

傾斜法による鉄筋コンクリート断面の最適化

正員 藤井 卓*

1. ま え が き

構造物の設計とは、言うまでもなくその構造物の目的にたいして十分な機能を持つようなシステムを構成することであり、その構造システムは安全性・経済性およびその他の諸条件をみたした最適構造システムであることが望まれる。こうした条件をそなえた構造システムの構成を、Schmit は構造総合 (Structural Synthesis) と呼んでいる¹⁾。最近の電算機利用技術の発達にともなう、構造総合への関心が高まっているが自動最適設計は構造総合へのアプローチの一端をなすものであろう。

最適の基準は構造システムの目的とする機能によって異なり、この種の研究が主として航空宇宙工学の分野で発達したため、研究発展の初期においては重量が最適の基準としてとられ、土木の鋼構造の分野でも最小重量が最も興味ある課題であった^{2,3)}。鉄筋コンクリートの分野では、経済性または安全性の一方に最適の基準をおいた自動最適設計が試みられており、初期費用の経済性を基準とした例としては Hill⁴⁾など、また安全性(使用性)に基準をおいた例としては Cohn・Grierson⁵⁾などの研究がある。

一方、最適化の数学的手法としては古典的なラグランジュの未定乗数法を用いる方法、あるいはORの分野でよく知られる線型計画法・非線型計画法・動的計画法などがあり、こうした手法の構造物の最適設計への応用についての関心は、近年とくに高まっている^{6,7)}。コンクリート構造の分野でも多くの研究がなされているが、現在までにはまだ十分な成果はあがっていない^{4,5,8~15)}。

本文は非線型計画の一手法である傾斜法 (Gradient Method)^{16,17)}についてその概要を述べ、これを用いて鉄筋コンクリートはり断面の最小費用設計を試みたものである。自動最適設計への一つの足がかりを示唆するものである。

2. 傾 斜 法

(1) 手法の概要

最適設計を式で表現すると次のようになる。すなわ

ち、目的関数を

$$F(X) = F(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1)$$

とするとき

$$\phi_j(X) = \phi_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0 \quad (2)$$

$$j = 1, 2, \dots, m, m > n$$

で表わされる制限式を満足して、目的関数 F を最小にする設計変数 x_i を求めることである。一般に(1)式の目的関数 F は、設計変数 X の非線型関数となる。したがって最適設計の問題は一般には非線型計画の問題であり、(1)(2)式はこの問題を最も一般的な形で表現している。

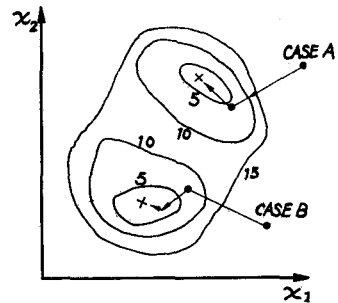


Fig.1 Gradient method used on a function having two relative minimum points (after Dickinson)

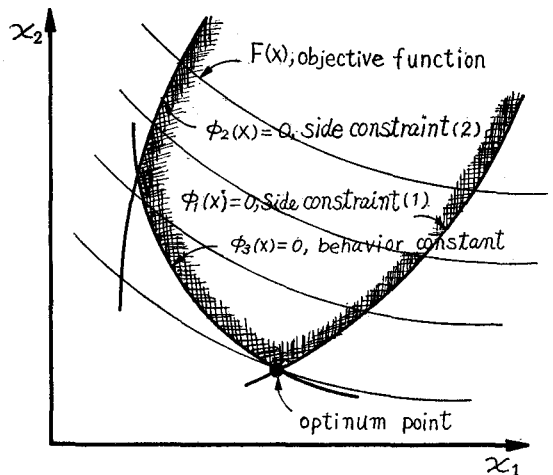


Fig.2 Typical permissible region for two design variables

* 北海道開発局土木試験所 コンクリート研究室 副室長

目的関数 F および設計変数 X は、一般には n 次元空間の座標として考えられる。しかし簡単のため今2個の設計変数のみを考えると、目的関数は設計変数 x_1, x_2 , 座標上の費用コンターとして表わされる(図-1)。すなわち目的関数は、地形図の山や谷にたとえることができる。もし出発点が山の上であれば、最急勾配の方向に降下すれば目的関数の減少する方向に進むことになり、最小の目的関数を与える設計変数 x_1, x_2 を求めることができる。一般の最適問題では図-2に示すように挙動制限条件および側方制限条件によって、設計にたいする許容領域が制約される。

(2) 最適化の手順

まず設計変数に初期値を与え、これが側方制限条件をこえていないかどうかを検査し、もしこえている場合は設計変数として側方制限の限界値を用いる。最も早く最適に収束するためには、費用コンターの法線方向で目的関数の減少する向きに進めばよいことがわかる。すなわち目的関数の負グラディエントの方向に次の設計変数 x_{i+1} を決めればよいことになる。

$$x_{i+1} = x_i + \delta \cdot V \quad (3)$$

ここに $\delta = 1$ 回の移動キザミ

V = 方向余弦

δ は任意の値として1キザミずつ進むが、早く収束させるためには次のような手法も用いられる。すなわち、もし制限条件をこえない場合は、 δ を2倍にし挙動制限条件をこえるまでこの過程をくり返す。この場合、側方制限条件は無視する。挙動制限条件をこえた場合は、 δ を1/2としてグラディエントを正にして、移動の向きを逆にし条件を満たすまで進む。次いで δ をさらに1/2にしてグラディエントを負にして進む。条件をこえた場合は再びもどる。この過程をくり返してついに挙動制限式の上に達する。ここで設計変数が側方制限条件を満たすかどうかを検査し、もしこの条件をこえる場合は設計変数を制限条件の下限值で置換して以上の過程をくり返す。

制限条件式の上に達した点をさらに最適点へ移動するには、許容領域の境界にそって目的関数の減少する方向へ進めばよいが、この場合境界が線型であればそのまま直進することによって最適点に達するが、境界が非線型の場合は傾斜投影法などを用いて最適点に達する工夫が必要である¹⁷⁾。また最適点の検定法としては、最小の目的関数が許容領域の境界に接することに着目して、目的関数および制限条件式の各々の法線が最適点で一致する性質を利用する手法もある¹⁸⁾。

いずれにしても傾斜法の基本的な考え方は、許容領域の境界面にそって目的関数の減少する方向に進み、設計変数の各々の組合わせについてより小さい目的関数を与

えるかどうかを調べることである。以上の手順は次の5つのステップに要約される。

- ①出発点を選定する。
- ②負グラディエントを決定する。
- ③制限条件を満たしかつ目的関数が減少するかぎり決められた方向へ移動し、さもなければ停止する。
- ④最適の区域に達したかどうかを検定し、もし達していなければ②③④をくり返す。
- ⑤もし他に最小の点があればそれを検定し、新しい点をえらび過程をくり返す。

3. RC断面設計への応用

(1) 応用手順の概要

長方形断面を有する鉄筋コンクリートはりについて考え、断面の高さ h 幅 b を設計変数とすると、この場合の最適問題は2次問題となる。したがって目的関数 F は次の一般式で表わされる。

$$F = f(b, h) \quad (4)$$

また挙動制限条件は、

$$M \leq M_r \quad (5)$$

ここに M = 設計モーメント

M_r = 抵抗モーメント

さらに側方制限条件として、高さ h と幅 b の比 (h/b) の上限値および下限値を次式のように設定する。

$$\left. \begin{aligned} (h/b) &\leq \alpha_{max} \\ (h/b) &\geq \alpha_{min} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ここに $\alpha_{max}, \alpha_{min}$ = 定数

この場合、鉄筋コンクリート長方形断面の最適設計は、制限式(5)(6)を満たして目的関数(4)式を最小にする設計変数 b および h を求める問題に帰着する。(4)(5)(6)式の関係を示すと図-3のようになり、問題の解は許容領域から最小の F を与える断面の高さ h と幅 b の一組をえらぶことである。

設計変数を連続型とすれば最適点は許容領域の境界に存在し、与えられた問題の解は図-3の(a)(b)(c)に示される最適点のいずれかとなる。 b および h は、ここではあるキザミで変化する離散型の変数と考えると、最適解は図-3に示めされる最適点に近い許容領域内に存在する。したがって最適解を求めるには、許容領域の境界に近い有限個の点について制限条件を満足するかどうか、またより小さい目的関数を与えるかどうかを検査すればよい。

費用コンターは図-4のように画かれるから、もし出発点を側方制限条件の上限および最適点の近くに選ぶことができれば、グラディエントに適当な大きさのキザミを与えてこれを目的関数の減少する方向に許容領域の境

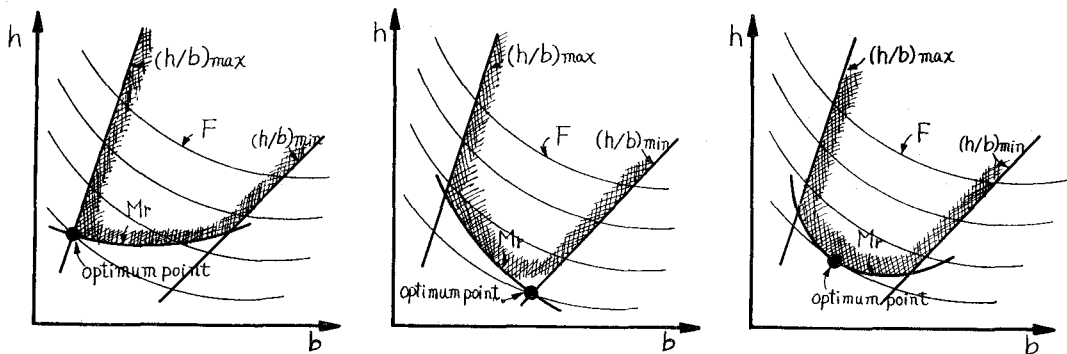


Fig.3 Typical location of optimum points

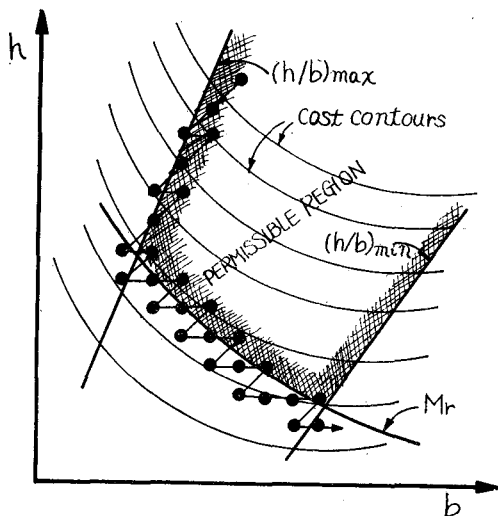


Fig.4 Cost contours and optimization path

界にそって移動すればよいことがわかる。この場合グラディエントとしては b および h を夫々 1 キザミだけ減少する方向とし、制限条件をこえた場合は b のみ 1 キザミ増加させて許容領域にもどせばよい⁽⁴⁾。

(2) 出発点の設定

出発点は側方制限条件の上限に最も近い点の一つでなければならぬし、またくり返し計算の時間を少なくするために、できるだけ最適解に近い点をえらぶ必要がある。一般の傾斜法では、2, 3 個所の異った出発点をえらび結果を検査する方法がとられるが、ここでは費用コンターに局地的な山や谷のないことがわかっているので最適の出発点を 1 個のみとする。

今、長方形断面において圧縮鉄筋を無視し、平衡応力設計を仮定すると抵抗モーメント M_0 は、

$$M_0 = b(h - b'')^2 / L \quad (7)$$

$$\text{ここに } L = 2 / (\sigma_c k j)$$

$$d'' = \text{引張鉄筋の重心からコンクリートの}$$

引張縁までの長さ

(6)(7)式から、

$$f(b) = (\alpha_{max})^2 b^3 - 2\alpha_{max} d'' b^2 + (d'')^2 b - LM_0 = 0 \quad (8)$$

となり、ニュートン・ラフソン法を用いて (8) 式の解を求める。すなわち

$$b_{i+1} = b_i - f(b_i) / f'(b_i) \quad (9)$$

$$\text{ただし } |b_{i+1} - b_i| < \varepsilon$$

ε は実用範囲で十分小さい値とすればよい。(9) 式によって求まる b を出発点の断面幅 b_0 とすると、高さ h_0 は次式のようになる。

$$h_0 = \alpha_{max} b_0 \quad (10)$$

(3) 最適化の手順

最適化の手順を示すと次のようである。

- ① 出発点の b_0, h_0 を求めた後、費用 F を計算する。
- ② b および h を 1 キザミ減少させ、 F の減少する方向へ進む。
- ③ $h/b \leq \alpha_{max}$ を検査し、OK なら NG になるまで b および h をさらに減少させる。NG なら b のみ増加させる。
- ④ $M < M_r$ を検査し OK なら b および h を 1 キザミ減少させ NG なら b のみ増加させる。
- ⑤ b, h の各々の組合わせについて F を計算し、より小さい値を与える b, h のみを求める。
- ⑥ $h/b > \alpha_{min}$ を検査し NG なら計算を終了する。

以上の手順を複張筋長方形断面に適用し、その収束状態の 1 例を示すと図—5 のようである。この例では $M = 10 \text{ t} \cdot \text{m}$, $\sigma_{ca} = 70 \text{ kg/cm}^2$, $\sigma_{sa} = 1400 \text{ kg/cm}^2$, $\alpha_{max} = 2.5$, $\alpha_{min} = 1.5$ また費用係数としては $C_s = 58.9$, $C_c = 0.85$, $C_j = 5.00$ を用いた。

出発点 O における設計変数は $h_0 = 62 \text{ cm}$, $b_0 = 25 \text{ cm}$ であり、次に b, h を 1 キザミ (この例では 2 cm) だけ減少する方向へ移動するから、点 1 では $h_1 = 59 \text{ cm}$, $b_1 = 23 \text{ cm}$ と

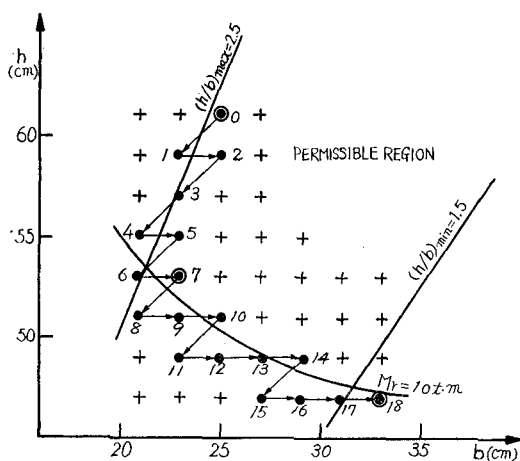


Fig. 5 Example of optimization path

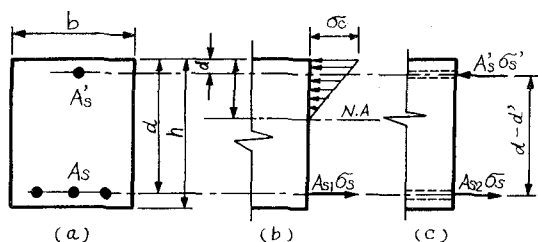


Fig. 6 Doubly reinforced rectangular section

なるが、側方制限条件の上限（この例では $\alpha_{max}=2.5$ ）を満たさないで b のみ増加させ点2に達する。点2では全ての制限条件を満たすので再び b と h を1キザミ減少させ前進する。点3は点2と同様なので、さらに前進して点4に達する。以下同様にして点8まで達すると、点8は挙動制限条件（この例では $M=10t.m < Mr$ ）を満たさないで、これを満足するまで b のみ1キザミずつ進めて点10に達する。以下同様にして点18に達したとき、すなわち側方制限条件の下限（この例では $\alpha_{min}=1.5$ ）をこえたとき過程は終了となり、全ての制限条件をみたす点すなわち許容領域にある点のうちの最小費用を与える点が最適解となる。図一5の例では点7が最適点となる。この手法では図一5に示したように出発点は最適点の近くに求まり、また収束もきわめて早いことがわかる。FACOM 230/10によって計算したこの例の所要時間は約6分であった。

4. 最適化の数値計算

(1) 計算式および計算手順

図一6(a)に示す複鉄筋長方形断面において、 b , d , σ_{ca} , σ_{sa} が与えられているとき、抵抗モーメントを M_r とし、これを図一6(b)および(c)のように分けて考える。この場合 M_1 は次式で表わされる。

$$M_1 = 0.5 \sigma_{ca} k j b d^2 \quad (11)$$

したがって抵抗モーメント M_1 にたいして所要の鉄筋量は、

$$A_{s1} = M_1 / (\sigma_{sa} j d) \quad (12)$$

$$\text{あるいは } A_{s1} = p_e b d \quad (13)$$

ここに $p_e = k / (2m)$

また圧縮鉄筋を次のように仮定する。

$$A_{s2} = 0.25 A_{s1} = A'_s \quad (14)$$

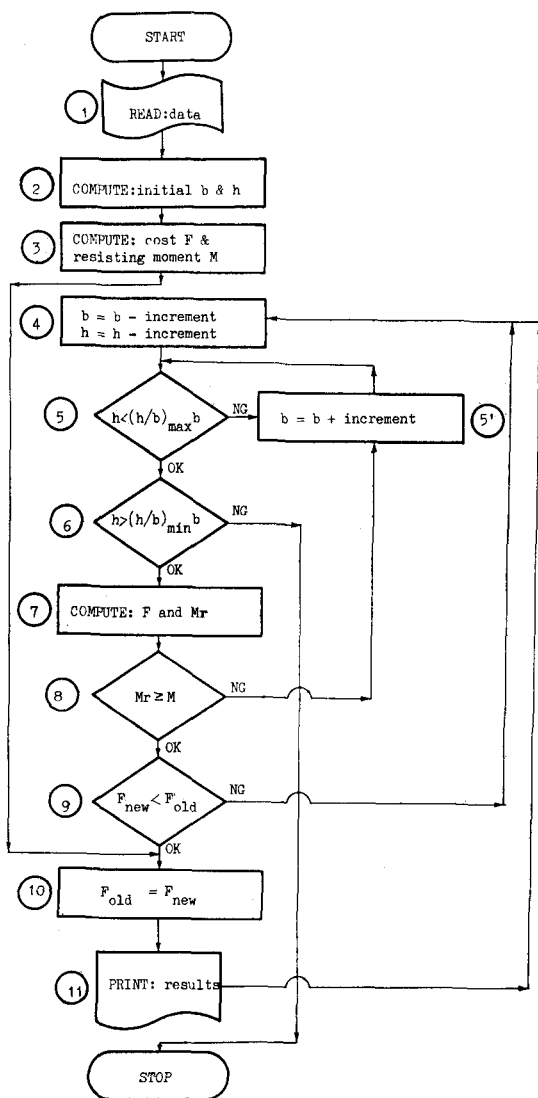


Fig. 7 Flow chart for optimization procedure

一方図-6(e)の M_2 は次式で表わされる。

$$M_2 = A_s \sigma_{sa} \quad (15)$$

$$\text{または } M_2 = A'_s \sigma'_s (d - d') \quad (16)$$

$$\text{ここに } \sigma'_s = 2\sigma_{sa}(k - d'/d)/(1 - k) \leq \sigma_{su}^{(19)}$$

したがって断面の抵抗モーメントは、

$$M_r = 0.5\sigma_{ca} k j b d^2 + M_{im} \text{ of } \{A_s \sigma_{sa}, A'_s \sigma'_s (d - d')\} \quad (17)$$

なお単鉄筋長方形断面の場合は、 $A'_s = 0$ とおけばよいのはもちろんである。また図-6からわかるように中立軸の位置は(h)の状態を仮定しているの、実際の中立軸から幾分ずれる。このため応力度は許容値を5%程度超過する場合もある。

一方、部材の単位長さ当りの費用は次式で表わされる。

$$F = (A_s + A'_s)C_s + b h C_c + (b + 2h)C_f \text{ 円/m} \quad (18)$$

ここに C_s =鉄筋の費用係数(円/cm²・m)

C_c =コンクリートの費用係数(円/cm²・m)

C_f =型枠の費用係数(円/cm・m)

A_s, A'_s (cm²), b, h (cm)

計算手順をフローチャートで示すと図-7のとおりである。すなわち

①データ ($\sigma_{ca}, \sigma_{sa}, C_s, C_c, C_f$, グラディエントのキザミ, $\alpha_{max}, \alpha_{min}, M$, etc.) を読み込む。

②ニュートン・ラフソン法を用いて b_0, h_0 を求め出発点を設定する。

③ b_0, h_0 にたいして目的関数 F および抵抗モーメント M_r を計算し初期値とする。

④ b, h を1キザミ減少する方向へ進める。

⑤側方制限条件の上限 α_{max} をこえたかどうかを調べ、OKなら⑥へ進みNGなら b を増加する方向へ1キザミ進めて再び⑤の判定をする。

⑥側方制限条件の下限 α_{min} をこえたかどうかを調べ、OKなら⑦へ進みNGなら計算は終了する。

⑦目的関数 F および抵抗モーメント M_r を計算する。

⑧設計モーメント M と抵抗モーメント M_r を比較し、抵抗モーメントが大きければ⑨へ進み、小さければ b を増加する方向へ1キザミ進めて⑤から再び計算する。

⑨前に求めた目的関数 F の値と比較し、新しい方が小さければ⑩へ進み、さもなければ④へもどって b および h を夫々1キザミ減少させて進める。

⑩⑪新しい目的関数の値を古い方へ代入してから、必要な事項をプリントアウトして過程をくり返す。

(2) 数値計算

材料の許容応力度として $\sigma_{ca}=70, 80, 90\text{kg/cm}^2, \sigma_{sa}=$

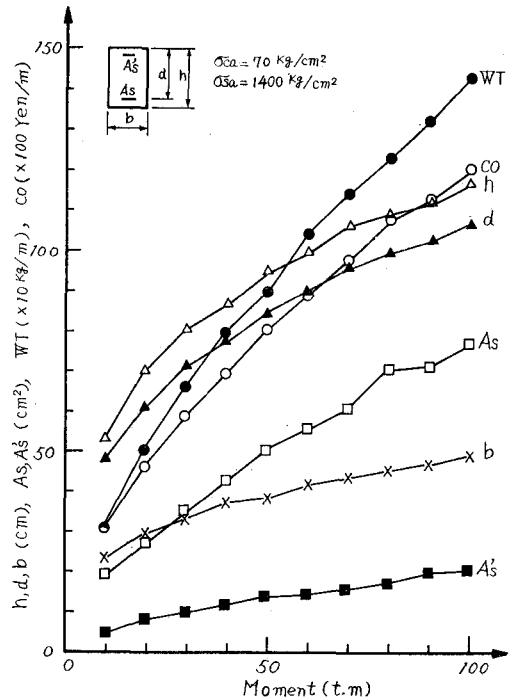


Fig.8 Optimum sectional properties for various design moments (1)

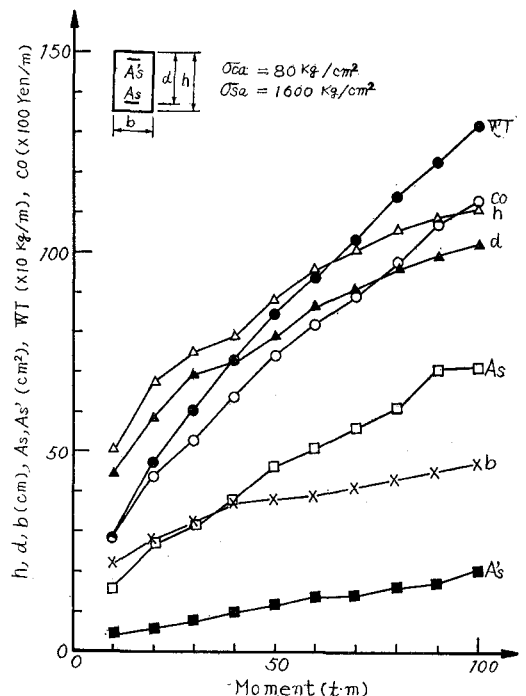


Fig.9 Optimum sectional properties for various design moments (2)

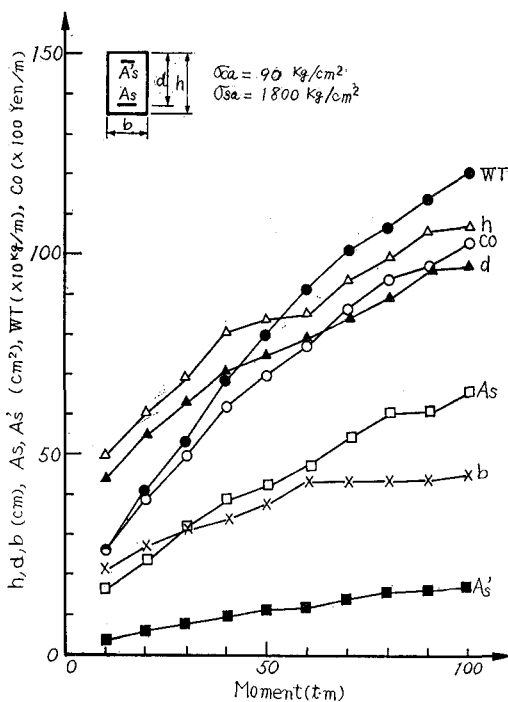


Fig.10 Optimum sectional properties for various design moments (3)

1400, 1600, 1800kg/cm², 費用係数として $C_s=58.9$, $C_c=0.85$, $C_f=5.00$, 側方制限条件の上限值 $\alpha_{max}=2.5$, また下限値 $\alpha_{min}=1.5$ とし, グラディエントのキザミを2cmにとって設計モーメントを $10t \cdot m$ から $10t \cdot m$ キザミに $100t \cdot m$ までの各々にたいして最適断面を求め, この結果を図-8, 9, 10に示す。

5. む す び

本文では傾斜法による最適化の手法を, 曲げをうける長方形断面の最適設計へ応用する手法を述べ, この手法による数値計算例を示した。

ここに述べた手法は, 一般的な傾斜法を簡略化したのでプログラムも簡単となり, また初期値を最適点のきわめて近くに設定できるので収束も早く, したがって計算費用も少ないなどの利点がある。数値計算例としては, 側方制限の上限を2.5下限を1.5としてはり断面のみを扱っているが, これらの値を適当に変えることによってスラブへも適用できる。またT形断面にたいしては, フランジ幅および厚さをはり高さおよび(または)ウェブ幅の関数として表わすか, あるいは具体的な数値を与えることによってここに述べた手法を適用できる。

構造設計における最適問題の研究は, 今後ますます盛んになると予想されるが, 終局としては最適の基準を初

期費用・維持費用などの経済性および使用性・破壊などの安全性の両方にとり²⁰⁾, しかも構造システム全体を確率論的立場²¹⁾から扱う自動最適設計が研究の対象となるだろう。コンクリート構造の分野でも, この種の研究を進展させることが望まれる。

本研究の遂行を援助して下さいた北海道開発局土木試験所ならびに本文のとりまとめにあたって種々有益な助言をいただいた C.Berwanger 教授 (Univ. of Ottawa, Ottawa, Ontario, Canada) に深甚なる謝意を表します。また製図にあたっては上島技官の労をわずらわせたことを記して感謝します。

参 考 文 献

- 1) 田中 尚, "構造物の最適設計における最近の進歩", 生産研究, vol. 22, No. 1, 1970, 1., pp 15-19.
- 2) Heyman, J., "Plastic Design of Beams and Plane Frames for Minimum Material Consumption", *Quarterly of Applied Mathematics*, vol. 8, 1951, pp 378-381.
- 3) Foulkes, J., "Minimum Weight Design of Structural Frames", *Proceedings of Royal Society of London*, Series A, vol. 223, 1954, pp 482-494.
- 4) Hill, L. A. Jr., "Automated Optimum Cost Building Design", *J. Structural Division*, ASCE, vol. 92, No. ST6, December, 1966, pp 247-263.
- 5) Cohn, M. Z. and Grierson, D. E., "Optimal Design of Reinforced Concrete Beams and Frames", *Final Report, 8th Congress of IABSE*, September 1968, New York, pp 215-226.
- 6) Wasiutynski, Z. and Brandt, A., "The Present State of Knowledge in the Field of Optimum Design of Structures", *Applied Mechanics Reviews*, vol. 16, No. 5, May, 1963, pp. 341-350.
- 7) Sheu, C. Y. and Prager, W., "Recent Developments in Optimal Structural Design", *Applied Mechanics Reviews*, vol. 21, No. 10, October 1968, pp 985-992.
- 8) Sawyer, H. A., "Economy and Concrete Beams", *J.ACI*, vol. 23, No. 9, May, 1952, pp 773-784.
- 9) Rozvany, G. I. N. and Hampson, A. J. K., "Optimum Design of Prestressed Plates", *J.ACI*, vol. 60, No. 8, August 1963, pp 1065-1082.

- 10) Traum, E., "Economical Design of Reinforced Concrete Slabs Using Ultimate Strength Theory", *J.ACI*, vol. 50, No. 6, June 1963, pp 763-774.
- 11) Brotchie, J. F., "Direct Design of Framed Structures", *J. Structural Division*, ASCE, vol. 90, No. ST6, December 1964, pp 243-257.
- 12) Anderheggen, E. and Thürlimann, B., "Optimum Design Using Linear Programming", *Publication of IABSE*, vol. 26, 1966, pp 555-571.
- 13) Fujii, T., "Application of Minimum Weight Design Technique to Reinforced Concrete", thesis Presented to Univ. of Ottawa, Ottawa, Ontario, Canada, in 1969, in Partial fulfilment for M.A.Sc.
- 14) 丸安, 中村, 村井, 若林, "土木設計における最適化", 東京大学生産技術研究所報告, vol. 19, No. 4, September 1969, pp 193-225.
- 15) Berwanger, C. and Fujii, T., "Computer Optimization in Structural Concrete Design", Presented at the ACI Symposium on Impact of Computers on the Practice of Structural Engineering in Concrete, November, 1970, St. Louise, Mo.
- 16) Dickinson, J. R., "A Computer Program for System Optimization", *Transactions of Engineering Institute of Canada*, vol. 2, No. 4, December 1958, pp 157-161.
- 17) Brown, D. M. and Ang, A. H.-S., "Structural Optimization by Nonlinear Programming", *J. Structural Division*, ASCE, vol. 92, No. ST6, December, 1966, pp 319-340.
- 18) Gellatly, R. A. and Gallagher, R.H., "A Procedure for Automated Minimum Weight Structural Design", *The Aeronautical Quarterly*, London, vol. 17, August, 1966, pp 216-230.
- 19) "Building Code Requirements for Reinforced Concrete", ACI Standard 318-63, American Concrete Institute, Detroit, Mich., 1963.
- 20) Courbon, J., "Optimization of Structures", *Preliminary Publication, 8th Congress of IABSE*, September 1968, New York, pp 93-99.
- 21) Freudenthal, A. M., "Critical Appraisal of Safety Criteria and Their Basic Concepts", *Preliminary Publication, 8th Congress of IABSE*, September 1968, New York, pp 13-24.