quad (26)$$

(7), (11), (19) より

$$\begin{aligned} & -\frac{N_1}{N_3} \nu \ddot{\theta}_A - \frac{6N_1}{b^2 N_3} \theta_A - \nu \ddot{\theta}_B + \frac{1}{\lambda_\ell^2 k_\ell} \theta_B + \frac{1}{\lambda_\ell^2 k_\ell} \theta_h + \frac{6N_1}{b^2 N_3} \theta_D + \lambda_\ell \left(-\frac{b}{3\lambda_\ell} \frac{N_1}{N_3} + \beta_\ell \right) \ddot{w}_B - \frac{1}{\lambda_\ell} \left\{ p(\ell) + \frac{G}{N_3} t_2 a \lambda_\ell + 2 \frac{\lambda_\ell N_1}{b N_3} \right\} \ddot{w}_B \\ & + \frac{1}{\lambda_\ell^3} \left\{ v(\ell) + 6 \frac{\lambda_\ell^3 N_1}{b^3 N_3} \right\} w_B + \lambda_\ell \cdot 2\alpha_\ell \cdot w_h - \frac{1}{\lambda_\ell} f(\ell) \ddot{w}_h + \frac{1}{\lambda_\ell^3} g(\ell) \ddot{w}_h + \frac{b}{6} \frac{N_1}{N_3} w_C + \frac{b}{3} \frac{N_1}{N_3} w_C + \frac{2}{b} \frac{N_1}{N_3} \ddot{w}_C + \frac{G}{N_3} t_2 \dot{u}_A - \frac{G}{N_3} t_2 \dot{u}_B \\ & = \frac{1}{N_3} \left\{ \frac{C_{DA} - C_{AD}}{b} + \frac{ab}{2} \right\} \end{aligned} \quad (26)$$

C** : ラーメン荷重項

条件を考えて消去する。

$$d = k_\ell \left\{ \frac{\varphi_\ell}{k_\ell} - \frac{\lambda_\ell^2 \varphi_m}{\lambda_m^2 k_m} \right\} \quad f(i) = \frac{2\alpha_i \varphi_i - \beta_i \phi_i}{k_i} - 2J_i$$

これらの方程式に

i) 土圧のみが作用する場合

構造, 荷重とも対称となるので次の条件を代入

$$w_B = w_C, \quad u_A = u_D, \quad \theta_A = -\theta_D$$

$$w_h = w_{h'}, \quad u_h = u_{h'}, \quad \theta_h = -\theta_{h'}$$

$$S_{AD} - S_{DA} = 0, \quad S_{hh'} - S_{h'h} = 0$$

② Point load のみが底版に作用する場合

a) 対称荷重

条件は上述と同じ

以上の微分方程式が求まる。

なお, ②4, ②5式中の S (法線力) は次の対称, 送対称

b) 逆対称荷重

$$w_B = -w_C, \quad u_A = -u_D, \quad \theta_A = \theta_D$$

$$w_h = -w_{h'}, \quad u_h = -u_{h'}, \quad \theta_h = \theta_{h'}$$

$$S_{AD} - S_{DA} = 2S_{AD} = 2 \left\{ N_2 \left(\nu \theta_A - \frac{6}{a^2} \theta_A - \frac{6}{a^2} \theta_B \right) + \frac{C_{AB} - C_{BA}}{a} - P_A \right\}$$

$$S_{hh'} - S_{h'h} = 2S_{hh'} = 2S_{hh'} = 2 \left\{ \frac{\lambda_m N_2}{b} \left\{ -\nu \theta_B + \frac{6}{a^2} \theta_B + \frac{6N_2}{a^2} \theta_A \right\} - \frac{\lambda_m (C_{AB} - C_{BA})}{ab} - \frac{\lambda_m P_B}{b} - Gt_3 \dot{u}_h + G \frac{\lambda_m t_3}{b} \dot{u}_B \right\}$$

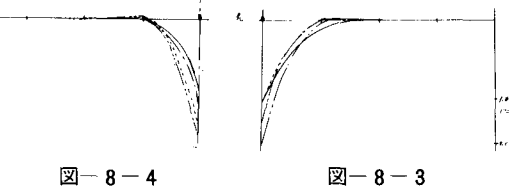
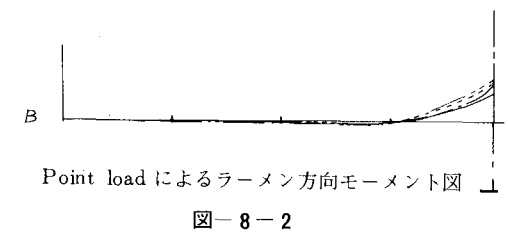
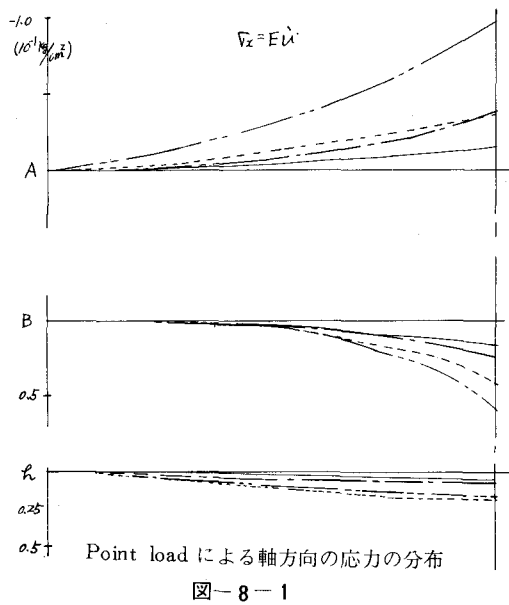
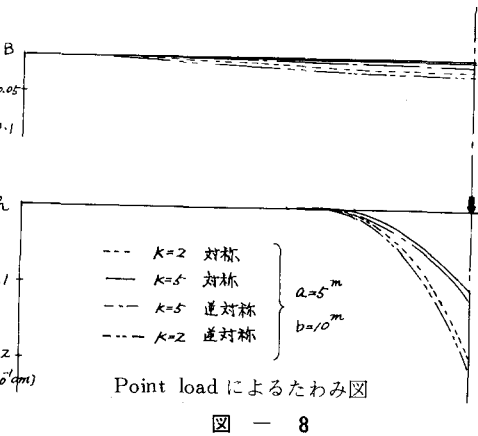
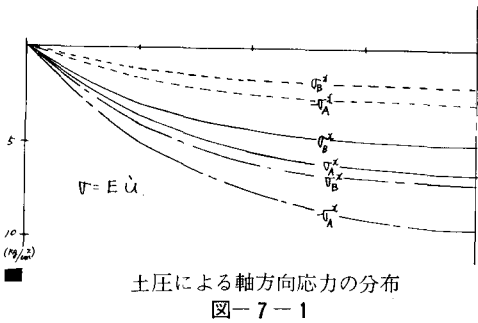
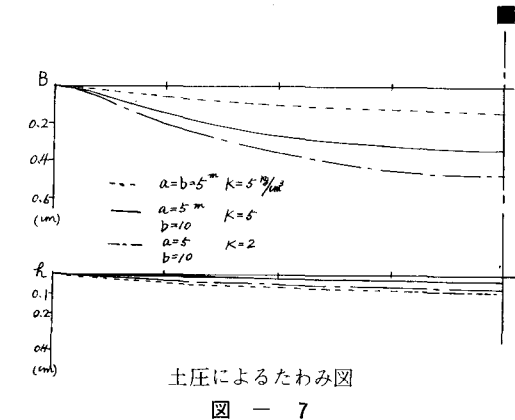
を代入する事により8元連立微分方程式を解く事に帰着する。この式この式を x 方向にフーリエ変換する事により各値を求める。

5. 数 値 計 算

諸値

$$E=3.0 \times 10.5 \text{ kg/cm}^2, \nu=0.0, \gamma \text{ (tの単重)} = 1.65 \text{ t/m}^3 \text{ 内部度}$$

$$\text{擦角} 30^\circ, \text{粘着力なし}, \ell=5000 \text{ cm}$$



6. む す び

土圧による影響は明らかにラーメン方向に大きく軸方向にはほとんど問題がないと思われた。しかし Point, load による影響は極部的で応力集中を呈している、将来交通輸送の大型化に伴ない比較的浅い又はまったく土かぶりがない場合等は問題があるように思われる。なお Point load の下でモーメントは不連続になるのに有限値として与えてあるが分割数を細かくすると無限になる。