

フィーレンデル桁の弾塑性解析と計算

正 員 渡 辺 昇*
 学生員 ○阿 部 芳 昭**

1. ま え が き

骨組構造物の弾塑性解析は、その初期において、Philip. G. Hodge⁽¹⁾、田中尚氏⁽²⁾などが行なってきた様に、機構法、モーメント分配法、線形計画法等を用いたものが多かった。しかし、近年、電子計算機の急速な発達に伴ない 弾性解析における同様に、マトリックス法による解析が盛んであり、その例としては、A. Jennings ら⁽³⁾、服部正氏ら⁽⁴⁾、上田幸雄氏ら⁽⁵⁾、藤田譲氏ら⁽⁶⁾、また、山本善之氏ら⁽⁷⁾を始めその他数多く発表されている。ここでは、フィーレンデル桁の弾塑性解析を行なうための第1ステップとして、E. C. Pestel and F. A. Leckie のマトリックス法⁽⁸⁾を用い、軸方向力と曲げ応力を考慮した単純弾塑性解析で、塑性ヒンジ発生過程を追跡し、内的多次不静定であるこの桁の構造特性を調べようとするものである。

2. 仮 定

- (1) 応力-ひずみの関係は、図-1に示されている様に、降伏点まで比例的であり、これを越すと、ひずみが無制限に増大する完全弾塑性体とする。
- (2) 塑性ヒンジ以外の点では、すべて弾性限界内にあるとする。
- (3) 塑性ヒンジの入った点では、任意の角度だけ回転

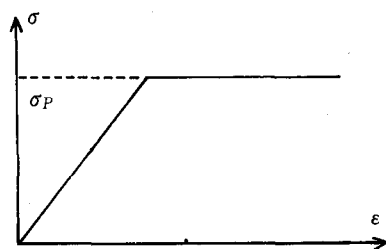


図-1

できる。ただし、横倒れ座屈を考慮しない。

(4) 崩壊に寄与する断面力は、曲げモーメントと軸力だけとする。

(5) 荷重は、集中荷重のみを扱い、比例的に増大するものとする。

(6) 部材は、節点間では均質一様断面とする。

3. 解析方法

弾性力学において、外力の作用する構造物が釣り合いを保つためには、次の3条件を必要とする。

$$\{v\} = [A] \{d\} \quad (3.1)$$

$$\{P\} = [k] \{v\} \quad (3.2)$$

$$\{F\} = [A]^T \{P\} \quad (3.3)$$

ここで、

$\{v\}$: 各節点に於ける部材の変形を表わす列マトリックス

$[A]$: 変位変換マトリックス

$\{d\}$: 各節点における、外力による変位を表わす列マトリックス

$\{P\}$: 各節点における、部材の断面力を表わす列マトリックス

$[k]$: 要素剛性マトリックス ; 各部材の剛性を表わす正方マトリックス

$\{F\}$: 各節点に作用する、外力を表わす列マトリックス

上記の変位変換マトリックス $[A]$ は、部材の変形と節点の変位の関係を表わすものであるが、要素は、 $d_i=1$ とし、他の変位 $d_j=0$ ($j=1, 2, \dots, r$; ただし $j \neq i$) とした時の変形に等しくなる⁽⁸⁾。ここで、変形、および断面力の正の方向を図-2の様にする。

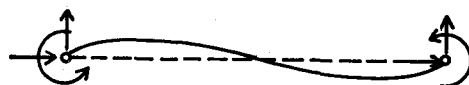


図-2

* 北海道大学工学部教授 工学博士

** 北海道大学工学部大学院

たとえば、図-3の様な傾き α をもったA端においては、(3.4)の様な要素をとる。

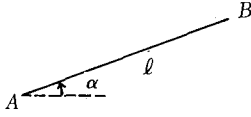


図-3

$$[A] = \begin{matrix} u_A \\ \phi_A \\ \phi_B \end{matrix} \begin{bmatrix} x_A & y_A & \theta_A \\ -\cos \alpha / l & -\sin \alpha / l & 0 \\ -\sin \alpha / l & \cos \alpha / l & 0 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

また要素剛性マトリックス $[k]$ の要素は、従来の内力と変形の関係、たとえば、撓角法等からただちに求まり、次式で表わされる。

$$[k] = N \begin{matrix} u & \phi_A & \phi_B \\ \begin{bmatrix} EA/l & 0 & 0 \\ 0 & 4EI/l & 2EI/l \\ 0 & 2EI/l & 4EI/l \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (3.5)$$

ところで(3.1)、(3.2)式より(3.6)式が、(3.6)、(3.3)式より(3.7)式が求まる。

$$[P] = [k][A][d] \quad (3.6)$$

$$[F] = [A]^T[k][A][d] \\ = [K][d] \quad (3.7)$$

ここで $[K]$ ：構造物全体の剛性マトリックス

また

$$[F] = \begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \end{bmatrix}$$

$[F_0]$ ：実作用外力

$[F_1]$ ：ゼロ外力

とすると、 $[F_0]$ 、 $[F_1]$ に対する $[K]$ 、 $[d]$ も分割して次の様に表わす。

$$\begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

(3.8)において $[F_1] = 0$ とおけるから、これより、

$$[d_1] = -[K_{22}]^{-1}[K_{21}][d_0] \quad (3.9)$$

$$[F_0] = ([K_{11}] - [K_{12}][K_{22}]^{-1}[K_{21}])[d_0] \\ = [K_f][d_0] \quad (3.10)$$

ここで $[K_f]$ は、解析に使用する構造物の剛性マトリックスであり、このマトリックスの行列式 $|K_f| = 0$ となると解析している構造物は剛体運動を起し、崩壊したものととする。マトリックス $[A]$ は同様に、実作用外力に対応する $[A_0]$ とゼロ外力に対応する $[A_1]$ に分割できるので、 $[K_{11}]$ 、 $[K_{12}]$ 、 $[K_{21}]$ 、 $[K_{22}]$ は(3.12)～(3.15)で表わされる。

$$[K_{11}] = [A_0]^T[k][A_0] \quad (3.12)$$

$$[K_{12}] = [A_0]^T[k][A_1] \quad (3.13)$$

$$[K_{22}] = [A_1]^T[k][A_1] \quad (3.14)$$

$$[K_{21}] = [K_{12}]^T \quad (3.15)$$

この様な計算により、弾性時の応力が(3.2)式から求まる。この弾性時応力のうち最大の応力が降伏応力となる様に外力 $[F]$ を α 倍すると、最初の塑性ヒンジはその点で発生する。この乗数 α は次の様にして求める事ができる。

降伏関数 f を次式で表わす。

$$f(M/M_0, N/N_0) = (M/M_0) + C(N/N_0)^2 - 1 \quad (3.16)$$

$$= m + Cn^2 - 1 \quad (3.17)$$

ここで C ：形状係数であり断面形により変化する値

M_0 ：単純曲げによる降伏曲げモーメント

N_0 ：単純軸力による降伏軸方向力

今、外力 $[F]$ を α 倍すると、最初の荷重による値 m_0 、 n_0 は、次式の様になる。

$$\left. \begin{matrix} m_1 = \alpha_1 m_0 \\ n_1 = \alpha_1 n_0 \end{matrix} \right\} \quad (3.18)$$

これを(3.16)式に代入して、

$$f(m_1, n_1) = 0$$

とおくと、これより次式が導びかれる。

$$\alpha_1 = \frac{-m_0 + \sqrt{m_0^2 + 4cn_0}}{2cn_0} \quad (3.19)$$

この α_1 は各節点毎に与えられるが、この中の最小値を α_1^{min} で表わすと、これを用いて、外力は、(3.20)式で表わされ、外力がこの大きくなった時に、 α_1^{min} を与えた点で最初の塑性ヒンジが発生する。

$$[F_0]^1 = \alpha_1^{min} [F_0] \quad (3.20)$$

この時の断面力、たわみは、同様にして、

$$[P]^1 = \alpha_1^{min} [P]$$

$$[d]^1 = \alpha_1^{min} [d]$$

で表わされる。次の塑性ヒンジを追跡するため、さらに荷重を増加させてゆくが、この時の増加荷重に対して用いる剛性マトリックスは、塑性ヒンジの入った点をヒンジとした場合の構造物の剛性マトリックスである。新しく塑性ヒンジが発生する時の増加荷重として

$$[\Delta F]^{i+1} = \alpha_{i+1} [F_0] \quad (3.21)$$

を考えると、各点の m 、 n の値は、次式で与えられる。

$$\left. \begin{matrix} m_{i+1} = m_i + \alpha_{i+1} m_0 \\ n_{i+1} = n_i + \alpha_{i+1} n_0 \end{matrix} \right\} \quad (3.22)$$

これを(3.17)式に代入して、

$$f(m_{i+1}, n_{i+1}) = 0$$

とおくと次式が導びかれる。

$$a_{i+1} = -(m_0 + 2cn_i n_0) + \sqrt{(m_0 + 2cn_i n_0)^2 + 4cn_i^2 (m_i + cn_i^2 - 1)} \quad (3.23)$$

この α_i の中で最小値を与える点で新しい塑性ヒンジが発生する。この時の荷重は次式で与えられる。

$$[F]^{i+1} = [F]^i + \alpha_i^{\text{pl}} [F_0] \quad (3.24)$$

ところで、図-4の様なI形断面を考えると、この時の全塑性断面係数 Z_p は、(3.25)式で表わされ、形状係数 c は、これを用いて(3.26)の様に表わされる。

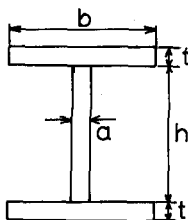


図-4

$$Z_p = tb(h+t) + \frac{1}{4}ah^2 \quad (3.25)$$

$$c = \frac{A^2}{4aZ_p} \quad (3.26)$$

ここで A : 各部材の断面積

4. 計算例

3. で行なった解析方法を用いて電子計算機のプログラムを組み立て、フィーレンデル桁の計算を行った。そのフローチャートは表-1の様である。計算例(1)では、詳細説明するため、図-5(a)の様な簡単な構造を例にとり、この塑性ヒンジの発生過程を追ってみた。また、計算例(2)以下においては、フィーレンデル桁の実際について取り扱った。しかし、計算例(2)以下は、紙面の都合上当日発表する。

計算例(1)

$$[A_1] = \begin{matrix} u_I \\ \phi_I^1 \\ \phi_I^2 \\ u_{II} \\ u_{II}^2 \\ u_{II}^3 \end{matrix} \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 1/2\ell & -\sqrt{3}/2\ell \\ 1/2\ell & -\sqrt{3}/2\ell \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 1/2\ell & \sqrt{3}/2\ell \\ 1/2\ell & \sqrt{3}/2\ell \end{bmatrix} \quad [A_0] = \begin{matrix} \theta_2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \quad (4.1)$$

$$\begin{matrix} u_{II} \\ u_{II}^2 \\ u_{II}^3 \end{matrix} \begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 1/2\ell & \sqrt{3}/2\ell \\ 1/2\ell & \sqrt{3}/2\ell \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

$$[k] = \begin{matrix} N_I \\ M_I^1 \\ M_I^2 \\ N_{II} \\ M_{II} \\ M_{II}^2 \end{matrix} \begin{bmatrix} EA/\ell & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4EI/\ell & 2EI/\ell & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2EI/\ell & 4EI/\ell & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & EA/\ell & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4EI/\ell & 2EI/\ell \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2EI/\ell & 4EI/\ell \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

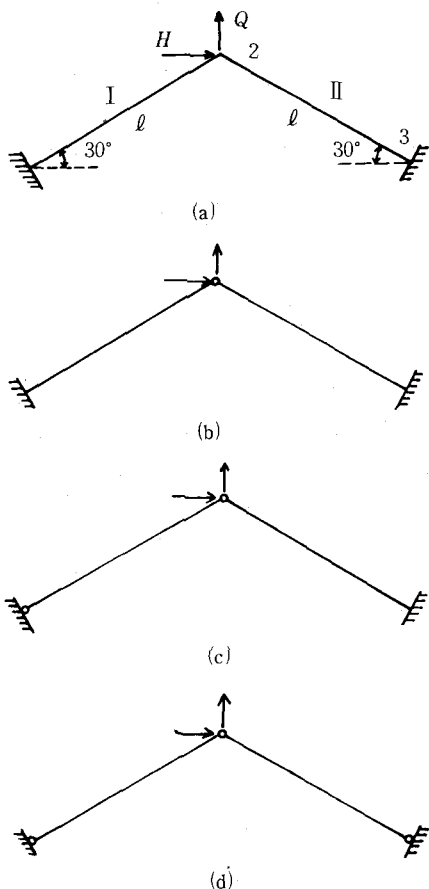


図-5 (a) (b) (c) (d)

図-5の構造形の変位変換マトリックス $[A_0]$, $[A_1]$ および、要素剛性マトリックスは(4.1)(4.2)(4.3)で表わされる。

以下の計算手順は、図-4において、

$$a = 1 \text{ cm}, b = 10 \text{ cm}, h = 10 \text{ cm}, t = 1 \text{ cm}$$

とし、図-5において、

$$H = 3 \text{ Rkg}, Q = 2 \text{ Rkg}, \varrho = 100 \text{ cm}$$

の場合について数値計算で示す。(3, 10) 式より、

$$[K_f] = \begin{bmatrix} 0.4510 & 0 \\ 0 & 0.1624 \end{bmatrix} E \quad (4.4)$$

となり、この時の断面力は(3.6)式より、

$$[P] = \begin{bmatrix} N_I \\ M_I^1 \\ M_I^2 \\ N_{II} \\ M_{II}^2 \\ M_{III}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.575 \\ -3.726 \\ -4.415 \\ 0.119 \\ 4.415 \\ 5.103 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

ここで各節点での α の値を(3.19)式から求め、その最小値をさがすと節点2でその値を与える。

$$[F_1]^1 = \alpha_1^{\min} [F_1] = \begin{bmatrix} 4.034 \\ 2.689 \end{bmatrix} \times 10^4 R \quad (4.6)$$

となる。またこの時の断面力は、

$$[P] = \begin{bmatrix} 4.808 \\ -5.011 \\ -5.938 \\ 0.160 \\ 5.938 \\ 6.863 \end{bmatrix} \times 10^4 R \quad (4.7)$$

となる。この時、節点2に塑性ヒンジが発生する。さらに荷重を増加させてゆくと第2番目の塑性ヒンジが発生するが、その時の荷重は、図5(b)の様な構造形に対して $[A]$ を作り、同様に進める。この時の $[A]$ を表わすと次の様である。

$$[A_1] = (4, 1) \text{ 式と同じである。}$$

$$[A_0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

また、この時の剛性マトリックス $[K_f]$ は次の様である。

$$[K_f] = \begin{bmatrix} 0.4810 & 0 \\ 0 & 0.1531 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

さらに(3, 22)(3, 23)式を用いて $\alpha_2^{\min}$ を求めると節点1で最小値を与え、そこに塑性ヒンジが発生する。この時の荷重は(3.24)式より、

$$[F_0]^2 = \begin{bmatrix} 4.102 \\ 2.735 \end{bmatrix} \times 10^4 R \quad (4.10)$$

さらに荷重増加を図-5(c)の構造形で考えてゆく。この時の $[A_0]$ は(4.11)式で与えられる。後は同様に計算する。その結果、第3番目の塑性ヒンジは節点3に入り、構造形は、図-5(d)の様である。これで崩壊とする。

$$[A_0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

7. あとがき

マトリックス法を用いて弾塑性解析を行なって来たが、文献(8)のマトリックス法は、塑性ヒンジの概念をつかむには非常に良い方法であると思われる。また、各塑性ヒンジ発生段階における荷重、たわみ、断面力等を組織的に求める事は、当然可能である。しかし、この方法は、塑性ヒンジ発生後も軸力の影響で微小ながら、降伏関数の増加がみられる。これを考慮したものは文献(5)に見られるようである。また、弾塑性解析では、たわみが大きくなる傾向にあるので、大変形理論を考慮する事も必要であろう。

参 考 文 献

- 1) Philip. G. Hodge; *Plastic Analysis of Structures*, McGraw-Hill
- 2) 田中 尚; 骨組の塑性力学, 建築構造講座第5巻
コロナ社; 構造物の極限解析, 建築構造大系9, 彰
国社
- 3) A. Jennings and K. Majid; *An elastic analysis by computer for framed structures loaded up to collapse*, *The Structural Engineer*, No. 12, Vol 43
- 4) 服部 正; 軸方向力が *Moment Capacity* に影響する場合の弾塑性解析, *JSSC* 第3回大会論文集
- 5) 上田幸雄他3名; マトリックス法による骨組構造物の弾塑性解析, 日本造船学会論文集第124号
上田幸雄他2名; マトリックス法による骨組構造物の弾塑性解析 (その2), 日本造船学会論文集第126号
- 6) 藤田 譲他3名; 高軸力をうけるフレーム構造の大たわみ弾塑性問題の一解法, *JSSC* 第3回大会論文集
- 7) 山本善之他3名; マトリックス法による平面骨組の

弾塑性解析, 日本造船学会論文集第124号

8) Pestel, E. C. and Leckie, F. A; *Matrix Method in Elastomechanics*, McGraw- Hill

9) 渡辺 昇; 川瀬健夫; 多径間連続桁の弾塑性解析法と計算, 土木学会北海道支部研究発表論文集, 昭和45年度