

骨組構造物の最適設計 (その1)

— トラス構造物のサブオプティミゼーション —

学生員 杉 本 博 之

6月(鋼道示)に従った。鋼材はSS41である。

1. ま え が き

従来のトラスの設計は、その断面の決定において、数種のモデルの計算を行い、より費用の少ないものを採用していた。また、軸力が一定の圧縮部材断面の設計においても試行錯誤的に寸法を変えて、断面積の小さいものを選択しているのが実情である。

しかしながら、そのような方法で決定された構造システムあるいは断面というものは、あくまでも相対的に最適なのであって、その科学的裏付けを欠いていたといっても過言ではない。

そこで、最近、強くその発展が説かれている構造総合あるいは最適設計、あるいは信頼性工学という構造解析をサブルーチンとして含む設計過程が必要となってくるわけである。

トラス構造物の数学的問題としての最適設計手法はすでに確立している観がある(2, 3)が、より複雑な構造物の最適問題をより能率的に解くためには、設計変数を減少させる必要があるわけである。具体的には、ある最適な断面における各断面寸法と断面積の関係を導き、設計変数を断面積一個にすること、また、許容圧縮応力(許容圧縮力)と断面積の関係を導くことにほかならない。

この手法を、サブオプティミゼーションと呼ぶ。

この方面の研究は国内では、(1)にみられるが、これは、断面形状を正方形と仮定したもので、実際の橋梁では、弦材・端柱の断面の内幅と腹材の断面の外幅がすべての部材について一定であることを考慮すると、実用的ということはできなく、さらなる発展が必要であった。

そこで本論文は、(1)では近似式であった、許容応力—断面積の関係の理論解を誘導し、さらに、板厚を離散型変数とした場合、内幅Bを固定した場合、外幅Bを固定した場合のサブオプティミゼーションを行った。

なお、断面は上下、左右がそれぞれ対称なボックス断面とし、細部の規定は、鋼道路橋設計示方書 昭和39年北海道大学大学院 博士課程

2. 記号の定義

A	: 軸力部材の断面積
B	: 軸力部材の断面の幅
r	: 断面二次半径
x	: 部材寸法
d	: 板 厚
σ_{ca}	: 許容圧縮応力
ℓ	: 部材長
P	: 作用軸力

3. サブオプティミゼーション

3-1 正方形断面 軸力部材断面の最適設計において、断面形状に何ら拘束を加えない時、最適断面が正方形となることは周知のとおりである。この時、板厚 d が(板幅/40)に拘束されない範囲($A \leq A^*$)では、板厚は、8mmに定まる。これは以下のように証明できる。

許容圧縮応力 σ_{ca} は、

$$\sigma_{ca} = \begin{cases} 1,300 - 0.06 (\ell/r)^2 & 0 < \ell/r \leq 110 \\ 7,200,000 / (\ell/r)^2 & \ell/r > 110 \end{cases} \quad (1)$$

であるから、断面積(A_0)が等しい断面を比較する時、断面二次半径 r の大きい方が、許容応力が大きくなるという意味で、より適した断面であるといえることができる。

今、板厚が8mmの正方形断面を(ケース1)、板厚が $(8+10\alpha)$ mm, ($\alpha > 0$)の正方形断面を(ケース2)とすると、ケース1では、 $d_1 = 0.8$ cm, $x_1 = A_0/3.2 + 0.8$, ケース2では、 $d_2 = 0.8 + \alpha$, $x_2 = A_0 / (3.2 + 4\alpha) + 0.8 + \alpha$, となり、断面二次半径は

$$r_i = \sqrt{x_i^2 + (x_i - 2d_i)^2} / 12 \quad (i = 1, 2)$$

であるから、 $x_1 > x_2$ より(x は正方形の外側の幅), $r_1 > r_2$ となり、板厚が8mmの断面が最適であることが証明された。この時、 $A^* = 104.96 \text{ cm}^2$ となる。

この $d = 8 \text{ mm}$ は、他に何の拘束もない場合、面積 A のすべての範囲にわたって、最適断面を与えるのであるが、

鋼道示では、 $d \geq (\text{板幅}/40)$ でも拘束されており、 $A > A^*$ では $(\text{板幅}/40) \geq 8\text{mm}$ であるので、この範囲では、 $d = (\text{板幅}/40)$ が最適断面を与えることは証明を要しないであろう。

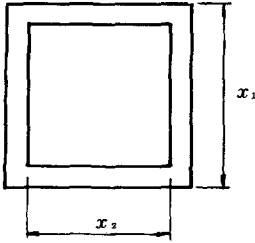


図-1

以上より、最適断面における断面積 A と断面寸法 x_1 、 x_2 、断面二次半径 r 、許容圧縮応力 σ_{ca} との関係式が次のように導かれる。

$$\textcircled{1} \quad 2.56\text{cm}^2 \leq A \leq 104.96\text{cm}^2$$

$$x_1 = 0.3125A + 0.8, \quad x_2 = 0.3125A - 0.8 \quad (2)$$

$$r = \sqrt{[(0.3125A)^2 + 0.64] / 6} \quad (3)$$

$$\sigma_{ca} = j_1 \times [1,300 - 0.36\ell^2 / ((0.3125A)^2 + 0.64)] + (1 - j_1) \times [1,200,000 / ((0.3125A)^2 + 0.64) / \ell^2] \quad (4)$$

$$\textcircled{2} \quad 104.96\text{cm}^2 < A$$

$$x_1 = 3.300\sqrt{A}, \quad x_2 = 3.143\sqrt{A} \quad (5)$$

$$r = 1.307\sqrt{A} \quad (6)$$

$$\sigma_{ca} = j_1 \times [1,300 - 0.035\ell^2 / A] + (1 - j_1) \times [12,300,000A / \ell^2] \quad (7)$$

$$\text{ただし, } j_1 = 1 : 0 < \ell / r \leq 110$$

$$j_1 = 0 : 110 < \ell / r$$

3-2 離散型変数を含む断面 ここでは、離散型変数として、軸力部材断面の板厚 d を考え、最適断面の断面二次半径、許容圧縮応力と断面積の関係式を誘導する。

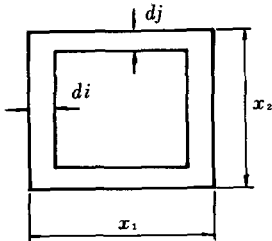


図-2

アルゴリズムは、ある部材長 ℓ と荷重 P とにおいて、腹板厚 d_i 、フランジ厚 d_j を固定して、SLP法により、最小断面積を与えるフランジ幅 x_1 、腹板厚 x_2 を決定し、各ステップ(各板厚の組み合わせ)における断面積を比較して、最小断面積を与える d_i 、 d_j を決定する。

この時、次の仮定をもうける、

d_i, d_j : 1mmきざみの離散型変数

A_{ij} : d_i, d_j における最小断面積

$O_{pt}(A_i)$: d_i における最小断面積

$O_{pt}(A)$: 部材長 ℓ 、荷重 P における最小断面積

とすると、

$$\textcircled{1} \quad \text{もし, } A_{ij} < A_{i,j+1} \quad (j=1, 2, \dots)$$

$$\text{ならば, } O_{pt}(A_i) = A_{ij}$$

$$\textcircled{2} \quad \text{もし, } O_{pt}(A_i) < O_{pt}(A_{i+1}) \quad (i=1, 2, \dots)$$

$$\text{ならば, } O_{pt}(A) = O_{pt}(A_i)$$

このようにして求めた、 r と A の関係をグラフに描くと図-3のようになり、関係式は次のようになる、

$$\textcircled{1} \quad 2.56\text{cm}^2 \leq A \leq 104.96\text{cm}^2$$

$$(3), (4) \text{式と同じ。}$$

$$\textcircled{2} \quad 104.96\text{cm}^2 < A$$

$$r = aA + b \quad (5)$$

$$\sigma_{ca} = j_1 \times [1,300 - 0.06\ell^2 / (aA + b)^2] + (1 - j_1) \times [7,200,000(aA + b)^2 / \ell^2] \quad (6)$$

ここで、 a, b は次式より計算できる、

$$i = \text{INT}[(A - 10.496 - \epsilon) / 32] + 1, (\epsilon < 1)$$

(INT(x)は、 x を越えない最大の整数値)

$$A_{i1} = 104.96 + 32 \times (i - 1)$$

$$A_{i2} = (1.709 - 0.4c + 1.307\sqrt{1.709 - 0.8C}) / 2c^2$$

$$A_{i3} = 120.96 + 32 \times (i - 1)$$

$$\text{ただし, } c = (1.307\sqrt{A_{i1}} - 0.7) / A_{i1} \quad \text{とおくと,}$$

$$\text{イ) } A_{i1} < A \leq A_{i2}$$

$$a = (1.307\sqrt{A_{i1}} - 0.7) / A_{i1}, \quad b = 0$$

$$\text{ロ) } A_{i2} < A \leq A_{i3}$$

$$a = [1.307(\sqrt{A_{i3}} - \sqrt{A_{i2}}) - 0.5] / (A_{i3} - A_{i2})$$

$$b = [(1.307\sqrt{A_{i2}} - 0.2) \times A_{i3} - (1.307\sqrt{A_{i3}} - 0.7) \times A_{i2}] / (A_{i3} - A_{i2})$$

$$\text{ハ) } A_{i3} < A \leq A_{i+1,1}$$

$$a = (1.307\sqrt{A_{i3}} - 0.7) / A_{i3}, \quad b = 0$$

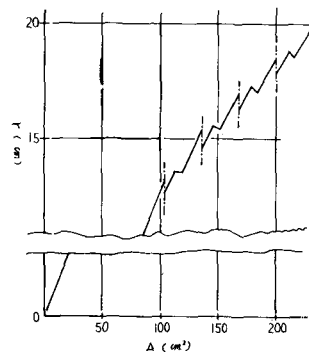


図-3 板厚を離散型変数と考えた場合の $r-A$ 曲線

3-3 内幅Bを固定した断面 内幅B, 各断面寸法 x_1, x_2, x_3 , 水平軸, 垂直軸は図-4に示すとおりである。

内幅Bを固定した断面は, トラスにおいては, 上・下弦材及び端柱で考慮されるべきものである。

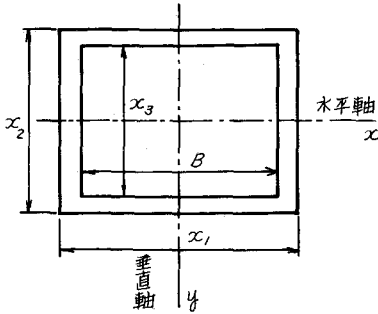


図-4

この最適断面の計算にあたっては, 3-1, 正方形断面の結果より, 次の二つの仮定をもうける。

- (1) 断面は, 上下, 左右がそれぞれ対称なボックスとしているが, そのボックスを構成する各要素において, 固定点間距離(x_3 あるいは B)が32cmより小さい場合, 最適断面を与える板厚は8mm, 32cmより大きい場合は, (x_3 あるいは B)/40となる。
- (2) 断面積Aの増加とともに, 断面は次第に正方形に近づくのであるが, 一度正方形になった後は, 最適断面は正方形である。

この二つの仮定より, 最適断面寸法は次のようになる,

$B \leq 32\text{cm}$ では,

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & 1.6(B+1.6) \leq A \leq 1.6(2B+1.6) \\ & x_1 = B+1.6, \quad x_2 = 0.625A - B \\ & x_3 = 0.625A - B - 1.6 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad & 1.6(2B+1.6) < A \\ & x_1 = x_2 = \sqrt{B^2 + A}, \quad x_3 = B \end{aligned} \quad (9)$$

$B > 32\text{cm}$ では,

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & 0.05B(B+1.6) \leq A \leq 0.05B^2 + 0.08B + 51.2 \\ & x_1 = B+1.6, \quad x_2 = 0.625A - 0.03125B^2 \\ & x_3 = 0.625A - 0.03125B^2 - 0.05B \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad & 0.05B^2 + 0.08B + 51.2 < A \leq 0.1025B^2 \\ & x_1 = B - 0.025(0.05B - S(A)) \\ & x_2 = 0.5(0.05B + S(A)), \quad x_3 = -0.5(0.05B - S(A)) \end{aligned} \quad (11)$$

ただし, $S(A) = \sqrt{(0.05B)^2 - 4(B^2 - 20A)}$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad & 0.1025B^2 < A \\ & x_1 = x_2 = \sqrt{B^2 + A}, \quad x_3 = B \end{aligned} \quad (12)$$

* r-A曲線* x_1, x_2, x_3 の公式化ができたので,

各区間でのr-A曲線式の誘導は可能である。しかし, その結果は非常に複雑であり, また, $\ell/r \leq 120$ の条件より, Aの最小値を計算する必要があるわけなのだが, 上の式からでは困難である。そこで, 実用上のr-A曲線として, 次の近似式を用いる。

$B \leq 32\text{cm}$ の場合は,

$$\textcircled{1} \quad \text{区間は: } r = a_1 A + b_1 \quad (13)$$

$$\textcircled{2} \quad \text{区間は: } r = \sqrt{(2B^2 + A)/12} \quad (14)$$

$B > 32\text{cm}$ の場合は,

$$\textcircled{1} \quad \text{区間は: } r = a_1 A + b_1 \quad (13)$$

$$\textcircled{2} \quad \text{区間は: } r = \sqrt{a_2 A + b_2} \quad (15)$$

$$\textcircled{3} \quad \text{区間は: } r = \sqrt{(2B^2 + A)/12} \quad (14)$$

a_1, a_2, b_1, b_2 の各係数は, それぞれの区間の両端点の値を用いて決定することにする(表-1)。

r-A曲線式が求まると, σ_{ca} -A曲線式の誘導は簡単である。

なお, このようにして, 仮定(1), (2)を基にして求めたr-A曲線は, 同じ問題をSLP法を用いて求めた数値計算結果と一致する。

3-4 外幅Bを固定した断面 外幅B, 各断面寸法 x_1, x_2, x_3 , 水平軸, 垂直軸は図-5に示すとおりである。

外幅Bを固定した断面は, トラスにおいては, 腹材で考慮されるべきものである。

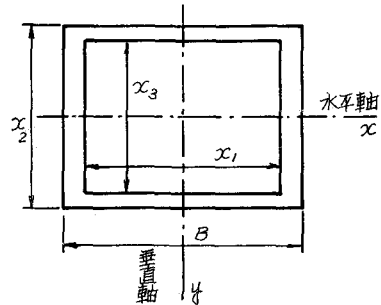


図-5

3-3の場合と同じ仮定により, 最適断面の各寸法は次のようになる,

$B \leq 33.6\text{cm}$ では

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & 1.6B \leq A \leq 1.6(2B-1.6) \\ & x_1 = B-1.6, \quad x_2 = 0.625A - B + 1.6 \\ & x_3 = 0.625A - B \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad & 1.6(2B-1.6) < A \leq B^2 \\ & x_1 = x_3 = \sqrt{B^2 - A}, \quad x_2 = B \end{aligned} \quad (17)$$

$B > 33.6\text{cm}$ では,

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & 0.05B^2 - 0.08B \leq A \leq 0.05B^2 - 0.08B + 51.2 \\ & x_1 = B-1.6, \quad x_2 = 0.625A - 0.03125B^2 + (B-0.8)/10 \end{aligned}$$

$$x_3 = 0.625A - 0.05B \quad (0.625B - 1) \quad (18)$$

$$\textcircled{2} \quad 0.05B^2 - 0.08B + 51.2 < A \leq 0.093B^2$$

$$x_1 = B - 0.025 \quad (0.05B + S(A))$$

$$x_2 = 0.499 \quad (0.05B + S(A)) + 0.05B \quad (19)$$

$$x_3 = 0.025B + 0.5S(A)$$

$$\textcircled{3} \quad 0.093B^2 < A \leq B^2$$

$$x_1 = x_3 = \sqrt{B^2 - A}, \quad x_2 = B \quad (20)$$

*** r - A 曲線 *** これも、3-3と同様に、実用式を用いるわけであるが、3-3と違うところは、 B の区間が33.6cmで区切られることと、(14)式が、

$$r = \sqrt{(2B^2 - A)/12} \quad (21)$$

となるだけで、後は同じなので詳細は略する。

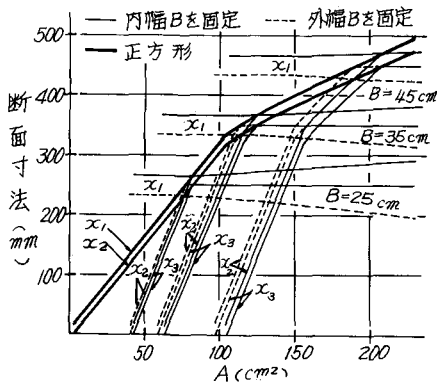


図-6 最適断面における x - A 曲線

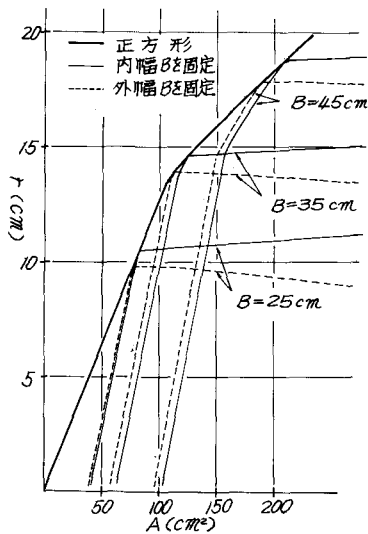


図-7 最適断面における r - A 曲線

表-1 r - A 曲線の各係数

	B (cm)	a_1	b_1	a_2	b_2
内幅を固定	25	0.2519	-10.259	—	—
	30	0.2524	-12.301	—	—
	35	0.2580	-16.020	2.5723	-108.35
	40	0.2657	-21.528	2.6770	-158.69
	45	0.2719	-27.864	2.7647	-219.04
外幅を固定	25	0.2517	-9.606	—	—
	30	0.2523	-11.647	—	—
	35	0.2552	-14.434	2.6237	-104.13
	40	0.2634	-19.675	2.7532	-155.28
	45	0.2701	-25.747	2.8636	-217.30

3-5 トラスの腹材における r - A 曲線の修正 トラスの弦材においては、3-3で求めた、 r - A 曲線を使用する。なお、引張材では、 B の範囲に関係なく、①区間の線形を用いることにする。

しかしながら、トラス面内の座屈に対する腹材の長さは、骨組長の0.9倍とする、という規定があるので、3-4における r - A 曲線を修正する必要がある。

骨組長を0.9倍するということは①区間 ($B \leq 33.6$ cm)、①・②区間 ($B < 33.6$ cm) の r - A 曲線を0.9で割り r_x 、 r_y の小さい方の値を採用することにほかならない。図で示すと点線部分を意味しているが、実用上は太い実線部分でよい (図-8)。

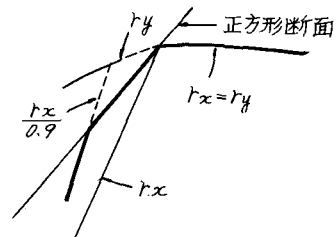


図-8 r - A 曲線の修正

式で示すと以下のようになる、

$$B \leq 33.6 \text{ cm}$$

$$\textcircled{1} \quad 1.6B \leq A \leq A_1 : r = a'_1 A + b'_1 \quad (22)$$

$$\textcircled{2} \quad A_1 < A \leq 1.6(2B - 1.6) : (3) \text{式と同じ。}$$

$$\textcircled{3} \quad 1.6(2B - 1.6) < A \leq B^2 : (21) \text{式と同じ。}$$

$$B > 33.6 \text{ cm}$$

$$\textcircled{1} \quad 0.05B^2 - 0.08B \leq A \leq A_2 : (22) \text{式と同じ。}$$

$$\textcircled{2} \quad A_2 < A \leq 0.093B^2 : (6) \text{式と同じ。}$$

$$\textcircled{3} \quad 0.093B^2 < A \leq B^2 : (21) \text{式と同じ。}$$

ただし、 $a'_1 = a_1/0.9$ 、 $b'_1 = b_1/0.9$

$$A_1 = \left\{ -a'_1 b'_1 + \sqrt{(a'_1 b'_1)^2 - (a'_1{}^2 - 0.016)(b'_1{}^2 - 0.107)} \right\}$$

$$/ (a_1^2 - 0.016)$$

$$A_2 = \left[1.709 - 2a_1 b_1 + \sqrt{2.921 - 3.418 a_1 b_1} \right]$$

4. 考察及びあとがき

本論文は、実際の構造物と数学としての最適化手法を結合するサブオプティミゼーションについて述べたものである。サブオプティミゼーションが必要となるのは、許容応力が断面積の関数になる場合であった、引張部材のように許容応力が一定の場合には、 $l/r < 200$ に拘束される以外は必要としないのである。この意味で、断面を上下・左右がそれぞれ対称なボックス断面と仮定したことは、実用上大きな障害はなく、3-3、3-5で導いた関係式を用いることにより、ほとんどのトラス構造物の実用的な最小重量設計が可能になったと思われる。

紙面の都合で、実際の計算例は示すことができなかったが、3-2の板厚を離散型変数と考える場合のトラスの最小重量設計の結果は、3-1よりの連続型と考える

場合の結果と、各断面積においても、総重量においても、ほとんど差がなかったので、実際のトラス構造物のように幅が一定の場合でも、連続型変数と考えてよいと思われる。

なお、本論文は、SS41のみを扱ったが、この考え方を他の鋼材にも適用し、各 $\sigma_{ca}-A$ 曲線間の相対関係より、鋼材も変数とする最適化の研究が望まれる。

本文作成にあたり、北大工学部渡辺昇教授、稼農知徳助教授の種々の貴重な御助言に感謝致します。

参 考 文 献

- (1) 大久保禎二：“トラス構造物の最適設計法に関する研究”，土木学会論文報告集，No. 177，1970-5
- (2) K. M. Romstand, C.-K. Wang：“Optimum Design of Framed Structures”，ASCE，1968, 12.
- (3) A. R. Toakley：“Optimum Design Using Available Sections”，ASCE，1968，5.