

マトリックス法による月降水量のシミュレーション

正 員 星

清*

1. はじめに

従来から水文量のシミュレーションに関する数多くの研究がなされてきた。その主たるものは、一次マルコフ過程に基づく方法や一回帰線による point analysis である。本報告では多変量間に存在する相関性に基づいて、情報を最大限に活用するためにマトリックス法を導入している。

実際問題として水文量解析においては、ある一地点だけの水文量が比較的長期間にわたって観測値が完備され、それを使って解析に必要な近傍の数地点の水文量をできるだけ高精度で推定することが要求される場合が多い。本報告では上述した目的を達成するために、一個の基幹観測所から数個の衛星観測所の水文量時系列を同時に発生させる一方法、すなわち一般に用いられている多重回帰線とは逆の方法について述べている。

2. 記号の定義

n : 衛星観測所の個数

N : 観測標本数

$\mathbf{Y}$: 標準化された衛星観測所間のデータマトリックス
 $[n \times N]$ マトリックス

$\mathbf{X}$: 標準化された基幹観測所のデータマトリックス
 $[1 \times N]$ マトリックス

$\mathbf{e}$: 平均値 0, 標準偏差 1 をもつランダム成分
 $[n \times N]$ マトリックス

$\mathbf{A}$: $[n \times 1]$ の係数マトリックス

$\mathbf{B}$: $[n \times n]$ の係数マトリックス

$\mathbf{0}$: 零ベクトル

$\mathbf{I}$: 単位マトリックス

$\mathbf{X}^T$: $\mathbf{X}$ の転置ベクトル

$\mathbf{Y}^T$: $\mathbf{Y}$ の転置マトリックス

$\mathbf{R}$: 基幹観測所と衛星観測所の相関係数
 ベクトル

$$\mathbf{R} = \frac{1}{N} \mathbf{Y} \mathbf{X}^T$$

$\mathbf{R}_1$: 衛星観測所間の相関係数マトリックス

$$\mathbf{R}_1 = \frac{1}{N} \mathbf{Y} \mathbf{Y}^T$$

$\mathbf{B}^{-1}$: $\mathbf{B}$ の逆マトリックス

3. 基本式

衛星観測所の月降水量シミュレーションのための基本式として、次の線型モデル式を考える。

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A} \mathbf{X} + \mathbf{B} \mathbf{e} \quad (1)$$

(1) 式の右から $\mathbf{X}^T$ を乗ずると、 $\mathbf{e} \mathbf{X}^T = \mathbf{0}$ であることから次式を得る。

$$\mathbf{A} = \mathbf{Y} \mathbf{X}^T / \mathbf{X} \mathbf{X}^T = \frac{1}{N} \mathbf{Y} \mathbf{X}^T / \frac{1}{N} \mathbf{X} \mathbf{X}^T \quad (2), (3)$$

(3) 式において、 $\frac{1}{N} \mathbf{X} \mathbf{X}^T = 1$ であるから、(3) 式は次式のように変形される。

$$\mathbf{A} = \frac{1}{N} \mathbf{Y} \mathbf{X}^T = \mathbf{R} \quad (4)$$

次に(1)式の右から $\mathbf{Y}^T$ を乗ずると、

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} \mathbf{Y}^T &= \mathbf{A} \mathbf{X} \mathbf{Y}^T + \mathbf{B} \mathbf{e} \mathbf{Y}^T \\ &= \mathbf{A} \mathbf{X} \mathbf{Y}^T + \mathbf{B} \mathbf{e} (\mathbf{X}^T \mathbf{A}^T + \mathbf{e}^T \mathbf{B}^T) \end{aligned} \quad (5)$$

(5) 式に scalar 量 $\frac{1}{N}$ を乗ずると、 $\frac{1}{N} \mathbf{e} \mathbf{X}^T = \mathbf{0}$, $\frac{1}{N} \mathbf{e} \mathbf{e}^T = \mathbf{I}$ であることから(5)式は次のように変形される。

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \mathbf{B}^T &= \frac{1}{N} \mathbf{Y} \mathbf{Y}^T - \mathbf{A} \left(\frac{1}{N} \mathbf{X} \mathbf{Y}^T \right) \\ &= \mathbf{R}_1 - \mathbf{R} \mathbf{R}^T \end{aligned} \quad (6)$$

(6) 式の $\mathbf{B} \mathbf{B}^T$ は対称マトリックスになるので、マトリックス $\mathbf{B}$ の成分は固有値問題の固有ベクトルを求めることに相応する。そこで、(6) 式のマトリックス $\mathbf{B}$ を求めるために主軸法を利用する。

係数マトリックス $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ の物理的意味は(4)式と(6)式にそれぞれ示されるように、基幹観測所と衛星観測所の相関性および衛星観測所間の相関性に相互に依存していることである。

(1) 式の $\mathbf{A} \mathbf{X}$ を左辺に移項したのち、両辺の左から $\mathbf{B}^{-1}$ を乗ずると、 $\mathbf{B}^{-1} \mathbf{B} = \mathbf{I}$ であるから次式が得られる。

$$\mathbf{e} = \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbf{A} \mathbf{X}) \quad (7)$$

* 北海道大学工学部助手

理論的には標本数が大なとき、 ϵ の分布関数は $N(0, 1)$ に従うはずであるが、有限な標本数ではその条件を満足させることができない。そのために ϵ の分布関数が近似的に $N(0, 1)$ を満足するように観測所のデータマトリックスに適当な変換をほどこす。変換系が決定されればモンテカルロ法によって衛星観測所の母集団についての統計量を推定することができる。

4. 解析例と結果

以上述べた理論を検証するために、石狩川上流流域と雨龍川流域の複合地域を選んだ。基幹観測所として旭川を採用し、衛星観測所としては上川、愛別、永山、美瑛、西神楽、朱鞠内、幌加内、石狩沼田の8地点を選んだ。なお既往観測標本数は基幹観測所については79個（1892—1970）、衛星観測所については19個（1952—1970）である。又北海道は冬期の積雪期間を有するので、water year を11月から10月までとした。Fig. 1 は採用流域と採用観測所の位置を示したものである。シミュレーションを行なうに際しての計算は北大計算センター内FACOM 230—60 上で実行した。

衛星観測所の月降水量をシミュレーションする場合の結果の精度は、(7)式の ϵ のマトリックスについては正規乱数を発生させる関係上、基幹観測所のデータマトリックス $\mathbf{X}$ の正規変換方法に強く影響される。そこで旭川の79個の原系列のデータを各々の月降水量について次の6種の変換をほどこした。

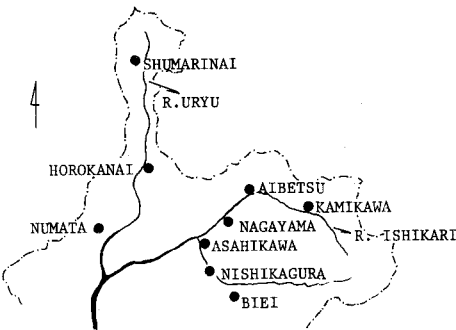


Fig.1 Location of selected Basin and Stations

Table 1 The Choice of Transformation at ASAHIKAWA

Sample size 79 (1892—1970)

Month	Pattern of Transformation	Skewness	Kurtosis
November	Square Root Transfopmation	— 0.019	3.289
December	No Transformation	0.232	3.078
January	Cubic Root Transformation	0.047	3.155
February	Square Root Transformatin	— 0.202	2.243
March	Square Root Transformation	— 0.171	2.988
April	Square Root Transformation	0.051	3.298
May	Square Root Transformation	0.011	2.247
June	No Transformation	0.093	2.528
July	Log Pearson Type III	0.127	2.640
August	Pearson Type III	— 0.068	3.629
September	Log Pearson Type III	— 0.036	2.706
October	Square Root Transformation	— 0.003	3.338
Pa *	No Transformation	0.126	3.440

Pa * ; accumulated precipitation from Nov. to Feb.

- (1) 原系列のまま
- (2) ピアソン第3型
- (3) 対数変換
- (4) 対数ピアソン第3型
- (5) 平方根変換
- (6) 立方根変換

Table 1 は基幹観測所旭川における各々の月降水量について、正規化に最も近いと考えられる変換系とそのときの重度と尖度を示したものである。なお表中の Pa で

示される項は11月から2月までの累加降水量である。

Fig. 2—A とFig. 2—Bはそれぞれ、旭川における1月の降水量と7月の降水量をそれぞれの変換系について累加度数分布を確率紙上に plotting したものである。これらの図からも各々の月降水量の変換系がほぼ正規化の条件をみたしていると考えられる。

基幹観測所の変換系が決定されれば、衛星観測所の既往データマトリックスも各々の月降水量について基幹観測所の変換系に従い、係数マトリックス **A**、**B** が求め

られる。

Table 2 は一例として7月の降水量について、係数マトリックス **A**、**B** を掲げたものである。

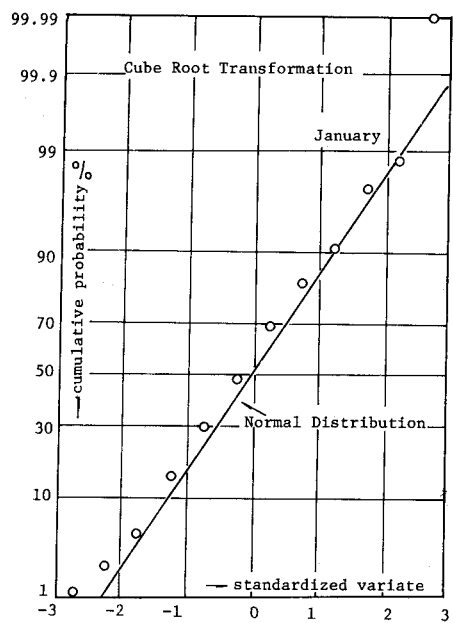


Fig.2-A 累加度数分布

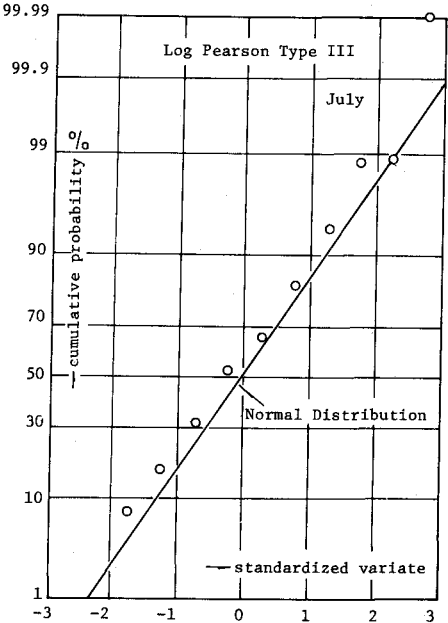


Fig.2-B 累加度数分布

Table 3 から Table 6 までは、上述した方法によって衛星観測所の月降水量をシミュレーションした結果を実測値と対比して掲げたものである。Table 3 に平均値、Table 4 に標準偏差を示してある。なお表中の obs. は実測値、sim. はシミュレートした値である。

Table 5-A と Table 6-A はそれぞれ、1 月と 7 月

の降水量についての実測相関係数マトリックスであり、Table 5-B と Table 6-B はそれぞれの月降水量についてのシミュレートされた相関係数マトリックスである。これらの表からも実測値とシミュレートされた値について有意な差はみられず、シミュレーションの一方法として (1) のモデル式は有効な手段であると考えられる。

Table 2 Coefficient Matrices A and B
Transformation by Log Pearson Type III July

	A	B							
1	0.876	0.211	- 0.024	0.303	0.226	- 0.169	0.130	- 0.025	- 0.047
2	0.735	0.499	- 0.131	0.374	- 0.167	0.054	- 0.143	- 0.043	- 0.000
3	0.955	0.114	- 0.089	0.137	- 0.028	0.068	0.058	0.197	- 0.015
4	0.694	0.338	0.627	- 0.053	- 0.043	0.048	0.001	0.004	- 0.068
5	0.910	0.208	0.294	0.063	0.063	- 0.117	- 0.044	0.037	0.131
6	0.600	0.687	- 0.199	- 0.265	0.217	0.080	- 0.070	0.005	- 0.002
7	0.795	0.449	- 0.135	- 0.205	- 0.242	- 0.174	0.135	- 0.001	0.001
8	0.931	0.148	0.028	0.079	- 0.005	0.219	0.226	- 0.054	0.055

Table 3 Comparison of the Observed and Simulated Precipitation Means of Monthly Precipitation

Station	Month	Nov.	Dec.	Jan.	Feb.	Mar.	Apr.	May	Jun.	Jul.	Aug.	Sep.	Oct.	Pa
KAMIKAWA	obs.	115.74	88.21	82.42	60.00	69.58	66.47	99.47	109.63	150.95	194.58	144.74	105.26	346.37
	sim.	119.07	86.97	83.03	62.44	71.57	67.58	99.86	111.52	149.99	199.06	147.71	105.91	351.59
AIBETSU	obs.	124.42	101.63	101.90	79.21	81.21	77.84	90.26	99.26	149.32	175.74	140.42	104.74	407.16
	sim.	125.94	99.86	103.51	79.36	82.55	78.28	92.04	99.92	151.63	174.82	144.88	104.12	411.25
NAGAYAMA	obs.	101.16	69.47	65.26	51.58	50.16	61.16	83.11	85.63	135.95	173.58	138.84	84.63	287.47
	sim.	99.08	70.49	65.27	53.51	49.49	60.63	81.99	83.94	131.20	172.82	138.95	83.85	293.32
BIEI	obs.	95.00	90.05	78.32	61.58	64.74	61.63	73.53	79.84	113.42	173.47	125.00	80.11	324.95
	sim.	95.08	90.78	77.44	60.79	64.00	62.34	74.92	82.08	117.97	178.23	128.41	82.11	321.23
NISHIKAGURA	obs.	95.58	73.00	67.95	52.53	51.16	57.37	76.63	85.74	118.95	182.32	138.32	82.21	289.05
	sim.	95.28	73.99	66.61	52.92	50.42	56.72	77.39	87.33	118.84	181.19	139.58	83.74	286.16
SHUMARINAI	obs.	192.00	236.84	201.16	147.37	132.74	86.74	95.21	106.95	163.16	200.42	193.16	154.58	777.37
	sim.	195.48	238.47	202.31	150.40	129.13	89.01	95.99	107.82	169.21	204.64	201.88	155.80	784.85
HOROKANAI	obs.	197.79	221.58	170.37	143.58	109.63	83.32	87.58	90.11	167.63	188.16	173.47	138.68	733.32
	sim.	198.75	225.79	174.15	142.85	110.75	83.77	88.61	90.85	167.07	190.47	174.32	140.87	730.61
NUMATA	obs.	155.84	152.11	136.79	97.74	76.58	70.58	74.90	77.79	127.58	160.68	150.79	121.58	542.47
	sim.	154.97	155.33	142.62	96.28	77.21	68.50	73.81	77.59	128.29	165.19	153.42	124.35	542.78

Table 4 Comparison of the Observed and Simulated Precipitation Standard Deviations of Monthly Precipitation

Station	Month	Nov.	Dec.	Jan.	Feb.	Mar.	Apr.	May	Jun.	Jul.	Aug.	Sep.	Oct.	Pa
KAMIKAWA	obs.	42.52	23.45	23.69	21.94	24.55	27.85	38.21	38.77	68.44	91.98	38.06	43.39	79.63
	sim.	41.40	25.07	26.04	23.05	26.24	28.30	31.23	37.38	68.02	100.31	48.63	38.94	77.75
AIBETSU	obs.	35.78	27.28	23.73	31.54	30.44	26.63	27.05	32.47	65.54	94.73	47.15	43.34	66.46
	sim.	32.73	26.78	23.95	31.90	29.52	29.11	25.52	31.54	78.66	92.79	69.15	42.15	69.48
NAGAYAMA	obs.	27.63	24.85	26.93	24.63	20.93	20.69	29.15	27.34	81.44	109.48	51.27	41.25	73.98
	sim.	24.47	26.35	26.50	24.29	17.94	19.79	28.70	26.67	70.51	112.54	49.10	37.97	75.94
BIEI	obs.	34.67	28.73	25.00	27.86	21.51	28.32	29.03	30.47	47.31	87.59	54.08	43.59	85.06
	sim.	34.13	27.10	27.10	27.90	19.77	26.34	29.91	31.74	49.86	95.17	57.16	39.53	83.44
NISHIKAGURA	obs.	36.60	20.64	31.35	22.57	21.12	24.17	30.24	31.43	67.86	92.16	54.84	45.19	79.48
	sim.	34.17	18.19	32.19	23.86	18.72	21.08	29.30	30.32	58.07	97.03	59.63	39.22	77.34
SHUMARINAI	obs.	51.13	70.47	82.47	64.08	76.63	24.16	40.14	39.75	79.28	83.29	79.80	52.89	171.59
	sim.	58.77	79.28	86.48	68.01	71.53	29.75	38.28	43.71	94.65	90.24	97.41	52.39	190.04
HOROKANAI	obs.	47.75	51.31	71.77	54.85	50.32	29.03	35.93	32.22	97.75	89.02	62.96	45.06	133.09
	sim.	51.64	60.26	79.09	54.32	43.11	31.59	29.76	33.69	96.78	93.96	72.74	49.27	142.30
NUMATA	obs.	50.81	50.84	48.80	32.59	29.30	22.67	33.59	29.64	74.55	100.43	52.40	54.12	86.06
	sim.	47.39	50.18	58.26	33.26	31.31	23.57	29.74	30.77	84.49	120.98	74.77	51.17	92.40

Table 6—A Observed Correlation Matrix July

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	STATION
	1.000	0.874	0.735	0.955	0.694	0.910	0.600	0.795	0.931	ASAHIKAWA
		1.000	0.800	0.888	0.632	0.872	0.620	0.723	0.858	KAMIKAWA
			1.000	0.814	0.586	0.746	0.689	0.761	0.767	AIBETSU
ASAHIKAWA	1.000			1.000	0.645	0.869	0.629	0.797	0.931	NAGAYAMA
KAMIKAWA	0.299	1.000			1.000	0.866	0.532	0.631	0.716	BIEI
AIBETSU	0.691	0.220	1.000			1.000	0.621	0.763	0.860	NISHIKAGURA
NAGAYAMA	0.846	0.416	0.689	1.000			1.000	0.790	0.633	SHUMARINAI
BIEI	0.820	0.063	0.592	0.741	1.000			1.000	0.780	HOROKANAI
NISHIKAGURA	0.765	0.172	0.564	0.674	0.778	1.000			1.000	NUMATA
SHUMARINAI	0.812	0.140	0.733	0.742	0.569	0.574	1.000			
HOROKANAI	0.777	-0.147	0.698	0.589	0.703	0.609	0.793	1.000		
NUMATA	0.755	-0.015	0.580	0.631	0.645	0.587	0.744	0.890	1.000	
STATION	1	2	3	4	5	6	7	8	9	

Table 5—A Observed Correlation Matrix January

Table 6—B Simulated Correlation Matrix July

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	STATION
	1.000	0.894	0.798	0.959	0.739	0.912	0.667	0.828	0.924	ASAHIKAWA
		1.000	0.782	0.904	0.694	0.878	0.712	0.755	0.882	KAMIKAWA
			1.000	0.868	0.676	0.769	0.813	0.841	0.863	AIBETSU
ASAHIKAWA	1.000			1.000	0.732	0.890	0.727	0.857	0.929	NAGAYAMA
KAMIKAWA	0.341	1.000			1.000	0.882	0.642	0.692	0.770	BIEI
AIBETSU	0.696	0.180	1.000			1.000	0.703	0.795	0.862	NISHIKAGURA
NAGAYAMA	0.869	0.416	0.644	1.000			1.000	0.827	0.763	SHUMARINAI
BIEI	0.857	0.116	0.653	0.790	1.000			1.000	0.817	HOROKANAI
NISHIKAGURA	0.833	0.317	0.538	0.758	0.818	1.000			1.000	NUMATA
SHUMARINAI	0.837	0.135	0.732	0.767	0.682	0.647	1.000			
HOROKANAI	0.704	-0.198	0.671	0.523	0.662	0.534	0.803	1.000		
NUMATA	0.765	-0.017	0.602	0.664	0.689	0.622	0.820	0.884	1.000	
STATION	1	2	3	4	5	6	7	8	9	

Table 5—B Simulated Correlation Matrix January

5. おわりに

従来の point analysis では観測所固有の変動成分や観測誤差が決定された係数に強く影響して、十分満足する結果が得られないことが多い。マトリックス法によれば選ばれた観測所間の相関性に基づいて各々の観測所の情報量がお互いに交換され、得られた結果にその情報量が統合ないしは分配される形をとるので point analysis の欠点を除去することができる。

水文量解析を行なうに際して、長期間にわたる観測資

料を有する一カ所だけの観測所を選ぶことは比較的容易であり、上述の方法によれば解析に必要な観測所の水文量を同時に求めることが可能であり労力と時間を節約できる点でも有効であると考えられる。

今後の研究課題として、広流域にわたる月降水量のシミュレーションを行ない降水特性を把握すること、又利水計画における流量シミュレーションに上述の降水量シミュレーションを導入することである。

最後にこの研究に際して指導してくださった山岡勲教授ならびに藤田睦博助教授に深く感謝いたします。