待ち行列モデルによる二車線道路の交通流解析

正員　板倉忠三*
正員　堀江清一**

1. はじめに

追越し現象は非常に重要な交通現象であり従来多くの研究がなされてきた。これらの研究は交通流の研究の中でも比較的早くから行なわれてきており成果もあがっている。

本文は地方部二車線道路における追越し現象を待ち行列理論を応用して説明しようと試みたものであるが、現在までの多くの研究を土台にし，追越し現象を他の諸現象と関連してとらえる点に重点をおいた。なお，待ち行列理論の公式的なものについてはその結果をそのまま用いている。また，本文において設定されたモデルは一般国道12号線幌向における実測データをもとに論じられている。

2. 追越し現象のモデル化

本文では車群が形成される原因は追越し待ちによるものであるという考えに基づいて待ち行列理論を応用するが，そのため交通流に対し次のような仮定を設けた。

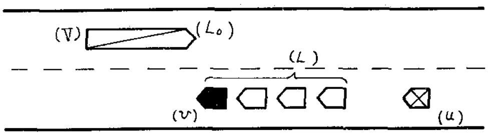
(1) 走行車両は低速車と高速車の二種であり，追越しを希望しないで走行するものを低速車，低速車に追いついた時に追越しを希望するものを高速車と言い各々の車は速度 v， u に保って走行する。

(2) 低速車に高速車が追いついた時に窓口である低速車に客が到着したものとし，追越しが完了した時にサービスが終了するものとする。

(3) 車群とは必ず先頭車として低速車が存在しており，それに追従する高速車を含む一団となった走行車群を呼ぶことにする。また，車群内の車頭間隔は一定値 t である。

(4) 対向流の到着はポアソン分布に従い，速度は V に保っている。また，走行は車群長（台数）L_o の車群で走行するものとする。

以上の仮定より，待ち行列交通流システムは図1のように表わすことが出来る。このとき，窓口 v ー車が一定速度であるからこの窓口への対向車の到着は仮定（4）よりポアソン分布に従うものとなる。



図―1　交通流待ち行列モデル

3. モデルの数学的記述について

3―1　対向流について

対向流の車群の交通量 q_s は全交通量 q から追従走行車（混入率 φ_0）の交通量を引くことにより得られるから，平均追従車台数 L_s^0，利用率（後述）ρ_0 を既知とすると

$$q_s = q\,(1-\varphi_0 L_s^0) = q\left(1-\frac{\rho_0\varphi_0}{1-\rho_0}\right) \quad (1)$$

となる。また，一車群あたりの平均の長さ L_0 は次のように求められる。

$$L_0 = \frac{q}{q-\varphi_0 q L_s^0} = \frac{1-\rho_0}{1-p_0-\rho_0\varphi_0} \quad (2)$$

また，窓口 v ー車への対向車の平均到着率 λ_s は ν を車群先頭車間の車頭間隔とすると次式で与えられる。

$$\lambda_s = \frac{v+V}{V\nu} = \frac{q_s(u+V)}{V}$$

$$= q\left(1-\frac{\rho_0\varphi}{1-\rho_0}\right)\times\frac{v+V}{V} \quad (3)$$

3―2　追越しについて

図2のように u ー車がB地点で追越し動作に入り速度 u_d まで加速しながら対向車線に進入してA地点で追越しが終了するものとすると追越しに要する時間 θ は次式となる。

$$\theta = \frac{v\,(t+\tau)}{u_d-v}$$

ただし，v ー車はこの間一定速度 v で走行し，τ は高速車の追越し完了時の被追越し車との車頭時間とする。

次に u ー車が v ー車のすぐ後に追越してサービスを受

** 北海道大学工学部　教授　工博
* 北海道大学工学部　助手　工修

けながら走行する場合の追越し可能確率$P(0)$を考える。追越し可能とは図2において対向流の先頭車が窓口に到着してからω時間後に車群の最後車が窓口をはなれた時に高速車（追従中でvー車となっている）が追越しを開始して，追越しを終了した後δ時間（安全車頭間隔）後に対向車が到着する場合をいう。

このとき，ω，θは各々次式で与えられる。

$$\omega=\frac{Vt\ (L_0-1)}{v+V}$$

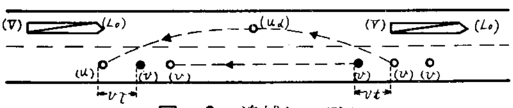
$$=\frac{Vt}{v+V}\times\frac{\rho_0\varphi_0}{1-\rho_0-\rho_0\varphi_0} \tag{5}$$

$$\delta=\frac{v\ (t+\tau)}{v+V} \tag{6}$$

よって，対向車群が（$\theta+\delta+\omega$）時間以上窓口へ到着して来なければ追越しが可能となるから

$$P(0)=e^{-\lambda s(\theta+\delta+\omega)} \tag{7}$$

となる。



図－2　追越しモデル

3－3　平均サービス率・到着率と平均車群長

単位時間あたりの可能追い越し回数を求める上で平均サービス率を明らかにしなければならない。サービス時間の確率$p(t)$は

$$p\ (t+dt)=p\ (t)+\{1-p\ (t)\}\lambda_s\ P(0)\ d\tau$$

であるから

$$p\ (t)\ =1-C'e^{-\lambda sP(0)t}$$

となり初期条件　$P(0)=p\ (0)$　より

$$p\ (t)=1-\{1-P\ (0)\}\ e^{-\lambda sP(0)\ t} \tag{8}$$

が得られる。よってサービス時間が（t，$t+dt$）以内となる確率密度を$a\ (t)$は次のようになる。

$$a\ (t)=\{1-P(0)\}\lambda_s P(0)\ e^{-\lambda sP(0)\ t} \tag{9}$$

この式は窓口においては指数サービスが行なわれることを示している。これらより平均サービス時間$E(t)$は

$$E(t)=\int_0^\infty t\ a\ (t)\ dt$$

$$=\frac{1-P(0)}{\lambda_s\ \ P(0)} \tag{10}$$

であり平均サービス率μは

$$\mu=\frac{1}{E(t)}=\frac{\lambda_s e^{-\lambda s\ (\theta+\delta+\omega)}}{1-e^{-\lambda s\ (\theta+\delta+\omega)}}$$

$$=\frac{\lambda_s}{e^{\lambda s\ (\theta+\delta+\omega)}-1} \tag{11}$$

で表わすことができる。

次に平均到着率λを考えるとvー車に到着してくるuー車を求めることになる。この様子を図3に示す。第3車が車群に到着し第1車がサービスを受けており，このとき第3車より後方の第4車（速度 u）が車群に接近し第3車とutの間隔を保ってT'時間後に到着する。ν'を自由走行高速車の平均車頭時間とし，その交通量をQ'とすると$\nu'=1/Q'$で表わされるから到着率λは次のように導びかれる。

$$T'=\frac{u\nu'-vt}{u-v}$$

$$\therefore\lambda=\frac{1}{T'}=\frac{u-v}{u\nu'-vt}$$

$$=\frac{Q'(u-v)}{u-Q'vt} \tag{12}$$

また，低速車（混入率φ）を含む車群の平均長Lは車群がn台より構成される確率p_nを求めることにより次のように得られる。ρは利用率とする。

$$p_n=(1-\rho)\rho^{n-1} \tag{13}$$

$$\therefore L=\sum_{n=1}^{\infty}np_n=(1-\rho)\frac{d}{d\rho}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n\right\}$$

$$=\frac{1}{1-\rho} \tag{14}$$

また

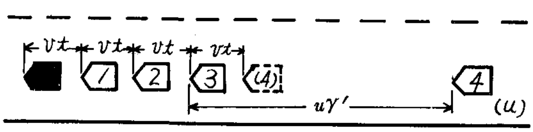
$$Q'=Q-\varphi\ QL \tag{15}$$

であるから(14),(15)式から

$$Q'=Q\times\frac{1-\rho-\varphi}{1-\rho} \tag{16}$$

であり，(12)式より平均到着率λは次式で求められる。

$$\lambda=\frac{Q\ (1-\rho-\varphi)\ (u-v)}{(1-\rho)\ u-Q\ (1-\rho-\varphi)\ vt} \tag{17}$$



図－3　到着モデル

3－4　利用率

利用率ρは待ち行列モデルにおいては，客が窓口に到着した時に窓口がふさがっている確率であり，待ち行列モデルの重要な要素である。利用率ρは

$$\rho=\frac{\lambda}{\mu} \tag{18}$$

で表わされるから(12),(17)式より次式が得られる。

$$\rho=\frac{Q(1-\rho-\varphi)(u-v)}{(1-\rho)u-Q(1-\rho-\varphi)vt}\times\frac{e^{\lambda s(\theta+\delta+\omega)}-1}{\lambda_s} \tag{19}$$

これをQについて解くと次式のようになる。

$$Q=\frac{\lambda_s\rho\ (1-\rho)\ u}{(1-\rho-\varphi)(u-v)\{exP\ (\lambda_s(\theta+\delta+\omega))-1\}+vt\lambda_s\rho\ (1-\rho-\varphi)} \tag{20}$$

3－5　追越し回数

低速車の密度をK'とすると単位区間に存在する窓口の数はK'個となる。そして高速車がサービスを受けている窓口の平均の数は$K'\rho$ となる。よって，単位区間・単位時間あたりの追越し回数Nは$K'=\varphi Q/v$とすると(11) 式より

$$N=K'\rho\mu$$

$$=\frac{\varphi Q\rho}{v}\times\frac{\lambda_s}{e^{\lambda s(\theta+\delta+\omega)}-1} \tag{21}$$

となる。また，高速車1台，単位時間あたりの平均追越し回数Mは高速車が低速車を追越した後，次の車群に到着するに要する時間Xと車群に到着した後にサービス(追越し)が完了するまでの時間Wにより次のようになる。

$$M=\frac{1}{X\times W} \tag{22}$$

ここでX，Wは次のように表わされる。

$$X=\frac{v/\varphi Q-Lvt}{u-v} \tag{23}$$

$$W=\frac{L_s}{\lambda}=\frac{1}{(1-\rho)\mu}$$

$$=\frac{e^{\lambda s(\theta+\delta+\omega)}-1}{(1-\rho)\lambda_s} \tag{24}$$

3－6　その他の諸量について

本節では以上の結果をもとにして交通現象のいくつかを簡単に述べる。

（1）全車の平均速度Umと高速車の平均速度$u\,m$

$$Um=\frac{v\varphi QL+u(Q-\varphi QL)}{Q}$$

$$=\frac{v\varphi+u(1-\rho-\varphi)}{1-\rho} \tag{25}$$

$$u_m=\frac{uX+vW}{X+W} \tag{26}$$

（2）遅れ時間

追越し一回あたりの遅れ時間は高速車が車群に追いついてから追越しを行なうまでの追従による遅れで，追従走行距離をSとすると1台あたりの遅れ時間D，単位時間あたりの平均遅れ時間D_ℓおよび単位距離あたりの平間あたりの平均遅れ時間D_t は各々次式により求められる。

$$D=W-\frac{S}{u}$$

$$=\frac{u-v}{u}\times\frac{e^{\lambda s(\theta+\delta+\omega)}-1}{(1-\rho)\lambda_s} \tag{27}$$

$$D_\ell=M\cdot D$$

$$D_t=\frac{M\cdot D}{u_m}$$

（3）車群台数分布

自由走行高速車も一つの車群として考えるとn台（$n\geqq 2$）で構成される車群がある一地点に到着する確率$P(n)$ は

$P(n)=$（窓口を有する車群の到着確率）×（その車群がn台である確率）

よって (13)，(16) 式より$P(n)$は次式となる。

$$P(n)=\frac{\varphi Q}{Q\left(1-\frac{\rho\varphi}{1-\rho}\right)}\times\rho^{n-1}(1-\rho)$$

$$=\frac{\varphi(1-\rho)^2}{1-\rho-\rho\varphi}\times\rho^{n-1}\quad(n\geqq 2) \tag{28}$$

同様に一台によって構成される車群の到着確率$P(1)$は(1)，(16) 式より次式で得られる。

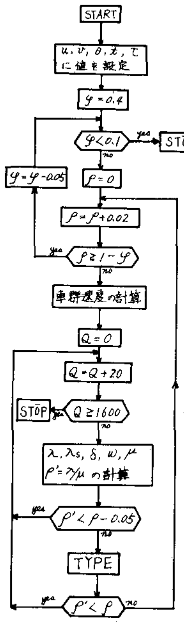
$$P(1)=\frac{\varphi Q}{Q\left(1-\frac{\rho\varphi}{1-\rho}\right)}\times(1-\rho)$$

$$+\frac{Q\left(\frac{1-\rho-\varphi}{1-\rho}\right)}{Q\left(1-\frac{\rho\varphi}{1-\rho}\right)}$$

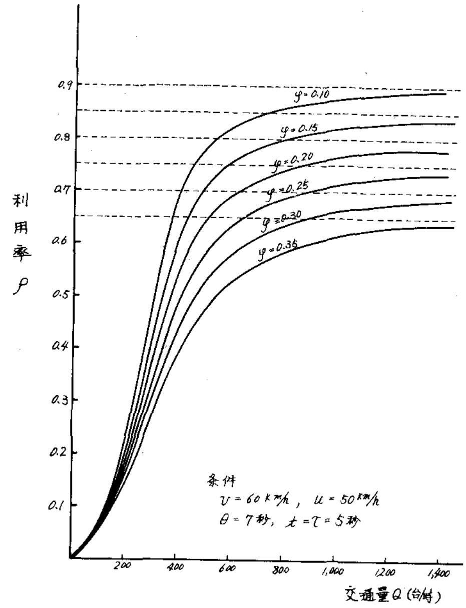
$$=\frac{\varphi(1-\rho)^2+(1-\rho-\varphi)}{1-\rho-\rho\varphi} \tag{29}$$

4.　利用率ρの計算について

本文におけるモデルにおいて利用率ρが重要な要素となるが直接には求めることが出来ないため収束計算により図4の方法で求めた。この結果を図5に示す。なお，この場合にV，v，θ，t，τ 等は仮定しなければならないが詳細には発表時に報告する。



図―4　利用率ρの計算流れ図



図―5　利用率と交通量(一方向)

5. あとがき

待ち行列モデルを利用して二車線道路の交通現象を利用率ρ，低速車混入率φおよび交通量Qを中心にして表現した。追越し回数および車群構成台数等の観測データとの比較では良く適合したが発表時に報告する。

本研究は著者らと共に研究した宮内昭征氏（日本道路公団）の努力による所が多くここに深謝いたします。

参考文献

1．J. C. Tanner "A Simplified Model for Delays in Overtaking on a Two-Lane Road" Jour., Royal Statist. Soc., Series B, 20—2, 1958

2．A. J. Miller "A Queueuing Model for Road Traffic Flow" Ibid, 23, 1961

3．板倉・加来・堀江"待ち行列による登坂車線設置に関する研究"土木学会北海道支部研究発表会論文集，第26号，昭和44年度

4．森村英典他"待ち行列の理論と実際"日科技連