

横桁の捩り剛性を考慮した格子桁の解法

正 員 渡 辺 昇 *

学生員 ○ 竹 田 俊 明 **

1. ま え が き

一般の構造物と同様に、格子桁においても、その解析法は応力法と変形法に大別できる。

この論文では、応力法の一つであるアフィン荷重法を適用する。従来の解法は、主桁の捩り剛性のみを考慮していたが、これに横桁の捩り剛性をも考慮した解析を行なったので、この解析法の理論、適用の限界及び計算例を示したい。

2. 格子桁の構造形式と仮定

本文で扱う格子桁の構造形式は、次の仮定を満足するものとする。

① 各主桁の曲げ剛性及び捩り剛性が互いに相似であり、各横桁の曲げ剛性と捩り剛性は等しく、その配置は等間隔とする。

② 主桁は曲げに対して単純支持、捩りに対して固定とし、主桁と横桁は剛結合なる直角単純格子桁とする。

3. 格子桁の理論

(1) アフィン荷重及びバネ係数について

解析方法として、アフィン荷重法を用いることは、組荷重間の直交関係を利用して、全体の弾性方程式の係数マトリックス (式(7)参照) を横桁本数だけの係数小マトリックス (式(13)参照) に分割し、各横桁ごとに得られる弾性方程式を単独に解けばよいことを目的としている。

ここで $\alpha_h(n)$ は垂直アフィン荷重群であり、 $\gamma_h(n)$ は主桁にとって捩りアフィン荷重群、 $\beta_h(n)$ は主桁にとってモーメントアフィン荷重群である。(図1参照)

1組のアフィン荷重群は図1のように横桁本数個ある。また $f_{ji}, \theta_{ji}, \varphi_{ji}, f_j(n), \theta_j(n), \varphi_j(n)$ 等は図2—図3から明らかなように、式(1)のようにになる。

$$f'_{ji} = \sum_{h=1}^n f_{jh} \alpha_h(n) \quad , \quad \hat{f}_j(n) = \sum_{h=1}^n \hat{f}_{jh} \beta_h(n)$$

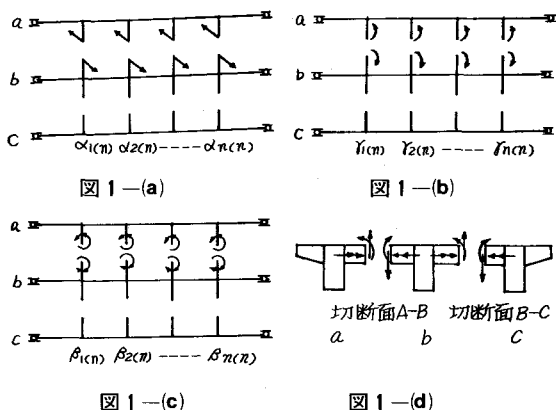


図 - 1

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_j(n) &= \sum_{h=1}^n \hat{\theta}_{jh} \gamma_h(n) \quad , \quad \varphi_j(n) = \sum \varphi_{jh} \alpha_h(n) \\ \hat{\varphi}_j(n) &= \sum_{h=1}^n \hat{\varphi}_{jh} \beta_h(n) \end{aligned} \quad \text{式(1) a-e}$$

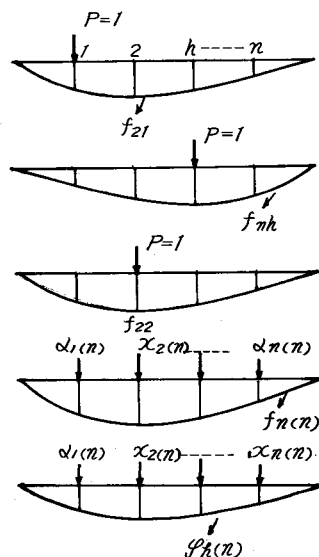


図 - 2

* 北海道大学教授 工博

** 北海道大学大学院 修士課程

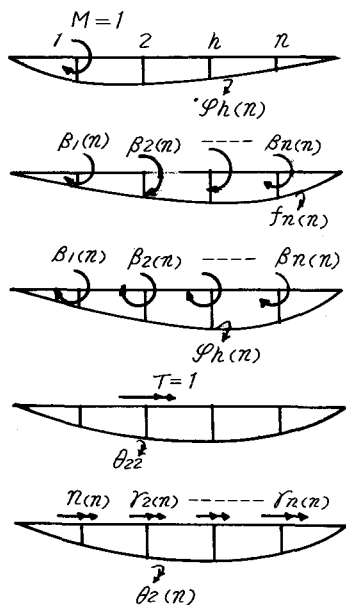


図 - 3

上記のアフィン荷重群

$\alpha_{h(n)}, \beta_{h(n)}, \gamma_{h(n)}$ は

$$\sum_{i=1}^n f_{hj}^i \cdot \alpha_{j(n)} = w_{(n)} \cdot \alpha_{h(n)}$$

$$\sum_{i=1}^n \theta_{hj}^i \cdot \gamma_{j(n)} = w_{T(n)} \cdot \gamma_{h(n)}$$

$$\sum_{i=1}^n \varphi_{hj}^i \cdot \beta_{j(n)} = w_{M(n)} \cdot \beta_{h(n)} \quad \text{式(2)}$$

による固有値マトリックスの固有値ベクトルとして求められ、 $w_{(n)}, w_{T(n)}, w_{M(n)}$ は各々の固有値即ちバネ係数である。各々の荷重群による変形 $f_{hj}^i, \theta_{hj}^i, \varphi_{hj}^i$ はそれぞれ自身の荷重群とは直交関係が成立するが、垂直荷重群 $\alpha_{h(n)}$ による φ_{hj}^i 及びモーメント荷重群 $\beta_{h(n)}$ による f_{hj}^i は、それぞれ $\beta_{h(n)}$ 及び $\alpha_{h(n)}$ と仕事をなすが、この間に、常に直交関係が成立するとはいえない。即ち、式(2)の $\alpha_{h(n)}$ と $\gamma_{h(n)}$ は文献(1)から

$$\alpha_{h(n)} = \gamma_{h(n)} = \sin n \pi x_h / \ell, \quad h, n = 1, \dots, n \quad \text{式(3)}$$

なることが明らかにされており

$$\sum \sin n \pi h / \ell \cdot \sin m \pi x_h / \ell = 0 \quad (n \neq m) \quad \text{式(4)}$$

から直交関係が成立している。

いまバネ係数 $w_{(n)}, w_{T(n)}$ は一定値であるから、各々のアフィン荷重群による変形は

$$f_{hj}^i = m_{(n)} \alpha_{j(n)}$$

$$\theta_{hj}^i = m_{T(n)} \alpha_{j(n)} \quad \text{式(5)}$$

となり、 $\sin$ 級数に似た曲線であることがわかる。

また垂直荷重群により主桁に生ずる撓角は撓みの一回微分であるから、 $\cos$ 級数となる。

従って、横桁に導入した振りアフィン荷重群（主桁においては、モーメント荷重となる）と垂直アフィン荷重群による撓角との連成仕事は直交関係をもつためには、振りアフィン荷重群が $\cos$ 級数でなければならない。

同様に、振りアフィン荷重群による撓みは $\sin$ 級数でなければならない。従って

$$\varphi_{j(n)}^i = w_W \cdot \beta_{j(n)}$$

$$f_{j(n)}^i = w_H \cdot \alpha_{j(n)} \quad \text{式(6)}$$

であるが、上式が適用可能なのは、横桁本数 2 本と無限本の場合である。その場合以外は近似解となるが、近似はあまりよくない。

(2) 格子桁の弾性方程式

主桁 m 本、横桁 n 本とからなる格子桁において、主桁と横桁が剛結合の場合には、内的に $3n(m-1)$ 次の不静定構造になる。これの不静定量としては、横桁中点で切断し切断面に生ずる剪断力と曲げモーメント及び振りモーメントをアフィン荷重群として導入し解析する。

$$C \cdot \lambda + P \cdot D + T \cdot \theta + M \cdot \varphi = 0 \quad \text{式(7)}$$

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & \dots & C_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}, \quad \lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D_1 \\ \vdots \\ D_n \end{bmatrix},$$

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_n \end{bmatrix}, \quad \varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{bmatrix}$$

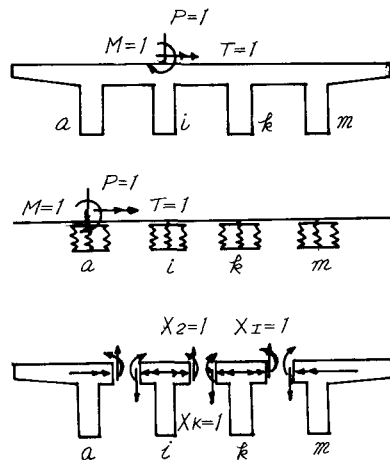


図 - 4

格子桁基本系において、図4のように切断面I-Kに第 n 組の垂直荷重群を作用させた状態を $X_{I(n)} = 1$, 第 n 組のモーメント荷重群を作用させた状態を $X_{K(n)} = 1$, 第 n 組の振りモーメントを作用させた状態を $X_{L(n)} = 1$ のように書くことにする。ここで、アフィン荷重群の直交性から

$$\left. \begin{aligned} \sum \alpha_{j(n)} \cdot \alpha_{j(l)} &= 0 \\ \sum \beta_{j(n)} \cdot \beta_{j(l)} &= 0 \end{aligned} \right\} (n \neq l)$$

$$\sum \alpha_{j(n)}^2 = \sum \beta_{j(n)}^2 = 1/\mu(n) \quad (n=l) \quad \text{式(8)}$$

状態 $\lambda_{I(n)} = 1$;

$$\delta I(n, I+1(n)) = [w_{k(n)} - w_{kT(n)} \frac{a^2}{4}] \cdot \frac{1}{\mu(n)}$$

$$\delta I(n, I(n)) = [w_{i(n)} + w_{iT(n)} \frac{a^2}{4} + w_{k(n)} + w_{kT(n)} \frac{a^2}{4} + 2fp] \cdot \frac{1}{\mu(n)}$$

$$\delta I(n, K+1(n)) = [-w_{kT(n)} \frac{a}{2}] \cdot \frac{1}{\mu(n)}$$

$$\delta I(n, K(n)) = [-w_{iT(n)} + w_{kT(n)}] \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{\mu(n)}$$

$$\delta I(n, L+1(n)) = -w_{iW(n)} \cdot \frac{1}{\mu(n)} = -w_{iH(n)} \cdot \frac{1}{\mu(n)}$$

$$\delta I(n, L(n)) = [w_{iH(n)} + w_{kH(n)}] \cdot \frac{1}{\mu(n)} \quad \text{式(9)}$$

状態 $\lambda_K = 1$:

$$\delta K(n, I+1(n)) = [w_{kT(n)} \frac{a}{2}] \cdot \frac{1}{\mu(n)}$$

$$\delta K(n, K+1(n)) = [-w_{kT(n)}] \cdot \frac{1}{\mu(n)}$$

$$\delta K(n, K(n)) = [w_{iT(n)} + w_{kT(n)} + 2\varphi M] \cdot \frac{1}{\mu(n)}$$

$$\delta K(n, L+1(n)) = \delta K(n, L(n)) = 0 \quad \text{式(10)}$$

状態 $\lambda_L = 1$;

$$\delta L(n, L-1(n)) = -w_{kM(n)} \cdot \frac{1}{\mu(n)}$$

$$\delta L(n, L(n)) = [w_{iM(n)} + w_{kM(n)} + 2\theta T] \cdot \frac{1}{\mu(n)} \quad \text{式(11)}$$

ここで式(8)により $\partial I(n, K(l)) = 0$, $\partial I(n, L(l)) = 0$ 等となる。

即ち

$$C_{n\ell} = 0 \quad (n \neq \ell) \quad \text{式(12)}$$

式(12)より $C_{n\ell} = 0$ であるから、係数マトリックス C は式(13)となる。

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & & \\ & \ddots & \\ 0 & & C_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{式(13)}$$

主桁 i の点 u に $p = 1$ が作用するとき

$$\partial I(n, 0) = -w_{i(n)} \cdot \rho_{u(n)}^i, \quad \partial I+1(n, 0) = w_{i(n)} \cdot \rho_{u(n)}^i$$

$$\delta K(n, 0) = \delta K+1(n, 0) = 0, \quad \delta L+1(n, 0) = w_{iH(n)} \cdot \rho_{u(n)}^i$$

$$\partial L(n, 0) = -w_{iH(n)} \cdot \rho_{u(n)}^i, \quad \text{式(14)}$$

$$\text{但し } \rho_{ih(n)}^i = f_{ih(n)}^i / w_{i(n)}$$

主桁 i の点 u に $M = 1$ が作用するとき

$$\varphi I(n, 0) = w_{iW(n)} \cdot \rho_{u(n)}^2, \quad \varphi I+1(n, 0) = -w_{iW(n)} \cdot \rho_{u(n)}^2$$

$$\varphi K(n, 0) = \varphi K+1(n, 0) = 0, \quad \varphi L+1(n, 0) = -w_{iM(n)} \cdot \rho_{u(n)}^2$$

$$\varphi L(n, 0) = w_{iM(n)} \cdot \rho_{u(n)}^2, \quad \text{式(15)}$$

$$\text{但し } \rho_{iu(n)}^2 = \varphi_{iu(n)}^2 / w_{iM(n)}$$

主桁 i の点 u に振りモーメント $T = 1$ が作用 ;

$$\theta I(n, 0) = \frac{a}{2} w_{iT(n)} \cdot \rho_{u(n)}^3, \quad \theta I+1(n, 0) = \theta I(n, 0)$$

$$\theta K(n, 0) = w_{iT(n)} \cdot \rho_{u(n)}^3, \quad \theta KH(n, 0) = -w_{iT(n)} \cdot \rho_{u(n)}^3$$

$$\theta L(n, 0) = \theta L+1(n) = 0, \quad \text{式(16)}$$

$$\text{但し } \rho_{iu(n)}^3 = \theta_{iu(n)}^3 / w_{iT(n)}$$

(3) 格子桁の弾性方程式の解及び断面力、変形の影響面

格子桁の弾性方程式の解を求めるに当り、係数マトリックス C 及び荷重項 ∂ , θ , φ の要素を吟味すれば、係数マトリックス C_{nn} の要素は全て $1/\mu(n)$ であり、荷重項には、各々同じ係数 $\rho_{u(n)}^i$, $\rho_{u(n)}^2$ 等が係数倍されているから、これらを除いた弾性方程式を解き、それに $\mu(n)$, $\rho_{u(n)}^i$ 倍あるいは $\mu(n)$, $\rho_{u(n)}^2$ 倍等しても同じである。上記の弾性方程式は、結局弾性沈下回転可能支承上連続桁の弾性方程式である。(図5参照)

従ってこのことを考慮して、不静定影響面は、次のようになる。

主桁 k の点 β に $P = 1$ が作用するとき

$$X_{Ih, k\beta} = \sum \mu(n) \alpha_{h(n)} \cdot \rho_{k\beta(n)}^i X_{Ik(n)}$$

$$X_{Kh, k\beta} = \sum \mu(n) \alpha_{h(n)} \cdot \rho_{k\beta(n)}^i X_{Kk(n)}$$

$$X_{Lh, k\beta} = \sum \mu(n) \beta_{h(n)} \cdot \rho_{k\beta(n)}^i X_{Lk(n)} \quad \text{式(17)}$$

以下他の単位荷重の場合も同様となる。

また格子桁の任意の点の断面力及び変形の影響面は、次のようになる。

主桁 k の点 β に $P = 1$ が作用するときの断面力

及び変形,

$$\text{格点力: } K_{ih, k\beta} = \sum_{n=1}^n \mu(n) \alpha_{h(n)} \cdot \rho_{k\beta(n)}^i C_{ik(n)}$$

$$\text{格点モーメント: } L_{ih, k\beta} = \sum_{n=1}^n \mu(n) \cdot \alpha_{h(n)} \cdot D_{ik(n)}$$

$$\text{格点振りモーメント: } M_{ih, k\beta} = \sum \mu(n) \cdot \beta_{h(n)} \cdot E_{ik(n)}$$

断面力及び変形:

$$S_{ih, k\beta} = S_{ih, k\beta}^0 + \sum_{n=1}^n \mu(n) \{ S_{ih(n)}^i \cdot \rho_{k\beta(n)}^i C_{ik(n)} + S_{ih(n)}^2 \cdot \rho_{k\beta(n)}^2 D_{ik(n)} + S_{ih(n)}^3 \cdot \rho_{k\beta(n)}^3 E_{ik(n)} \} \quad \text{式(18)}$$

ここで $S_{ih, k\beta}^0$ は基本系(単一棒桁)において $P = 1$ による断面力及又は変形の影響線である。 $S_{ih(n)}^i$, $S_{ih(n)}^2$ 等は、基本系において状態 $X_{I(n)} = 1$ 又は状態 $X_{K(n)} = 1$

による断面力または変形の主桁 i の点 h における値である。

他の単位外力が作用したときも同様に表現できる。

ここで $k \neq i$ に対して

$$S_{ih,k\beta} = 0, \quad C_{ik(n)} = B_{ik(n)}$$

$k = i$ に対して

$$S_{ih,k\beta} = S_{ih,i\beta}, \quad C_{ii} = B_{ii} - 1 \quad \text{式(19)}$$

$B_{ik(n)}, D_{ik(n)}, E_{ik(n)}$ は弾性支承反力である。

(4) 各格子剛度の定義

各組荷重状態において、バネ係数 $\omega_{(n)} \omega_{T(n)} \omega_{M(n)}$ 等は

式(5)、式(6)によって定義される。

ここで以下のように各格子剛度を定義する。

$$\begin{aligned} Z &= \frac{48EJ_Q}{(2a)^3} w & Z_T &= \frac{EJ_Q}{2a} w_T \\ Z_M &= \frac{GJ_{QT}}{2a} w_M & Z_H &= \frac{GJ_{QT}}{2a} w_H \\ Z_W &= \frac{48EJ_Q}{(2a)^3} w_W \end{aligned} \quad \text{式(20)}$$

但し、 EJ_Q, GJ_{QT} はそれぞれ横桁の曲げ剛性及び捩り剛性であり $2a$ は横桁長である。

(5) 2弾性支承上の桁

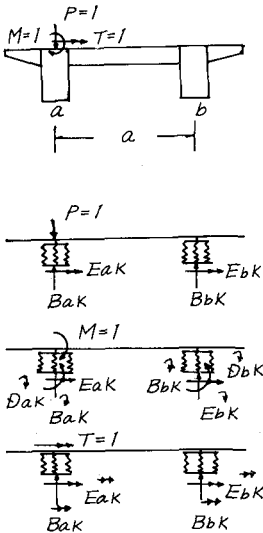


図 5

図5に示す2弾性支承上の桁の支承反力公式は次のとおりである。但し $k = EJ_Q / GJ_{QT}$

a) $P_k=1$ が作用するとき

$$B_{aa} = 1 - \frac{1}{N} \{ (8Z \cdot Z_M + 2Z) - 96k Z_H^2 / a^2 \}$$

$$B_{ba} = \frac{1}{N} \{ 8Z \cdot Z_M + 2Z - 96k Z_H^2 / a^2 \}$$

$$D_{ab} = D_{aa} = 0$$

$$E_{aa} = -\frac{2}{N} (12Z_H \cdot Z_T + Z_H)$$

$$E_{ba} = \frac{2}{N} (12Z_H \cdot Z_T + Z_H)$$

$$N = 16Z \cdot Z_M + 4Z + 48Z_T Z_M + 12Z_T + 4Z_M + 1 - 192k Z_H^2 / a^2 - 192k Z_H^2 / a^2 \quad \text{式(21)}$$

b) $M=1$ が作用するとき

$$B_{aa} = -\frac{1}{N} \{ 8Z_M \cdot Z_W + 2Z_W - 96Z_H \cdot Z_M k / a^2 \}$$

$$B_{ba} = \frac{1}{N} \{ 8Z_M \cdot Z_W + 2Z_W - 96Z_H \cdot Z_M k / a^2 \}$$

$$D_{aa} = D_{ab} = 0$$

$$E_{aa} = -\frac{1}{N} \{ 12Z_M \cdot Z_T + 4Z \cdot Z_M + Z_M - 4Z_H \cdot Z_W \} 2$$

式(22)

$$E_{ba} = -E_{aa}$$

c) $T=1$ が作用するとき

$$B_{aa} = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{N} Z_T (48Z_M + 12)$$

$$B_{ba} = -B_{aa}$$

$$E_{aa} = \frac{1}{N} \{ 48Z_T \cdot Z_H \cdot \frac{1}{a} \}$$

$$E_{ba} = -E_{aa}$$

$$D_{aa} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{N} Z_T (48Z_M + 12) + \frac{2Z_T + 1}{4Z_T + 1}$$

$$D_{ba} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{N} Z_T (48Z_M + 12) + \frac{2Z_T}{4Z_T + 1} \quad \text{式(23)}$$

3弾性支承上連続桁の公式は割愛する。

4 計 算 例

数値計算例は2本主桁2本横桁について曲げモーメントの影響面を求めた。

この方法では、横桁取付点で厳密値となるが、他の箇所は近似となる。

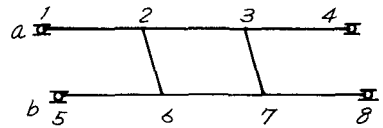


図 6

断面諸元は、

主桁の曲げ剛性 $EJ = 100E$, 主桁桁長 $30m$

主桁の捩り剛性 $GJ_T = 50E$ 横桁桁長 $2m$

横桁の曲げ剛性 $EJ_Q = 20E$

横桁の捩り剛性 $GJ_{QT} = 10E$

主桁 a の格点2における曲げモーメント影響面

— Ma_2, k_β

計算過程と共に、これを示せば表4となる。

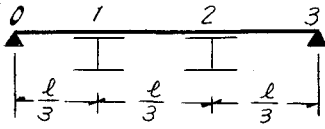


表 1

n	$\alpha_1(n)$	$\alpha_2(n)$	$\mu(n)$
1	1	1	0.5
2	1	-1	0.5
n	$\beta_1(n)$	$\beta_2(n)$	$\mu(n)$
1	1	-1	0.5
2	-1	-1	0.5

	$n=1$	$n=2$
Z	1 2 5	25 / 3
Z_T	1	1 / 3
Z_M	1 / 8	1 / 24
Z_H	5 / 4	5 / 36

表 2

表 3

$P=1$ による	$n=1$	$n=2$	$P=1$ による	$n=1$	$n=2$
Baa	0.51574	0.56804	Eaa	0.05246	0.03240
Bab	-0.48426	-0.43196	Eab	-0.05246	0.03240
Bba	0.48426	0.43196	Eba	0.05246	0.03240

表 4

	2 左	2 右	3 左	3 右	6 左	6 右	7 左	7 右	
$Ma \frac{\theta}{3} a\beta$	6.6667	6.6667	3.3333	3.3333					
$\mu(1)Ma \frac{\theta}{3} \rho Caa$	-2.4213	-2.4213	-2.4213	-2.4213	2.4213	2.4213	2.4213	2.4213	$\mu(1)Ma \frac{\theta}{3} \rho Cab$
$\mu(2)Ma \frac{\theta}{3} \rho Caa$	-0.71993	-0.71993	+0.71993	0.71993	0.71993	0.71993	-0.71993	-0.71993	$\mu(2)Ma \frac{\theta}{3} \rho Cab$
$\mu(1)Ma \frac{\theta}{3} \rho Eaa$	0	-0.02623	0	-0.02623	0	0.02623	0	0.02623	$\mu(1)Ma \frac{\theta}{3} \rho Eab$
$\mu(2)Ma \frac{\theta}{3} \rho Eaa$	-0.0108	0.0054	0.0108	-0.0054	0.0108	-0.0054	-0.0108	0.0054	$\mu(2)Ma \frac{\theta}{3} \rho Eab$
$\Sigma Ma \frac{\theta}{3} a\beta$	3.514	3.504	1.6427	1.600	3.162	3.152	1.6906	1.733	$\Sigma Ma \frac{\theta}{3} b\beta$

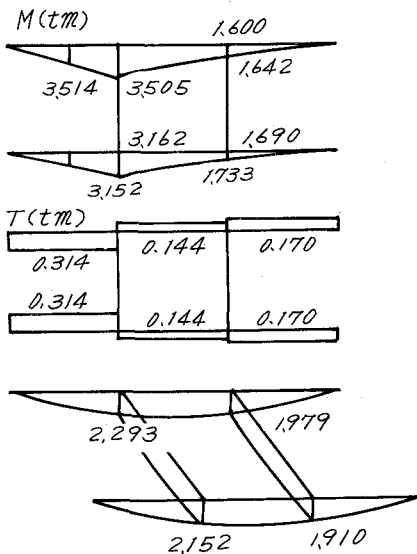


図 7

5. 結 言

横桁の捩り剛性を考慮した格子桁の解析を示したが、この方法の適用は横桁本数が2本と無限本に限られる。しかし、無限本の場合は、横桁の捩り剛性を考慮した鋼床版の解析に適用が可能であり、この点この方法は有効であると考えられる。最後に本文作成にあたって終始ご助言をいただいた北大稼農助教授に感謝の意を表します。

参 考 文 献

- (1) Homberg, H : Kreuzweke, Statik der Trager, r-oste und Platten, Forschungshefte aus Gebiete des Stahlbaues Heft 8, 1951
- (2) 渡辺昇昇 : 格子桁の理論と計算, 技報堂 1965
- (3) Homberg, H : über die Lastverteilung durch Schubkafte, Theorie des Plattenkreuzweks Der Stahlbaues 1952
- (4) 稼農知徳 : 並列箱桁曲線橋の解法
土木学会論文報告集 第189号 1971年5月