

鉄筋とコンクリートの付着応力分布 に関する三次元応力的研究

正員 松岡健一*

1. まえがき

鉄筋コンクリート理論は、鉄筋とコンクリートが一体となって作用するとの仮定から成立っている。すなわち、鉄筋とコンクリートの付着が十分でなければならないが、そのためには、鉄筋とコンクリートの付着強度を知る必要がある。

一方、鉄筋とコンクリートの付着強度試験方法としては、引拔法、両引法、梁の曲げによる方法等があり、これらにもついた付着強度の実験研究に関する論文は数多く発表されている¹⁾。しかし、これらの試験法における鉄筋とコンクリートとの付着面の付着応力の分布を理論的に解析した研究としては、わずかに K.R.Peattie 等の研究²⁾、S.T.A. Ödman の研究やその他^{2, 3}の研究があるにすぎない。また、これらの研究も多くは近似解析であり、3次元解析はもちろん、2次元解析としても、はなはだ不十分なものと思われる。付着強度を理論的に算定するためには、これを3次元応力問題として解析することが必要であろう。

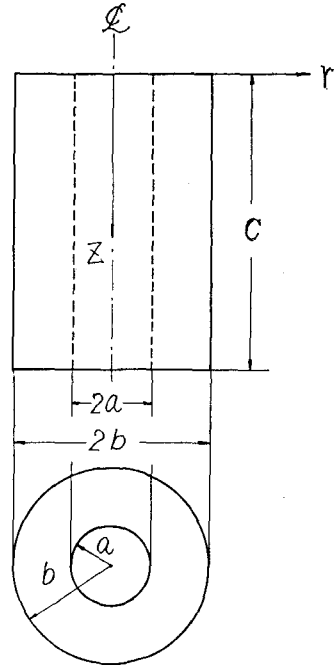
本研究は、この問題の理論解析の基礎的なものとして、コンクリート円柱内部に同心円状に鉄筋を埋め込んだ場合の、鉄筋とコンクリートとの付着応力の分布を、軸対称3次元弾性問題として解析を試みたものである。最後に数値解析例として、両引法について、コンクリートの径、長さ、弾性係数、ポアソン比を変化させた場合の付着応力分布を示す。

2. 軸対称弾性問題の基本解

軸対称3次元弾性問題については、Fourier-Hankel変換による基本解が、本学の能町教授によりすでに発表されている³⁾。ここではこの解法に従って解析を進める。今、この解法の概要を述べる。

軸対称問題の力のつり合式は、物体力を無視すると、

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} = 0 \quad (1)$$



図—1

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

また、 u 、 w を r 、 z 方向の変位とすると、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= 2\mu \frac{\partial u}{\partial r} + \lambda e, \quad \sigma_\theta = 2\mu \frac{u}{r} + \lambda e \\ \sigma_z &= 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda e, \quad e = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\tau_{rz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \quad (4)$$

ここで、(1)、(2)式に、それぞれ、 $rH_1(\xi ir) \cos Nz$ 、 $rH_0(\xi ir) \sin Nz$ を乗じ、 r と z で積分を行ない、さらに、(3)、(4)式の関係を代入して、積分を続け、得られる2つの式から、変位 u 、 w の Fourier-Hankel 変換した値を求め、これを逆変換することにより、最終的に次の結果がえられる。

* 室蘭工業大学 工学部 助教授 土木工学科

$$\begin{aligned}
u = & \frac{ba}{b^2-a^2} \left\{ \left(\frac{r}{a} - \frac{a}{r} \right) A_0 - \left(\frac{r}{b} - \frac{b}{r} \right) A_0' \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos Nz \left\{ \left\{ G^{(1)}(Nr) + \frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda} F^{(1)}(Nr) \right\} A_n \right. \\
& + \left\{ G^{(2)}(Nr) + \frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda} F^{(2)}(Nr) \right\} A'n + \frac{\mu+\lambda}{2\mu(2\mu+\lambda)} \left\{ F^{(1)}(Nr) B_n + F^{(2)}(Nr) B'n \right\} \\
& + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{H_1(\xi ir)}{\theta_i^2} \left\{ \left\{ \frac{\lambda}{2\mu+\lambda} \Phi^{(1)}(\xi z) - \frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda} \left(\Phi^{(1)}(\xi iz) - \Psi^{(1)}(\xi iz) \right) \right\} D_i + \left\{ \frac{\lambda}{2\mu+\lambda} \Phi^{(2)}(\xi iz) \right. \right. \\
& - \frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda} \left(\Phi^{(2)}(\xi iz) - \Psi^{(2)}(\xi iz) \right) \left. \right\} D_i - \left\{ \frac{1}{2\mu+\lambda} \Phi^{(1)}(\xi iz) + \frac{\mu+\lambda}{2\mu(2\mu+\lambda)} \left(\Phi^{(1)}(\xi iz) - \Psi^{(1)}(\xi iz) \right) \right\} E_i \\
& \left. - \left\{ \frac{1}{2\mu+\lambda} \Phi^{(2)}(\xi iz) + \frac{\mu+\lambda}{2\mu(2\mu+\lambda)} \left(\Phi^{(2)}(\xi iz) - \Psi^{(2)}(\xi iz) \right) \right\} E_i' \right\} \quad (5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w = & \frac{1}{2} D_0 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2z}{C} \right) D_0' + \sum_{n=1}^{\infty} \sin Nz \left\{ \left\{ \frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda} \left(\chi^{(1)}(Nr) - \omega^{(1)}(Nr) - \frac{\lambda}{2\mu+\lambda} \chi^{(1)}(Nr) \right) \right\} A'n \right. \\
& + \left\{ \frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda} \left(\chi^{(2)}(Nr) - \omega^{(2)}(Nr) \right) - \frac{\lambda}{2\mu+\lambda} \chi^{(2)}(Nr) \right\} A'n + \left\{ \frac{1}{2\mu+\lambda} \chi^{(1)}(Nr) + \frac{\mu+\lambda}{2\mu(2\mu+\lambda)} \left(\chi^{(1)}(Nr) \right. \right. \\
& - \omega^{(1)}(Nr) \left. \right\} B_n + \left\{ \frac{1}{2\mu+\lambda} \chi^{(2)}(Nr) + \frac{\mu+\lambda}{2\mu(2\mu+\lambda)} \left(\chi^{(2)}(Nr) - \omega^{(2)}(Nr) \right) \right\} B'n \left. \right\} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{H_0(\xi ir)}{\theta_i^2} \left\{ \left\{ Q^{(1)}(\xi iz) \right. \right. \\
& + \frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda} P^{(1)}(\xi iz) \left. \right\} D_i + \left\{ Q^{(2)}(\xi iz) + \frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda} P^{(2)}(\xi iz) \right\} D_i' + \frac{\mu+\lambda}{2\mu(2\mu+\lambda)} \left\{ P^{(1)}(\xi iz) E_i \right. \\
& \left. + P^{(2)}(\xi iz) E_i' \right\} \left. \right\} \quad (6)
\end{aligned}$$

ここで、

$$H_1(\xi ir) = J_1(\xi ir) Y_1(\xi a) - J_1(\xi ia) Y_1(\xi ir)$$

$$H_0(\xi ir) = J_0(\xi ir) Y_1(\xi a) - J_1(\xi ia) Y_0(\xi ir)$$

$$\theta_i^2 = H_0^2(\xi ia) - \frac{a^2}{b^2} H_0^2(\xi ib)$$

ただし、 $J_1(\xi ir)$ 、 $Y_1(\xi ir)$ 等は、第1種および第2種の Bessel 関数であり ξib は $H_1(\xi ib) = 0$ の根、 $N = n\pi/c$ 、 a : 円柱の内径、 b : 円柱の外径、 c : 長さ、である。

また、(5)、(6)式中

$$G^{(1)}(Nr) = -\frac{2}{b} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i}{N^2 + \xi_i^2} H_0(\xi ib) \frac{H_1(\xi ir)}{\theta_i^2} = \frac{R_{11}^{(1)}(Nr)}{R_{11}^{(1)}(Nb)},$$

$$G^{(2)}(Nr) = \frac{2a}{b^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i}{N^2 + \xi_i^2} H_0(\xi ia) \frac{H_1(\xi ir)}{\theta_i^2} = \frac{R_{11}^{(2)}(Nr)}{R_{11}^{(2)}(Na)},$$

$$\chi^{(1)}(Nr) = \frac{2b}{(b^2-a^2)N} + \frac{2}{b} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{N}{N^2 + \xi_i^2} H_0(\xi ib) \frac{H_0(\xi ir)}{\theta_i^2} = \frac{R_{01}^{(1)}(Nr)}{R_{11}^{(1)}(Nb)},$$

$$\chi^{(2)}(Nr) = \frac{2a}{(a^2-b^2)N} - \frac{2a}{b^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{N}{N^2 + \xi_i^2} H_0(\xi ia) \frac{H_0(\xi ir)}{\theta_i^2} = \frac{R_{01}^{(2)}(Nr)}{R_{11}^{(2)}(Na)},$$

$$\begin{aligned}
F^{(1)}(Nr) = & -\frac{4}{b} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{N^2 \xi_i}{(N^2 + \xi_i^2)^2} H_0(\xi ib) \frac{H_1(\xi ir)}{\theta_i^2} = \frac{1}{\{R_{11}^{(1)}(Nb)\}^2} \left[R_{11}^{(1)}(Nb) \times \{Nr R^{(1)}(Nr) \right. \\
& \left. - Na R_{10}^{(1)}(Nr) \right] - R_{11}^{(1)}(Nr) \{Nb R_{01}^{(1)}(Nb) - Na R_{10}^{(1)}(Nb)\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F^{(2)}(Nr) = & \frac{4a}{b^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{N^2 \xi_i}{(N^2 + \xi_i^2)^2} H_0(\xi ia) \frac{H_1(\xi ir)}{\theta_i^2} = -\frac{1}{\{R_{11}^{(2)}(Na)\}^2} \left[R_{11}^{(2)}(Na) \times \{Nr R_{01}^{(2)}(Nr) \right. \\
& \left. - Nb R_{10}^{(2)}(Nr) \right] - R_{11}^{(2)}(Nr) \{Na R_{01}^{(2)}(Na) - Nb R_{10}^{(2)}(Na)\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\chi^{(1)}(Nr) - \omega^{(1)}(Nr) = & \frac{4}{b} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{N \xi_i^2}{(N^2 + \xi_i^2)^2} H_0(\xi ib) \frac{H_0(\xi ir)}{\theta_i^2} = 2\chi^{(1)}(Nr) \\
& - \frac{1}{\{R_{11}^{(1)}(Nb)\}^2} \left[R_{01}^{(1)}(Nr) \{Nb R_{01}^{(1)}(Nb) - Na R_{10}^{(1)}(Nb)\} - R_{11}^{(1)}(Nb) \{Nr R_{11}^{(1)}(Nr) \right. \\
& \left. - Na R_{00}^{(1)}(Nr) \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\chi^{(2)}(Nr) - \omega^{(2)}(Nr) &= -\frac{4a}{b^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{N\xi_i^2}{(N^2 + \xi_i^2)^2} H_0(\xi_i a) \frac{H_0(\xi_i r)}{\theta_i^2} = 2\chi^{(2)}(Nr) - \frac{1}{\{R_{11}^{(2)}(Na)\}^2} \\
&\quad \times \left[R_{01}^{(2)}(Nr) \left\{ NaR_{01}^{(2)}(Na) - NbR_{10}^{(2)}(Na) \right\} - R_{11}^{(2)}(Na) \left\{ NrR_{11}^{(2)}(Nr) - NbR_{00}^{(2)}(Nr) \right\} \right], \\
\frac{\phi^{(1)}(\xi_i z)}{\phi^{(2)}(\xi_i z) - \frac{2}{\xi_i c}} &= \frac{2}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{1 + (-1)^n} \frac{\xi_i}{N^2 + \xi_i^2} \cos Nz = \frac{\sinh \xi_i(c-z) \pm \sinh \xi_i z}{\cosh \xi_i c \pm 1}, \\
\frac{\phi^{(1)}(\xi_i z) - \psi^{(1)}(\xi_i z)}{\phi^{(2)}(\xi_i z) - \psi^{(2)}(\xi_i z)} &= \frac{4}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{1 + (-1)^n} \frac{N^2 \xi_i^2}{(N^2 + \xi_i^2)^2} \cos Nz = \frac{\phi^{(1)}(\xi_i z)}{\phi^{(2)}(\xi_i z)} \\
&\quad - \frac{\xi_i z \cosh \xi_i(c-z) \mp \xi_i(c-z) \cosh \xi_i z}{\cosh \xi_i c \pm 1}, \\
\frac{Q^{(1)}(\xi_i z)}{Q^{(2)}(\xi_i z)} &= \frac{2}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{1 + (-1)^n} \frac{N}{N^2 + \xi_i^2} \sin Nz = \frac{\cosh \xi_i(c-z) \pm \cosh \xi_i z}{\cosh \xi_i c \pm 1}, \\
\frac{P^{(1)}(\xi_i z)}{P^{(2)}(\xi_i z)} &= \frac{4}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{1 + (-1)^n} \frac{N \xi_i^2}{(N^2 + \xi_i^2)^2} \sin Nz = \frac{\xi_i z \sin \xi_i(c-z) \pm \xi_i(c-z) \sinh \xi_i z}{\cosh \xi_i c \pm 1}, \\
R_{ij}^{(1)}(Nr) &= I_i(Nr) K_j(Na) - (-1)^{i+j} I_j(Na) K_i(Nr) \\
R_{ij}^{(2)}(Nr) &= I_i(Nr) K_j(Nb) - (-1)^{i+j} I_j(Nb) K_i(Nr)
\end{aligned}$$

ただし、 $I_i(Nr)$, $K_j(Nr)$ は、第1種および第2種の変形 Bessel 関数であり $i = 0, 1$; $j = 0, 1$ である。
(5), (6)式は、 $a \leq r \leq b$ に対する一般解であるが、 $r \geq a$ に対する解は、(5), (6)式において、 $a = 0$, $b = a$ とし、 $H_1(\xi_i r)$, $H_0(\xi_i r)$ の代りに、 $J_1(\xi_i r)$, $J_0(\xi_i r)$ を代入することにより得られる。ただし、 $\epsilon_{ii} = J_1(\epsilon_i a) = 0$ の根である。従って、

$$\begin{aligned}
u &= \frac{r}{a} A_0^* + \sum_{n=1}^{\infty} \cos Nz \left\{ \left[G(Nr) + \frac{\mu' + \lambda'}{2\mu' + \lambda'} F(Nr) \right] A_n^* + \frac{\mu' + \lambda'}{2\mu'(2\mu' + \lambda')} \times F(Nr) B_n^* \right\} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(\eta_i r)}{\{J_0(\eta_i a)\}^2} \left\{ \left[\frac{\lambda'}{2\mu' + \lambda'} \phi^{(1)}(\eta_i z) - \frac{\mu' + \lambda'}{2\mu' + \lambda'} \left(\phi^{(1)}(\eta_i z) - \psi^{(1)}(\eta_i z) \right) \right] D_i^* + \left[\frac{\lambda'}{2\mu' + \lambda'} \phi^{(2)}(\eta_i z) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{\mu' + \lambda'}{2\mu' + \lambda'} \left(\phi^{(2)}(\eta_i z) - \psi^{(2)}(\eta_i z) \right) \right] D_i^{*'} - \frac{1}{2\mu' + \lambda'} \phi^{(1)}(\eta_i z) + \frac{\mu' + \lambda'}{2\mu'(2\mu' + \lambda')} \left(\phi^{(1)}(\eta_i z) - \psi^{(1)}(\eta_i z) \right) \right] E_i^* \\
&\quad \left. - \left[\frac{1}{2\mu' + \lambda'} \phi^{(2)}(\eta_i z) + \frac{\mu' + \lambda'}{2\mu'(2\mu' + \lambda')} \left(\phi^{(2)}(\eta_i z) - \psi^{(2)}(\eta_i z) \right) \right] E_i^{*'} \right\} \quad (7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w &= \frac{1}{2} D_0^* + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2z}{c} \right) D_0^{*'} + \sum_{n=1}^{\infty} \sin Nz \left\{ \left[\frac{\mu' + \lambda'}{2\mu' + \lambda'} \left(\chi(Nr) - \omega(Nr) \right) - \frac{\lambda'}{2\mu' + \lambda'} \chi(Nr) \right] A_n^* \right. \\
&\quad \left. + \left[\frac{1}{2\mu' + \lambda'} \chi(Nr) + \frac{\mu' + \lambda'}{2\mu'(2\mu' + \lambda')} \left(\chi(Nr) - \omega(Nr) \right) \right] B_n^* \right\} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\eta_i r)}{\{J_0(\eta_i a)\}^2} \left\{ \left[Q^{(1)}(\eta_i z) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\mu' + \lambda'}{2\mu' + \lambda'} P^{(1)}(\eta_i z) \right] D_i^* + \left[Q^{(2)}(\eta_i z) + \frac{\mu' + \lambda'}{2\mu' + \lambda'} P^{(2)}(\eta_i z) \right] D_i^{*'} + \frac{\mu' + \lambda'}{2\mu'(2\mu' + \lambda')} \left[P^{(1)}(\eta_i z) E_i^* \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + P^{(2)}(\eta_i z) E_i^{*'} \right] \right\} \quad (8)
\end{aligned}$$

上式中

$$\begin{aligned}
G(Nr) &= -\frac{2}{a} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\eta_i}{(N^2 + \eta_i^2)} \frac{J_1(\eta_i r)}{J_0(\eta_i a)} = \frac{I_1(Nr)}{I_1(Na)}, \\
\chi(Nr) &= \frac{2}{aN} + \frac{2}{a} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{N}{N^2 + \eta_i^2} \frac{J_0(\eta_i r)}{J_0(\eta_i a)} = \frac{I_0(Nr)}{I_1(Na)}, \\
F(Nr) &= -\frac{4}{a} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{N^2 \eta_i}{(N^2 + \eta_i^2)^2} \frac{J_1(\eta_i r)}{J_0(\eta_i a)} = \frac{NaI_1(Nr)I_0(Na)}{\{I_1(Na)\}^2} - \frac{NrI_0(Nr)}{I_1(Na)}, \\
\chi(Nr) - \omega(Nr) &= \frac{4}{a} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{N\eta_i^2}{(N^2 + \eta_i^2)^2} \frac{J_0(\eta_i r)}{J_0(\eta_i a)} = 2\chi(Nr) + \frac{NrI_1(Nr)}{I_1(Na)} - \frac{NaI_0(Na)I_0(Nr)}{\{I_1(Na)\}^2},
\end{aligned}$$

(5)~(8)式に含まれる A_n , A_n' , A_n^* 等は定数で、円柱の境界条件を満足するように定める。また、 μ , λ , μ' , λ' はそれぞれの部分の弾性定数である。これらの式を(3), (4)式に代入して、各応力成分を求めることができる。

3. 付着応力の解析

ここで、図-2の同心円柱を考え、外力は $z=0$ または $z=c$ の面に直応力のみが作用するものとする、このときの境界条件は、

$$r=b: \quad \sigma_{r1})_{r=b}=0 \quad (9)$$

$$\tau_{rz1})_{r=b}=0, \quad B_n=0 \quad (10)$$

$$r=a: \quad \sigma_{r1})_{r=a}=\sigma_{r2})_{r=a} \quad (11)$$

$$w_1)_{r=a}=w_2)_{r=a} \quad (12)$$

$$u_1)_{r=a}=u_2)_{r=a}, \quad A'_n=A_n \quad (13)$$

$$\tau_{rz1})_{r=a}=\tau_{rz2})_{r=a}, \quad B'_n=B_n \quad (14)$$

$$z=0: \quad \sigma_{z1})_{z=0}=p_1(r) \quad (15)$$

$$\sigma_{z2})_{z=0}=p_2(r) \quad (16)$$

$$\tau_{rz1})_{z=0}=\tau_{rz2})_{z=0}=0 \quad (17)$$

$$z=c: \quad \sigma_{z1})_{z=c}=p'_1(r) \quad (18)$$

$$\sigma_{z2})_{z=c}=p'_2(r) \quad (19)$$

$$\tau_{rz1})_{z=c}=\tau_{rz2})_{z=c}=0 \quad (20)$$

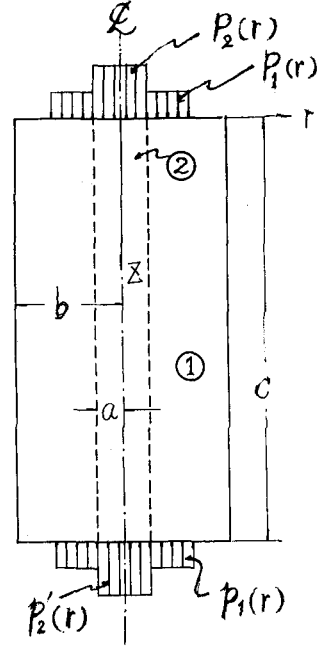


図-2

さらに、(17)、(20)式より、 $E_i=E'_i=E''_i=E'''_i=0$ 。また、外力が対称の場合 $D_i=D'_i=0$ 、逆対称の場合 $D_i'=D''_i=0$ となる。

従って、(5)~(8)式に含まれる束知量は、 A_n, B'_n, A'_n, D_i (または D'_i)、 D''_i (または D'''_i) となり、これらは(9)、(11)、(12)、(15)、(16)の条件より決定しなければならない。すなわち、外力が対称の場合の境界条件式は、

$$\begin{aligned} \sigma_{r1})_{r=b} &= 2\mu' \frac{ab}{b^2-a^2} \left\{ \left(\frac{1}{a} + \frac{a}{b^2} \right) A_0 - \frac{2}{b} A_0' \right\} + \lambda_1 \frac{2ab}{b^2-a^2} \left\{ \frac{1}{a} A_0 - \frac{1}{b} A_0' \right\} - \frac{\lambda_1}{c} D_0' \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} N w N z \left[\frac{2\mu_1(\mu_1+\lambda_1)}{2\mu_1+\lambda_1} \left\{ \chi^{(1)}(Nb) + \omega^{(1)}(Nb) - \frac{2\mu_1+\lambda_1}{\mu_1+\lambda_1} \frac{1}{Nb} \right\} A_n + \frac{2\mu_1(\mu_1+\lambda_1)}{2\mu_1+\lambda_1} \left\{ \chi^{(2)}(Nb) \right. \right. \\ &+ \left. \left. \omega^{(2)}(Nb) \right\} A'_n + \frac{\mu_1+\lambda_1}{2\mu_1+\lambda_1} \left\{ \chi^{(2)}(Nb) + \omega^{(2)}(Nb) - \frac{2\mu_1+\lambda_1}{\mu_1+\lambda_1} \chi^{(2)}(Nb) \right\} B'_n \right] \\ &- \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i H_0(\xi_i b)}{\theta_i^2} \frac{2\mu_1(\mu_1+\lambda_1)}{2\mu_1+\lambda_1} \left\{ \phi^{(2)}(\xi_i z) - \Psi^{(2)}(\xi_i z) \right\} D_i' = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{r1})_{r=a} - \sigma_{r2})_{r=a} &= 2\mu_1 \frac{ab}{b^2-a^2} \left\{ \frac{2}{a} A_0' - \left(\frac{1}{b} + \frac{b}{a^2} \right) A_0' \right\} + \lambda_1 \frac{2ab}{b^2-a^2} \times \left\{ \frac{1}{a} A_0 - \frac{1}{b} A_0' \right\} - \frac{\lambda_1}{c} D_0' \\ &- \frac{2(\mu_2+\lambda_2)}{a} A_0' + \frac{\lambda_2}{c} D_0' + \sum_{n=1}^{\infty} N \cos N z \left[\frac{2\mu_1(\mu_1+\lambda_1)}{2\mu_1+\lambda_1} \left\{ \chi^{(1)}(Na) + \omega^{(1)}(Na) \right\} A_n + \frac{2\mu_1(\mu_1+\lambda_1)}{2\mu_1+\lambda_1} \right. \\ &\times \left\{ \chi^{(2)}(Na) + \omega^{(2)}(Na) - \frac{2\mu_1+\lambda_1}{\mu_1+\lambda_1} \cdot \frac{1}{Na} \right\} A'_n + \frac{\mu_1+\lambda_1}{2\mu_1+\lambda_1} \left\{ \chi^{(2)}(Na) + \omega^{(2)}(Na) - \frac{2\mu_1+\lambda_1}{\mu_1+\lambda_1} \right. \\ &\times \left. \chi^{(2)}(Na) \right\} B'_n - \frac{2\mu_2(\mu_2+\lambda_2)}{2\mu_2+\lambda_2} \left\{ \chi(Na) + \omega(Na) - \frac{2\mu_2+\lambda_2}{\mu_2+\lambda_2} \cdot \frac{1}{Na} \right\} A'_n - \frac{\mu_2+\lambda_2}{2\mu_2+\lambda_2} \left\{ \chi(Na) + \omega(Na) \right. \\ &- \left. \frac{2\mu_2+\lambda_2}{\mu_2+\lambda_2} \chi(Na) \right\} B'_n \left. \right] - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i H_0(\xi_i a)}{\theta_i^2} \cdot \frac{2\mu_1(\mu_1+\lambda_1)}{2\mu_1+\lambda_1} \left\{ \phi^{(2)}(\xi_i z) - \Psi^{(2)}(\xi_i z) \right\} D_i' + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\eta_i}{J_0(\eta_i a)} \\ &\times \frac{2\mu_2(\mu_2+\lambda_2)}{2\mu_2+\lambda_2} \left\{ \phi^{(2)}(\eta_i z) - \Psi^{(2)}(\eta_i z) \right\} D_i' = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} w_1)_{r=a} - w_2)_{r=a} &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2z}{c} \right) D_0' - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2z}{c} \right) D_0'' + \sum_{n=1}^{\infty} \sin N z \left[\frac{\mu_1+\lambda_1}{2\mu_1+\lambda_1} \left\{ \chi^{(1)}(Na) - \omega^{(1)}(Na) \right. \right. \\ &- \left. \frac{\lambda_1}{\mu_1+\lambda_1} \chi^{(1)}(Na) \right\} A_n + \frac{\mu_1+\lambda_1}{2\mu_1+\lambda_1} \left\{ \chi^{(2)}(Na) - \omega^{(2)}(Na) - \frac{\lambda_1}{\mu_1+\lambda_1} \chi^{(2)}(Na) \right\} A'_n + \frac{\mu_1+\lambda_1}{2\mu_1+\lambda_1} \left\{ \chi^{(2)}(Na) \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\omega^{(2)}(Na) + \frac{2\mu_1}{\mu_1 + \lambda_1} \chi^{(2)}(Na) \} B_{n'} - \frac{\mu_2 + \lambda_2}{2\mu_2 + \lambda_2} \left\{ \chi(Na) - \omega(Na) - \frac{\lambda_2}{\mu_2 + \lambda_2} \times \chi(Na) \right\} A_{n'} \\
& - \frac{\mu_2 + \lambda_2}{2\mu_2 + \lambda_2} \left\{ \chi(Na) - \omega(Na) + \frac{2\mu_2}{\mu_2 + \lambda_2} \chi(Na) \right\} B_{n'} \Bigg] + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{H_0(\xi_i a)}{\Theta_i^2} \frac{\mu_1 + \lambda_1}{2\mu_1 + \lambda_1} \left\{ p^{(2)}(\xi_i z) \right. \\
& \left. + \frac{2\mu_1 + \lambda_1}{\mu_1 + \lambda_1} Q^{(2)}(\xi_i z) \right\} D_i' - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{J_0(\eta_i a)} \cdot \frac{\mu_2 + \lambda_2}{2\mu_2 + \lambda_2} \left\{ p^{(2)}(\eta_i z) + \frac{2\mu_2 + \lambda_2}{\mu_2 + \lambda_2} Q^{(2)}(\eta_i z) \right\} D_i'' = 0 \quad (23)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{z1}|_{z=0} &= \lambda^2 \frac{2ab}{b^2 - a^2} \left(\frac{1}{a} A_0 - \frac{1}{b} A_0' \right) - \frac{2\mu_1 + \lambda_1}{c} D_0' + \sum_{n=1}^{\infty} N \left[\frac{2\mu_1(\mu_1 + \lambda_1)}{2\mu_1 + \lambda_1} \left\{ \chi^{(1)}(Nr) - \omega^{(1)}(Nr) \right\} A_n \right. \\
& \left. + \frac{2\mu_1(\mu_1 + \lambda_1)}{2\mu_1 + \lambda_1} \left\{ \chi^{(2)}(Nr) - \omega^{(2)}(Nr) \right\} A_{n'} + \frac{\mu_1 + \lambda_1}{2\mu_1 + \lambda_1} \left\{ \chi^{(2)}(Nr) + \chi^{(2)}(Nr) - \omega^{(2)}(Nr) \right\} B_{n'} \right] \\
& - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i H_0(\xi_i r)}{\Theta_i^2} \cdot \frac{2\mu_1(\mu_1 + \lambda_1)}{2\mu_1 + \lambda_1} \left\{ \phi^{(2)}(0) + \psi^{(2)}(0) \right\} D_i = p_1(r) \quad (24)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{z2}|_{z=0} &= \lambda^2 \frac{2}{a} A_0' - \frac{2\mu_2 + \lambda_2}{c} D_0'' + \sum_{n=1}^{\infty} N \left[\frac{2\mu_2(\mu_2 + \lambda_2)}{2\mu_2 + \lambda_2} \left\{ \chi(Nr) - \omega(Nr) \right\} A_{n'} + \frac{\mu_2 + \lambda_2}{2\mu_2 + \lambda_2} \left\{ \frac{2\mu_2 + \lambda_2}{\mu_2 + \lambda_2} \chi(Nr) \right. \right. \\
& \left. \left. + \chi(Nr) - \omega(Nr) \right\} B_{n'} \right] - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\eta_i}{J_0(\eta_i a)} \frac{2\mu_2(\mu_2 + \lambda_2)}{2\mu_2 + \lambda_2} \left\{ \phi^{(2)}(0) + \psi^{(2)}(0) \right\} D_i'' = p_2(r) \quad (25)
\end{aligned}$$

(21)~(25)式を各項ごとに解き、 A_0 、 A_0' 、 D_0' 、 D_0'' 、 A_n 、 $A_{n'}$ 、 $B_{n'}$ 、 D_i' 、 D_i'' を求めることにより、各変位を決定することができるので、従って、また応力成分も求めることができる。式中、添字1、2はそれぞれ、 $a \leq r \leq b$ および $r \leq a$ に対するものである。以上外力が対称の場合であるが、逆対称の場合には式中、 D_i' 、 D_i'' の項の代りに D_i 、 D_i' の項を考慮することにより同様にえられる。

4. 数値解析例

付着応力の解析に先だち、この解析方法により、円柱が部分的に等分布外力を受ける場合の応力分布を計算した。計算に用いた数値は、 $b/a = 5$ 、 $c/a = 10$ 、 $\nu = 0.25$ で外力は対称に半径 a の範囲に等分布するものとした。この結果えられた σ_z および τ_{rz} の分布図を図-3に示す。ただしこの結果は $i = 30$ 、 $n = 60$ (n は偶数のみであるので項数としてはそれぞれ30項)としたものである。この結果は、別な方法で解析した斎藤博士の結果⁴⁾と非常に良く合っている。

次に、付着応力の解析例として、両引法について、鉄筋径とコンクリート径の比、長さ、コンクリートの弾性係数、およびポアソン比を数種変化させて解析を行なった結果を図-4~7に示す。この結果は $i = 50$ 、 $n = 100$ 、(項数としてはそれぞれ50項)とした場合のものである。図に示したように、鉄筋径とコンクリート径の比(b/a)については、一応コンクリート径を大きくした方が、付着応力の最大値が小さく、また最大値の位置も深くなるようであるが、これだけの結果では、コンクリート径をもっと小さくした場合どうなるか明言することは出来ない。長さ c と付着応力の関係は、当然、長さ c が長くなるにつれて、最大値は大きく、その位置も深くなっ

ている。長さをもっと長くすれば、一定値に近づくはずであるが、 $c/a = 40$ ではまだ十分ではないようである。コンクリートの弾性係数と付着応力度の関係は、図-6のように、かなり著しい相関を示している。すなわち、弾性係数比の小さいものほど(コンクリートの弾性係数の大きいものほど)最大値が大きくなっている。しかし、図-7に示すようにコンクリートのポアソン比の影響はほとんどない。

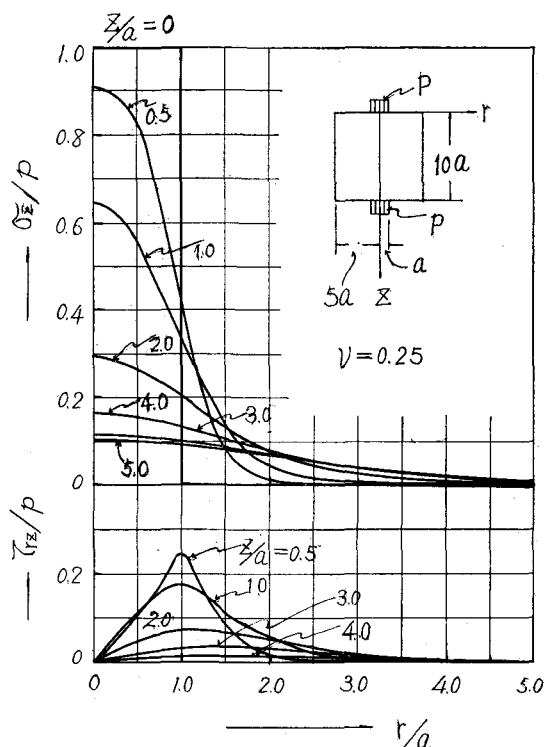
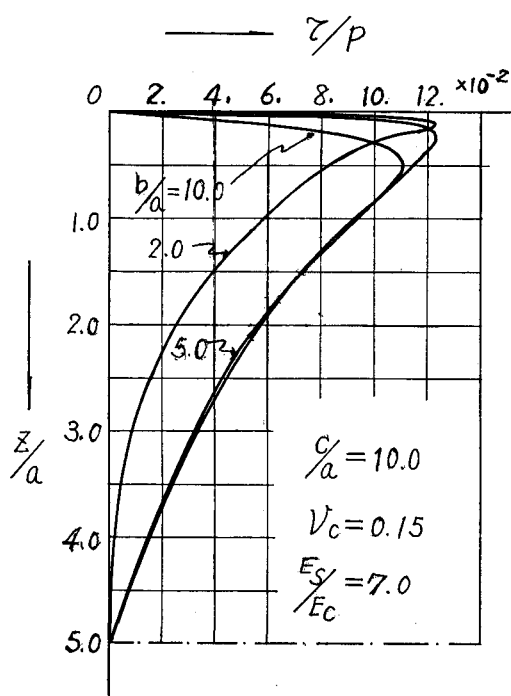
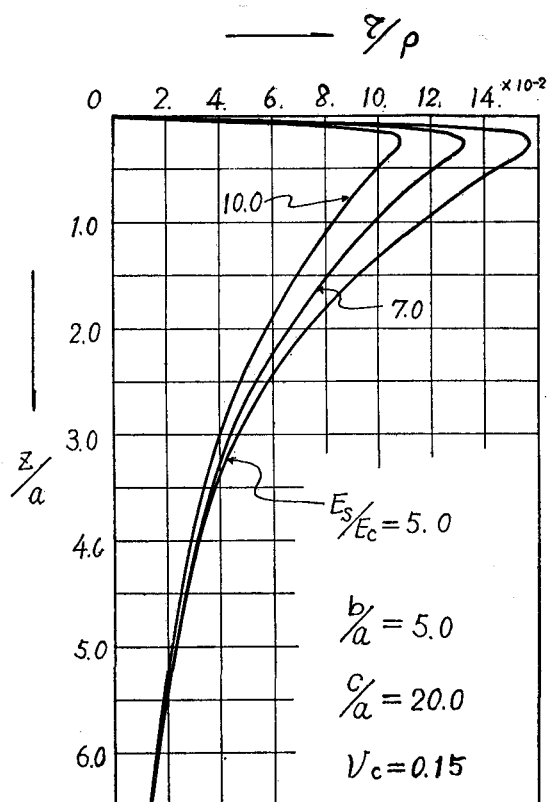


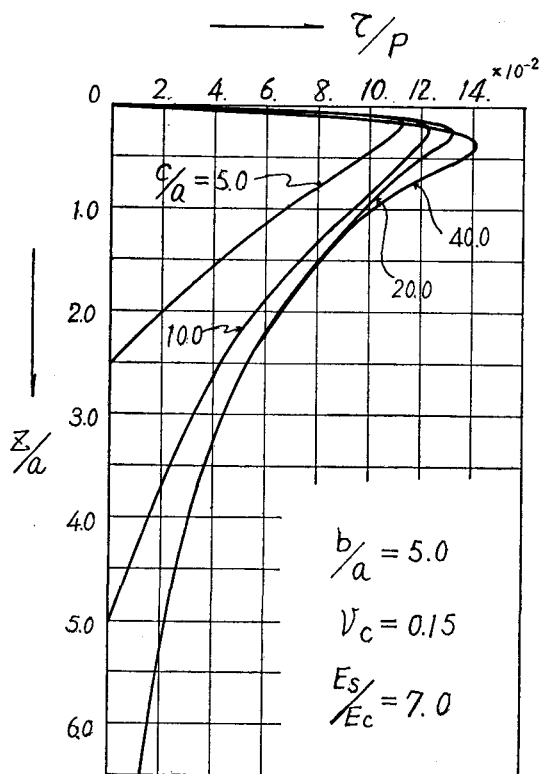
図-3 部分荷重を受ける円柱内の応力分布図



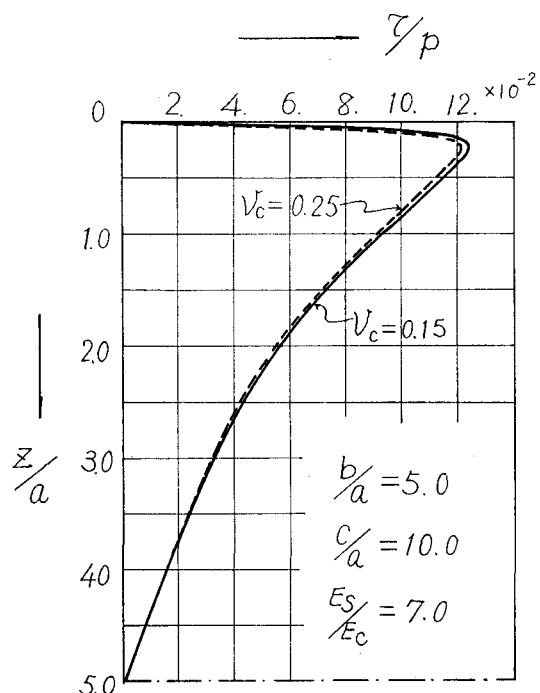
図—4 コンクリート径と付着応力分布



図—6 弾性係数と付着応力分布



図—5 埋込み長さで付着応力分布



図—7 ポアソン比と付着応力分布

5. あとがき

鉄筋コンクリートの付着応力分布を、3次元軸対称弾性問題として解析を試み、数種の場合について、その数値解析結果を示した。この理論解析の結果、付着応力分布に及ぼす、供試体の形状、材料等の影響をある程度明らかにすることができたが、これは、いうまでもなく、弾性範囲内の取扱いであり、従ってコンクリートと鉄筋との間に相対変位がない場合の解析例である。ここでは、付着というものを粘着と同意に考えており、いわゆる相対変位を考えた場合の摩擦による付着のようなものは考えていない。また上の解析結果は、付着応力の分布を示したものであり、この結果を直ちに、付着強度そのものについて適用出来るものではないが、両引法の場合、もし何らかの方法で、相対変位を生ずる荷重を知ることができれば、付着強度をある程度、正確に算定することは可能である。

さらに、現在の試験方法のように、載荷端のずれを規定して、付着強度を算定するような場合には、当然、相対変位を考えなければならないが、この場合の応力状態はかなり複雑であり、理論的な解析は困難である。

終りに、この研究を行なうにあたり終始懇篤なる御指導を賜りました室蘭工業大学能町純雄教授に深く感謝いたします。

なお、本計算は、室蘭工業大学電子計算機室の FACOM-231および北海道大学大型計算機センターのFACOM 230-60を使用して行なったものである。

参 考 文 献

- 1) R.G.Mathey, D.Watstein : Investigation of Bond in Beam and pull-out Specimene with High-Yield-strength Deformed Bar, J.ACI, Mar. 1961, 他
- 2) K.R.Peattie, J.A.Popet : Effect of Age of Concrete on Bond Resistance, J. ACI Feb. 1956
- 3) S.G. Nomaehi : On One Meth.d of Solving Stress Problems in Cylindrical Co-ordinates by Meams of Finite Fourier Hankel Transforms (Part I), Mem. Muroran Institute of Tech. vol. 3, No.3 1960
- 4) 斎藤秀雄 : 短円柱および円盤の軸対称変形, 機械学会論文集, 18, 1952