

剛性マトリックス法による曲線材を含む 立体構造物の解析について

正員 芳村 仁*
正員 奥村 勇**
正員 ○岩上 淳一***

1. 緒 言

剛性マトリックスを用いた骨組構造物の変形法による解析が行なわれており、直線部材によるものは勿論のこと曲線部材についても面内荷重に対する剛性マトリックスは既に表示されている。(1)

この報告では直線材と曲線材とから成るより一般的な立体骨組構造物の解析を可能にする目的で、円弧曲線材に対する面外荷重をも含めた一般的荷重の場合についての剛性マトリックスを誘導したのでその結果と、それを用いたいくつかの応用例を示した。また、直線材と曲線材とからなる連続曲線立体ラーメンの静的および動的な解析例も示した。

2. 円弧曲線部材の剛性マトリックス

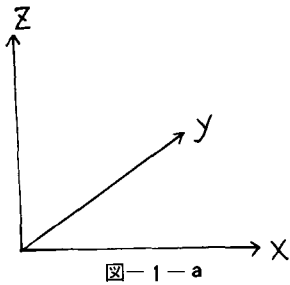


図-1-a

図-1・aの空間にx-y平面に平行においた一様断面の円弧曲線部材の要素を図-1-bに示す。図-1・cにはその平面図を示す。

各節点での荷重 (P_{x1} , P_{y1} , ..., M_{y1} , P_{x2} , P_{y2} , ..., M_{y2}) とそれに対応する変位 (U_{x1} , U_{y1} , ..., θ_{y1} , U_{x2} , U_{y2} , ..., θ_{y2}) は図に示すとおりである。節点力および変位の正方向は、z方向は上向き、x方向は接線方向およびy方向は常に半径方向(内側に

向かうものを正)とする。S座標は円弧に沿ってはかものとする。要素の曲げ剛性をEI, ねじり剛性をGJで表わす。また、 β は要素全体を見込む角、Rは要素の曲率半径および ϕ は要素の任意点Sに対する角をそれぞれ表わす。

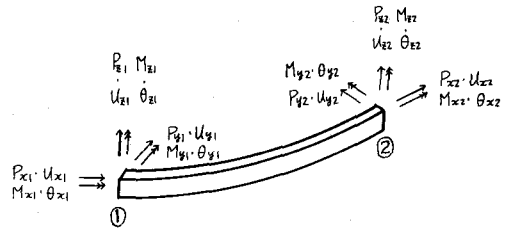


図-1-b

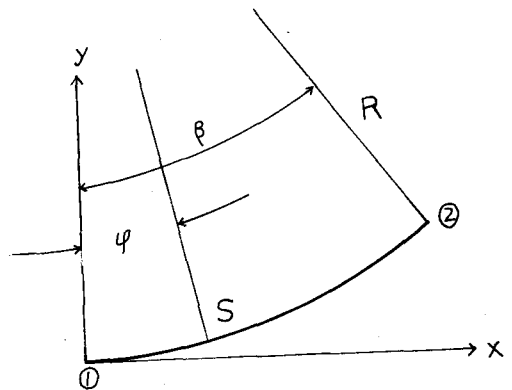


図-1-c

図-1・bの円弧曲線部材要素の剛性マトリックスは、6個の節点力による歪エネルギーからカスチリアノの第2定理を用いて計算することができる。歪エネルギーは曲げモーメント M_y , M_z およびねじりモーメント M_x によるもののみを考慮する。

いま、求めようとする剛性マトリックスを次のようにおく。

* 北海道大学工学部 教授 工博

** 北海道大学工学部 助教授 工修

*** 北海道開発局 工修

$$\begin{Bmatrix} P_{x1} \\ P_{y1} \\ M_{z1} \\ P_{z1} \\ M_{x1} \\ M_{y1} \\ P_{x2} \\ P_{y2} \\ M_{z2} \\ P_{z2} \\ M_{x2} \\ M_{y2} \end{Bmatrix} = [\mathbf{K}] \begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ \theta_{z1} \\ u_{z1} \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ \theta_{z2} \\ u_{z2} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ \theta_{z1} \\ u_{z1} \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ \theta_{z2} \\ u_{z2} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

(1) 部分マトリックス $[\mathbf{K}_{11}]$

図-1-bの節点②を固定端と考えて節点①の変位を求める。図-1-cより角 φ の点の曲げモーメントおよびねじりモーメントを求めて、それらによる歪エネルギーを計算する。それにカスチリアノの定理を適用して節点①の変位を節点外力で表わし、マトリックス表示する。この場合、節点変位と節点外力の関係は面内外力 (P_{x1} , P_{y1} , M_{z1}) と面内変位 (u_{x1} , u_{y1} , θ_{z1}) および面外力 (P_{z1} , M_{x1} , M_{y1}) と面外変位 (u_{z1} , θ_{x1} , θ_{y1}) とに分離して扱うことができ、次のように表わされる。

$$\begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ \theta_{z1} \end{Bmatrix} = \frac{R^2}{EI_z} \begin{bmatrix} cR & bR & a \\ bR & dR & e \\ a & e & \beta/R \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_{x1} \\ P_{y1} \\ M_{z1} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{Bmatrix} u_{z1} \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \end{Bmatrix} = \frac{R^2}{EI_y} \begin{bmatrix} uR & w & v \\ w & z/R & y/R \\ v & y/R & x/R \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_{z1} \\ M_{x1} \\ M_{y1} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

ここで、

$$\begin{aligned} a &= \beta - \sin\beta, \quad b = \frac{\sin^2\beta}{2} + \cos\beta - 1, \quad e = \cos\beta - 1 \\ c &= \frac{3\beta}{2} - 2\sin\beta + \frac{\sin 2\beta}{4}, \quad d = \frac{\beta}{2} - \frac{\sin 2\beta}{4} \\ u &= \frac{1}{2}(\beta - \sin\beta \cos\beta) + \gamma \left(\frac{3\beta}{2} - 2\sin\beta + \frac{\sin 2\beta}{4} \right) \\ v &= \frac{\sin^2\beta}{2} + \gamma \left(1 - \cos\beta - \frac{\sin^2\beta}{2} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

$$w = \frac{1}{2}(\sin\beta \cos\beta - \beta) + \gamma \left\{ \sin\beta - \frac{1}{2}(\beta + \sin\beta \cos\beta) \right\}$$

$$x = \frac{1}{2}(\beta + \sin\beta \cos\beta) + \frac{\gamma}{2}(\beta - \sin\beta \cos\beta)$$

$$y = -\frac{\sin^2\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}\sin^2\beta$$

$$z = \frac{1}{2}(\beta - \sin\beta \cos\beta) + \frac{\gamma}{2}(\beta + \sin\beta \cos\beta)$$

$$\gamma = \frac{EI_y}{GJ}$$

式(2)および(3)を逆変換して節点力を節点変位で表わす

と次式が得られる。

$$\begin{Bmatrix} P_{x1} \\ P_{y1} \\ M_{z1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ B_1 & D_1 & E_1 \\ C_1 & E_1 & F_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ \theta_{z1} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{Bmatrix} P_{z1} \\ M_{x1} \\ M_{y1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 & W_1 & V_1 \\ W_1 & Z_1 & Y_1 \\ V_1 & Y_1 & X_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{z1} \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

ここで、

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{EI_z}{R^3 F} \left(\frac{e^2}{\beta} - d \right), \quad B_1 = \frac{EI_z}{R^3 F} \left(b - \frac{ae}{\beta} \right) \\ C_1 &= \frac{EI_z}{R^3 F} (ad - be) \frac{R}{\beta}, \quad D_1 = \frac{EI_z}{R^3 F} \left(\frac{a^2}{\beta} - c \right) \\ E_1 &= \frac{EI_z}{R^3 F} (ce - ab) \frac{R}{\beta}, \quad F_1 = \frac{EI_z}{R^3 F} (b^2 - cd) \frac{R^2}{\beta} \\ U_1 &= \frac{EI_y}{R^3 H} (xz - y^2), \quad V_1 = \frac{EI_y}{R^3 H} (wy - vz) \end{aligned} \quad (7)$$

$$W_1 = \frac{EI_y}{R^2 H} (vy - wx), \quad X_1 = \frac{EI_y}{RH} (uz - w^2)$$

$$Y_1 = \frac{EI_y}{RH} (wv - uy), \quad Z_1 = \frac{EI_y}{RH} (ux - v^2)$$

$$F = b \left(b - \frac{2ae}{\beta} \right) + c \left(\frac{e^2}{\beta} - d \right) + \frac{a^2 d}{\beta}$$

$$H = z(ux - v^2) + w(2vy - wx) - uy^2$$

式(5)および式(6)は部分マトリックス $[\mathbf{K}_{11}]$ の部分マトリックスである。この両式を合成して、求める部分マトリックス $[\mathbf{K}_{11}]$ は次のように表わされる。

$$\begin{Bmatrix} P_{x1} \\ P_{y1} \\ M_{z1} \\ P_{z1} \\ M_{x1} \\ M_{y1} \end{Bmatrix} = [\mathbf{K}_{11}] \begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ \theta_{z1} \\ u_{z1} \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \end{Bmatrix} \quad (8 \cdot a)$$

$$[\mathbf{K}_{11}] = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & & & \\ B_1 & D_1 & E_1 & & & \\ C_1 & E_1 & F_1 & & & \\ & & & U_1 & W_1 & V_1 \\ & & & W_1 & Z_1 & Y_1 \\ & & & V_1 & Y_1 & X_1 \end{bmatrix} \quad (8 \cdot b)$$

(2) 部分マトリックス $[\mathbf{K}_{22}]$

節点①を固定端と考え、 $[\mathbf{K}_{11}]$ を求めたと同様にして節点変位を求めると次式となる。

$$\begin{Bmatrix} u_{x2} \\ u_{y2} \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix} = \frac{R^2}{EI_z} \begin{bmatrix} cR & -bR & a \\ -bR & dR & -e \\ a & -e & \beta/R \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_{x2} \\ P_{y2} \\ M_{z2} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{Bmatrix} u_{z2} \\ \theta_{y2} \\ \theta_{x2} \end{Bmatrix} = \frac{R^2}{EI_y} \begin{bmatrix} uR & -v & w \\ -v & x/R & -y/R \\ w & -y/R & z/R \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_{z2} \\ M_{y2} \\ M_{x2} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

式(9)および式(10)の逆変換を取り、節点力を節点変位で表わして、両式を合成すると求める部分マトリックス $[K_{22}]$ は次式で表わされる。

$$\begin{Bmatrix} P_{x2} \\ P_{y2} \\ M_{x2} \\ P_{z2} \\ M_{y2} \end{Bmatrix} = [K_{22}] \begin{Bmatrix} u_{x2} \\ u_{y2} \\ \theta_{z2} \\ u_{z2} \\ \theta_{y2} \end{Bmatrix} \quad (11 \cdot a)$$

$$[K_{22}] = \begin{bmatrix} A_1 & -B_1 & C_1 & & \\ -B_1 & D_1 & E_1 & & \\ C_1 & -E_1 & F_1 & & \\ & & & U_1 & W_1 & -V_1 \\ & & & & W_1 & Z_1 & -Y_1 \\ & & & & -V_1 & -Y_1 & X_1 \end{bmatrix} \quad (11 \cdot b)$$

(3) 部分マトリックス $[K_{21}]$, $[K_{12}]$

図-2・bにおいて節点②を固定端として、力の釣合を考えることにより $[K_{21}]$ は次のように得られる。

$$[K_{21}] = \begin{bmatrix} A_2 & B_2 & C_2 & & \\ -B_2 & D_2 & E_2 & & \\ C_2 & -E_2 & F_2 & & \\ & & & U_2 & W_2 & V_2 \\ & & & & W_2 & Z_2 & -Y_2 \\ & & & & -V_2 & Y_2 & X_2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

ここで、

$$\begin{cases} A_2 = -A_1 \cos \beta - B_1 \sin \beta \\ B_2 = -B_1 \cos \beta - D_1 \sin \beta \\ C_2 = -C_1 \cos \beta - E_1 \sin \beta \\ D_2 = B_1 \sin \beta - D_1 \cos \beta \end{cases}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} A_1 & & & & & & & & \\ B_1 & D_1 & & & & & & & \\ C_1 & E_1 & F_1 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & U_1 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & W_1 & Z_1 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & V_1 & Y_1 & X_1 & & & \\ A_2 & B_2 & C_2 & 0 & 0 & 0 & A_1 & & \\ -B_2 & D_2 & E_2 & 0 & 0 & 0 & -B_1 & D_1 & \\ C_2 & -E_2 & F_2 & 0 & 0 & 0 & C_1 & -E_1 & F_1 \\ 0 & 0 & 0 & U_2 & W_2 & V_2 & 0 & 0 & 0 & U_1 \\ 0 & 0 & 0 & W_2 & Z_2 & -Y_2 & 0 & 0 & 0 & W_1 & Z_1 \\ 0 & 0 & 0 & -V_2 & Y_2 & X_2 & 0 & 0 & 0 & -V_1 & -Y_1 & X_1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

なお、式(2)を誘導する際に、変形におよぼす軸力の影響を無視したが、要素の断面積を A として、軸力による歪エネルギーをも考慮して変位を求めると式(4)の中の b , c および d は次のようになる。

$$\begin{cases} E_2 = C_1 \sin \beta - E_1 \cos \beta \\ F_2 = E_1 R \sin \beta - C_1 R (1 - \cos \beta) - F_1 \\ U_2 = -U_1, \quad V_2 = -V_1, \quad W_2 = -W_1 \\ X_2 = -V_1 R \sin \beta - X_1 \cos \beta + Y_1 \sin \beta \\ Y_2 = -W_1 R \sin \beta - Y_1 \cos \beta + Z_1 \sin \beta \\ Z_2 = -W_1 R (1 - \cos \beta) - Y_1 \sin \beta - Z_1 \cos \beta \end{cases} \quad (13)$$

部分マトリックス $[K_{12}]$ は $[K_{21}]$ の転置マトリックスであり次式となる。

$$[K_{12}] = [K_{21}]^T \quad (14)$$

(4) 面外荷重に対する剛性マトリックス

$$\begin{Bmatrix} P_{z1} \\ M_{x1} \\ M_{y1} \\ P_{z2} \\ M_{x2} \\ M_{y2} \end{Bmatrix} = [K'] \begin{Bmatrix} u_{z1} \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ u_{z2} \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \end{Bmatrix} \quad (15 \cdot a)$$

$$[K'] = \begin{bmatrix} U_1 & & & & & \\ W_1 & Z_1 & & & & \text{Symmetrical} \\ V_1 & Y_1 & X_1 & & & \\ U_2 & W_2 & V_2 & U_1 & & \\ W_2 & Z_2 & -Y_2 & W_1 & Z_1 & \\ -V_2 & Y_2 & X_2 & -V_1 & -Y_1 & X_1 \end{bmatrix} \quad (15 \cdot b)$$

上式の部分マトリックス $[K']$ が面外荷重に対する剛性マトリックスである。

(5) 部分マトリックスの合成

式(8・b), (11・b), (12)および式(14)を重ね合わせて一般的荷重に対する剛性マトリックス $[K]$ が次のように得られる。

$$\begin{aligned} b &= \frac{\sin^2 \beta}{2} + \cos \beta - 1 + \frac{R}{EA} \cdot \frac{EI_z}{R^3} \cdot \frac{\sin^2 \beta}{2} \\ c &= \frac{3}{2} \beta - 2 \sin \beta + \frac{\sin 2\beta}{4} + \frac{R}{EA} \cdot \frac{EI_z}{R^3} \left(\frac{\beta}{2} + \frac{\sin 2\beta}{4} \right) \\ d &= \frac{\beta}{2} - \frac{\sin 2\beta}{4} + \frac{R}{EA} \cdot \frac{EI_z}{R^3} \left(\frac{\beta}{2} - \frac{\sin 2\beta}{4} \right) \end{aligned} \quad (17)$$

3. 円弧曲線部材の剛性マトリックスの応用例

前項で誘導した剛性マトリックスの有用性を検証するため次のような構造につき、断面力および変位の影響線をもとめ、結果を検討した。

(1) 半径の異なる円弧部材をもつ連続げた。

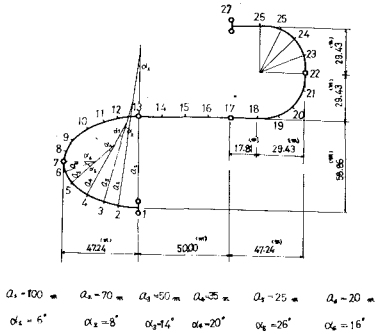


図 - 2

支点1, 27は曲げに対して単純支持でねじりに対して回転不能である。支点7, 13, 17, 22は点支持で垂直変位が零である。この連続げたはCh. Petersen⁽²⁾がÜbertragungs-matrizenにより解いたものであり、各種の移動荷重による断面力の影響線が剛性マトリックスを用いて解いた筆者らの計算結果と全く一致していることが確かめられた。

(2) 分岐した曲線材を持つ単げたの解析

図-3に示した単げたの左支点および二つの右支店はいずれもねじり角および垂直変位が零である。左支店は水平方向の変位も零である。左支点から分岐点までの距離 $\ell_1=0.7\text{ m}$ 、分岐点から右支店までの距離 $\ell_2=0.5\text{ m}$ である。

けたの断面諸量は次のようである。

$EI_y=0.012\text{ tm}^2$, $GJ=0.0140\text{ tm}^2$, 曲線材の曲線半径 $R=0.5\text{ m}$, 中心角 $\varphi=60^\circ$

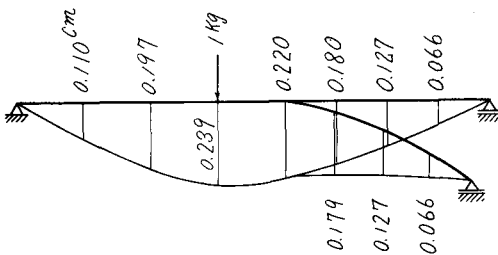


図 - 3

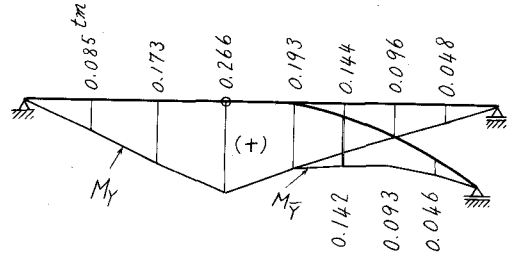


図 - 4

(3) 分岐した曲線材を含む立体ラーメンの解法

図-3の分岐点に垂直材が剛結されたラーメンのたわみ曲線を図-5に、曲げモーメントの影響線を図-6にそれぞれ示す。柱材の断面諸量は $EI_y=EI_x=0.0522\text{ tm}^2$, $GJ=0.0391\text{ tm}^2$, 高さ $\ell_3=0.3\text{ m}$ である。

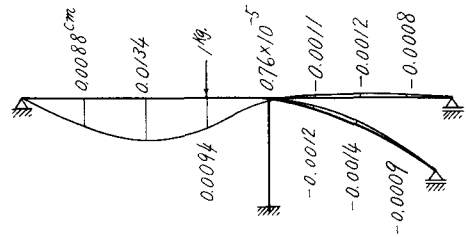


図 - 5

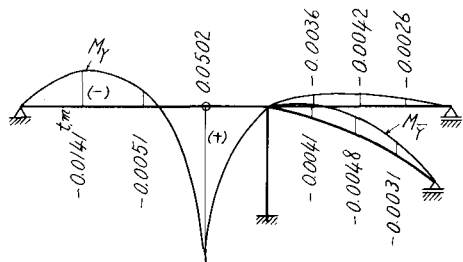


図 - 6

(4) 曲線材を含む連続立体ラーメンの静的および動的解析

図-7に示す直線材と曲線材とからなる立体ラーメンの解析には局所座標系では不便であるので変換マトリックスを用いて基準座標系に直して考える。また、図-5のラーメンの柱材においても同様であるが図-7の柱材に対しては直線部材の一般の荷重を受ける場合の剛性マトリックスが必要となる。それと円弧曲線部材の剛性マ

あるから12ヶの固有値，固有ベクトルが得られる。その結果の中対称振動の一次，二次および逆対称振動の一次を示すと図-8，図-9および図-10となる。

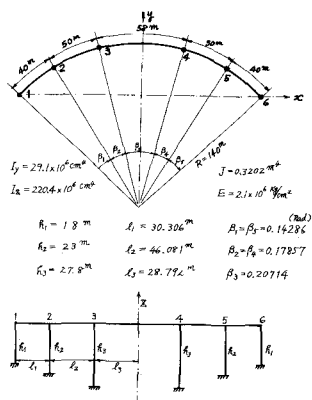
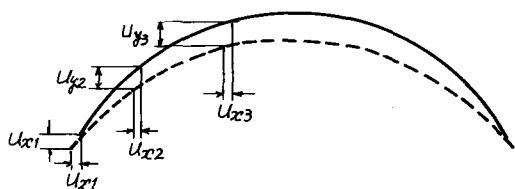


图 - 7

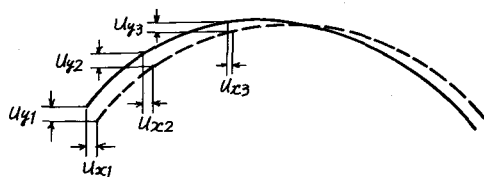
本橋は固有振動周期が1秒前後と推定されるフレキシブルな構造であるので動的解析が必要である。構造全体の剛性方程式はすべての自由度を考えた一般的な表現となるが、このラーメン橋の場合は垂直方向の振動は考慮しない。また回転変位と捩れ変位による慣性力の影響は、水平方向に比較的小さいとみて無視する。したがって、水平力以外を零として剛性方程式を次のように書きかえる。



对称振動 1 次 $T_1 = 1.145 \text{ sec.}$



对称振動 2 次 $T_2 = 0.951 \text{ sec.}$



逆对称振動 1 次 $T_1 = 1.194^{Sec.}$

$$\begin{Bmatrix} P_{x1} \\ \vdots \\ P_{xn} \\ P_{y1} \\ \vdots \\ P_{yn} \end{Bmatrix} = [\mathbf{K}_{11}] \begin{Bmatrix} u_{x1} \\ \vdots \\ u_{xn} \\ u_{y1} \\ \vdots \\ u_{yn} \end{Bmatrix} + [\mathbf{K}_{12}] \begin{Bmatrix} u_z \\ \vdots \\ u_x \\ \vdots \\ \theta_x \\ \vdots \\ \theta_z \end{Bmatrix} \quad (18)$$

$$\{\mathbf{0}\} = [\mathbf{K}_{21}] \begin{Bmatrix} u_x \\ \vdots \\ u_{xm} \\ u_{y1} \\ \vdots \\ u_{ym} \end{Bmatrix} + [\mathbf{K}_{22}] \begin{Bmatrix} u_z \\ \vdots \\ \theta_x \\ \vdots \\ \theta_y \\ \vdots \\ \theta_z \end{Bmatrix} \quad (19)$$

上式から列ベクトル $\{u_z \cdot \cdot \theta_y \cdot \cdot \theta_z \cdot \cdot\}$ を求めて式(18)に代入すると、次の非減衰自由振動方程式が得られる。

$$[M] \{\ddot{U}\} = - [K] \{U\} \quad (20)$$

これにより得られる振動数方程式から固有周期および振動モードが求められるが、この例の場合は6質点系で

4. 結 語

剛性マトリックス法（剛性法）は応力法に比較して、その有益性が多次不静定構造物の解析に特に発揮される。

剛性マトリックス法によると機械的に簡明な表現が得られ、計算機にかけやすく、机上における作業が少なく、つむ点など構造物の種類によっては、非常に有利な解法となる。

参 考 文 献

- (1) H. C. Martin 吉識 雅夫訳
「マトリックス法による構造力学の解法」培風館
- (2) Ch. Petersen 「Übertragungsmatrigen für gekrümmte Träger」Bauingenieur 41 (1966) Heft 3
- (3) 芳村 仁, 奥村 勇, 岩上 淳一 「曲線材を含む立体構造物の解析について」マトリックス構造解析法研究発表論文集 日本鋼造協会 昭和46年6月