

2次せん断変形を考慮したねじり特性について

学生員 ○佐 伯 昇*

正 員 横 道 英 雄**

1. ま え が き

先に発表した論文¹⁾において、2次せん断変形を考慮した箱桁の解析を行なったが、この論文では実際の桁を対象にして両端単純、両端固定、一端単純他端固定支承の場合について解析を行なった、又変断面について弾性荷重法を用いて解析した。

2. 解析の概要

ねじりによるそり W は θ に比例するそれによって、そり応力、2次ねじりモーメントは各々 θ'' 、 θ''' に比例して出てくる。この2次のねじりモーメントによって2次のせん断変形 θ' が生ずる。これによる全体のねじり率は $\theta'_0 + \theta'_s$ となる。

$$1 \text{ 次ねじりモーメント} : m_t = GI_t(\theta'_0 + \theta'_s) \quad (1)$$

$$2 \text{ 次ねじりモーメント} : \bar{m}_t = -EC_w \theta'''_s \quad (2)$$

$$\text{拘束ねじりモーメント} : m_w = -EC_w \theta'''_s \quad (3)$$

$$2 \text{ 次せん断変形} : \theta'_s = -\alpha_0 \theta'''_s = -\frac{EC_w}{GI_t} \alpha \theta'''_s \quad (4)$$

$$T = m_t + \bar{m}_t = GI_t \theta'_0 - EC_w (1 + \alpha) \theta'''_s \quad (5)$$

$$\bar{\lambda} = \sqrt{GI_t / (EC_w (1 + \alpha))} \quad (6)$$

2-1 両端単純支承の場合 ($x = a$ に $M_T = 1$ が 載 荷)

$$\text{境界条件} \quad x = 0 : \quad \theta_s = 0, \quad \theta''_s = 0$$

$$x = l : \quad \theta_s = 0, \quad \theta''_s = 0$$

$$\text{荷重点 } a \text{ の左右について} \quad \theta_{s\text{左}} = \theta_{s\text{右}}, \quad \theta'_{s\text{左}} = \theta'_{s\text{右}}$$

$$\sinh x \text{ は } shx, \quad \cosh x \text{ は } chx \text{ と表示する}$$

$$C_2 = -sh\bar{\lambda}b/sh\bar{\lambda}l \quad \bar{C}_2 = -sh\bar{\lambda}a/sh\bar{\lambda}l,$$

$$x' = l - x, \quad b = l - a$$

$$0 \leq x \leq a \quad \theta = \left(\frac{b}{l} x + \frac{1}{1 + \alpha} \cdot C_2 \frac{sh\bar{\lambda}x}{\bar{\lambda}} \right) / GI_t$$

$$a < x \leq l \quad \theta = \left(\frac{a}{l} x' + \frac{1}{1 + \alpha} \cdot \bar{C}_2 \frac{sh\bar{\lambda}x'}{\bar{\lambda}} \right) / GI_t$$

$$0 \leq x \leq a \quad m_t = -\frac{b}{l} + \frac{1}{1 + \alpha} \cdot C_2 \quad ch\bar{\lambda}x$$

$$a < x \leq l \quad m_t = -\frac{a}{l} - \frac{1}{1 + \alpha} \cdot \bar{C}_2 \quad ch\bar{\lambda}x'$$

$$0 < x \leq a \quad \bar{m}_t = -\frac{1}{1 + \alpha} \cdot C_2 \quad ch\bar{\lambda}x$$

$$a < x < l \quad \bar{m}_t = -\frac{1}{1 + \alpha} \cdot \bar{C}_2 \quad ch\bar{\lambda}x'$$

$$0 < x \leq a \quad m_w = -\frac{1}{1 + \alpha} \cdot C_2 \frac{sh\bar{\lambda}x}{\bar{\lambda}}$$

$$a < x < l \quad m_w = -\frac{1}{1 + \alpha} \cdot \bar{C}_2 \frac{sh\bar{\lambda}x'}{\bar{\lambda}}$$

2-2 両端固定支承

$$\text{境界条件} \quad x = 0 \quad \theta_s = 0 \quad \theta'_s = 0$$

$$x = l \quad \theta_s = 0 \quad \theta'_s = 0$$

$$x = a \quad \theta_{s\text{左}} = \theta_{s\text{右}}, \quad \theta'_{s\text{左}} = \theta'_{s\text{右}}, \quad \theta''_{s\text{左}} = \theta''_{s\text{右}}$$

2-3 一端単純他端固定支承

$$\text{境界条件} \quad x = 0 \quad \theta_s = 0 \quad \theta'_s = 0$$

$$x = l \quad \theta_s = 0 \quad \theta'_s = 0$$

$$x = a \quad \theta_{s\text{左}} = \theta_{s\text{右}}, \quad \theta'_{s\text{左}} = \theta'_{s\text{右}}, \quad \theta''_{s\text{右}} = \theta''_{s\text{左}}$$

これらの θ を求める時は $\theta'_0 + \theta'_s$ を積分して $x = 0$ 、 $x = l$ において $\theta = 0$ を用いる。

3. 等断面の計算例

桁高 H と巾 B の比 $\beta = H/B$ を0.1~0.55まで変化させると α は0.16~0.53に変化する。この場合ウェブ厚40mm、床版厚20mm、スパン30mは一定にした。これらの場合の2次せん断変形を考慮した場合とこれまでのねじり理論²⁾とを比較した。単純支承においてそれほどの差はないが固定支承において明らかな差が出てくる。すなわち固定支点的1次ねじりモーメントの影響線においてこれまでのねじり理論では0であるが2次せん断変形を考慮した場合 α の値に従って1次ねじりモーメントが出てくる。それに従って2次ねじりモーメントが小さくなる。又拘束ねじりモーメントはこれまでの理論より小さい値となる。

* 北海道大学 大学院

** 北海道大学 教授 工博

4. 変断面箱桁の場合

4-1 $m_i, \bar{m}_i$ の解

$$-m_{n-1}(1-r_{n-1})+m_n(2+10r_n)-m_{n+1}(1-r_{n+1})=\Delta x K_n(\bar{\lambda}^2 T)$$

$$\begin{pmatrix} -(1-r_0) & (2+10r_1) & -(1-r_2) & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ -(1-r_{n-1}) & (2+10r_n) & -(1-r_{n+1}) & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \vdots \\ m_n \\ m_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta x K_1(\bar{\lambda}^2 T) \\ \vdots \\ \Delta x K_n(\bar{\lambda}^2 T) \end{pmatrix} \quad (7)$$

式が n 個で未知数が $n+2$ であるから 2 個の境界条件による式が必要である。

4-1-1 両端単純支承の場合

$$m_0 = m_{n+1} = 0 \text{ から}$$

$$(1+5r_0)m_0 - (1-r_1)m_1 = \Delta x K_0(\bar{\lambda}^2 T)$$

$$-(1-r_n)m_n + (1+5r_{n+1})m_{n+1} = \Delta x K_{n+1}(\bar{\lambda}^2 T)$$

4-1-2 両端固定支承の場合

$$m_0 = m_{n+1} = 0$$

4-1-3 一端単純他端固定支承の場合

$$(1+5r_0)m_0 - (1-r_1)m_1 = \Delta x K_0(\bar{\lambda}^2 T)$$

$$m_{n+1} = 0$$

4-1-4 T の決定と解

図-29のように $T=1$ をかけると

$$\Delta x K_0(\bar{\lambda}^2 T) = \frac{1}{2}(7r_0 + 6r_1 + r_2)$$

$$\Delta x K_i(\bar{\lambda}^2 T) = (r_{i-1} + r_i + r_{i+1})$$

$$\Delta x K_j(\bar{\lambda}^2 T) = \frac{1}{2}(-r_{j-2} + r_{j-1} + r_j)$$

となる同様に図-30のように荷重をかける、この各々の解を m_L, m_R とすると支承両端においてねじり角 θ_0 は 0 であるから

$$\int_0^L \frac{m}{GI_t} dx = 0$$

$$\begin{pmatrix} (2+10r_1) & -(1-r_2) \\ -1-r_1 & (2+10r_2) & -(1-r_3) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ -(1-r_{n-1}) & (2+10r_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{w1} \\ M_{w2} \\ \vdots \\ M_{wn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+r_1}{1+\alpha_1} \Delta x \\ \vdots \\ \frac{1+r_n}{1+\alpha_n} \Delta x \end{pmatrix}$$

$[B][M_w] = [T_w]$ と表示すると

$[M_w] = [B]^{-1}[T_w]$ より求まる。

5. 変断面橋桁の計算例

両端単純、両端固定も同じ断面で、スパン 48m、支点、中央桁高各々 2.8m、1.2m、巾 5m、張出部 1.45m、床版厚 24cm、ウェブ厚 40cm、下フランジ厚 50cm~15cm

一端単純他端固定桁はスパン 16m、単純、固定支承部の桁高各々 2m、2.8m、下フランジ厚は 40cm~50cm あとは上の断面と同じである。変断面も等断面と同じように

$m = GI_t \theta_0'$ とおくと (5) 式は

$$m'' - \bar{\lambda}^2 m + \bar{\lambda}^2 T = 0 \quad \gamma = \bar{\lambda}^2 \cdot \Delta x^2 / 12$$

これを弾性荷重法によって m を 2 次放物線とすると

図-31のように T_1 と T_2 とすると

$$T_1 \int_0^L \frac{m_L}{GI_t} dx + T_2 \int_0^L \frac{m_R}{GI_t} dx = 0$$

$$T_1 = - \frac{\int_0^L \frac{m_R}{GI_t} dx}{\int_0^L \frac{m_L}{GI_t} dx + \int_0^L \frac{m_R}{GI_t} dx}, \quad T_2 = T_1 - 1$$

同様に、 $\Delta x K_i(\bar{\lambda}^2 T)$ の中に上で求めた T_1, T_2 を入れて荷重項を作り変えると (7) 式から

$$[A][M] = [K]$$

$$[M] = [A]^{-1}[K] \text{ で求まる。}$$

$$(5) \text{ 式から } m'' = \bar{\lambda}^2 (m - T)$$

$$1 \text{ 次ねじりモーメント: } m_i = m - \alpha_0 m''$$

$$2 \text{ 次ねじりモーメント: } \bar{m}_i = T - m_i$$

で 2 次せん断変形を考慮した解が求まる。この場合 $\alpha_0 = 0$ を入れるとこれまでと同じ解析になる。

4-2 拘束ねじりモーメント m_w の解

$$M_w'' - \bar{\lambda} M_w = 0$$

M_w を 2 次放物線とする。荷重点での傾きは不連続点となるので荷重項は $M_{w左} - M_{w右}$ が生ずる。

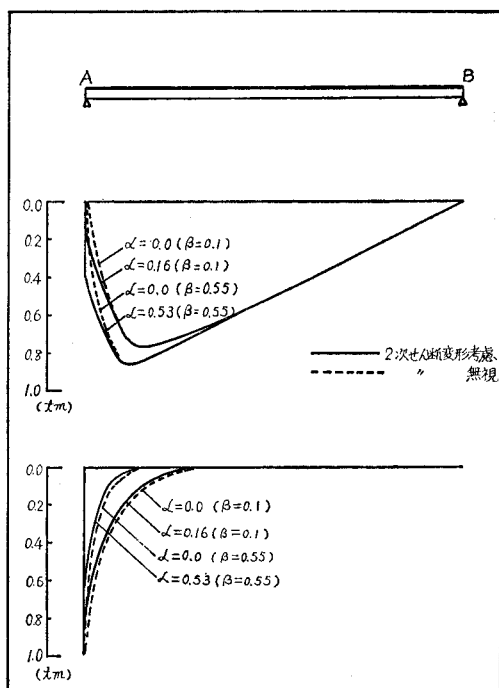
4-2-1 両端単純支承の場合

$$M_{w0} = M_{wn+1} = 0$$

固定端において著しい違いが生ずる。

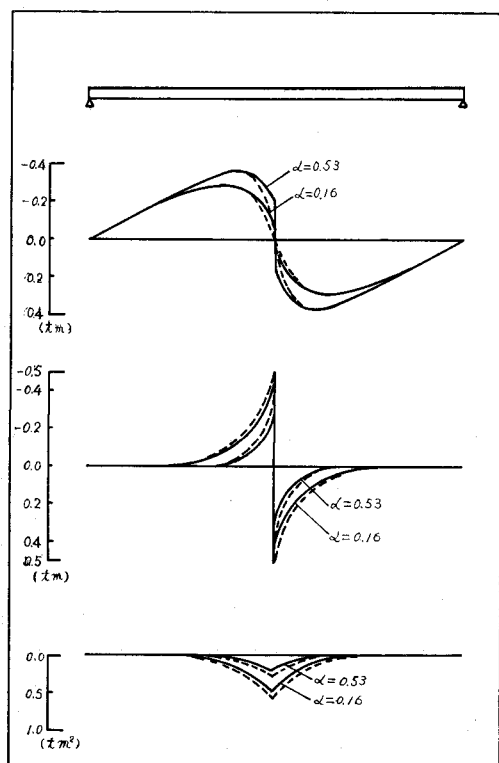
参考文献

- 1) 土木学会 25 回年次学術講演会講演集 1
佐伯 昇, 島田 勝, 横道英雄, 2 次せん断変形を考慮した箱桁のねじり解析について
- 2) F.W. Bornscheuer "Systematische Darstellung des Biege und Verdrehvorgangs unter besonderer Berücksichtigung der Wölbkrafttorsion,"
Stahlbau 21-1 (1952)



図一 1 次ねじりモーメント影響線(支 点)(上)

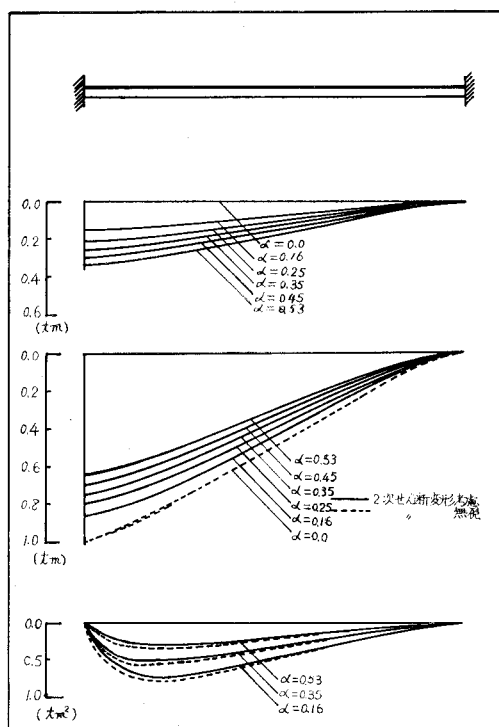
図二 2 次ねじりモーメント影響線(支 点)(下)



図三 1 次ねじりモーメント影響線(中央点)(上)

図四 2 次ねじりモーメント影響線(中央点)(中)

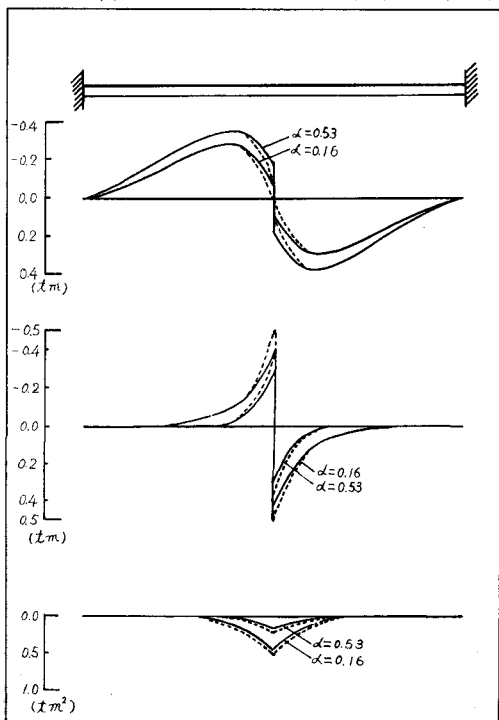
図五 拘束ねじりモーメント影響線(中央点)(下)



図六 1 次ねじりモーメント影響線(支 点)(上)

図七 2 次ねじりモーメント影響線(支 点)(中)

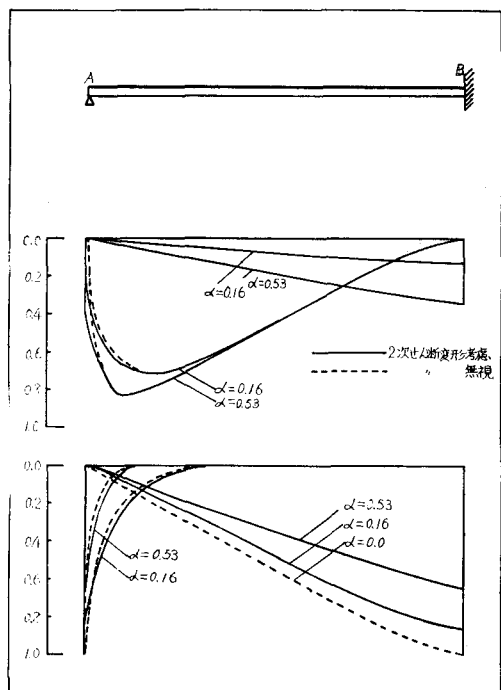
図八 拘束ねじりモーメント影響線(支 点)(下)



図九 1 次ねじりモーメント影響線(中央点)(上)

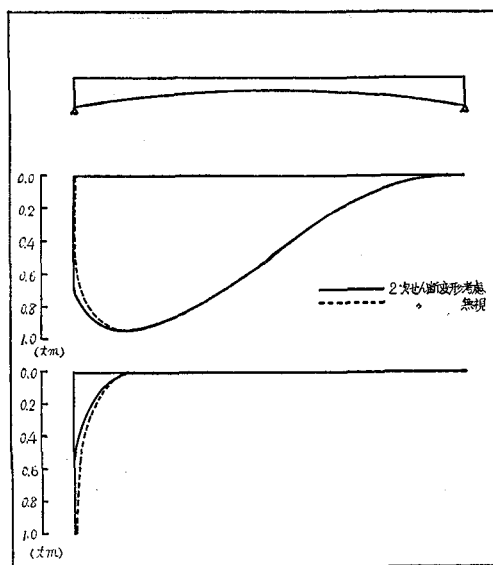
図一〇 2 次ねじりモーメント影響線(中央点)(中)

図一一 拘束ねじりモーメント影響線(中央点)(下)



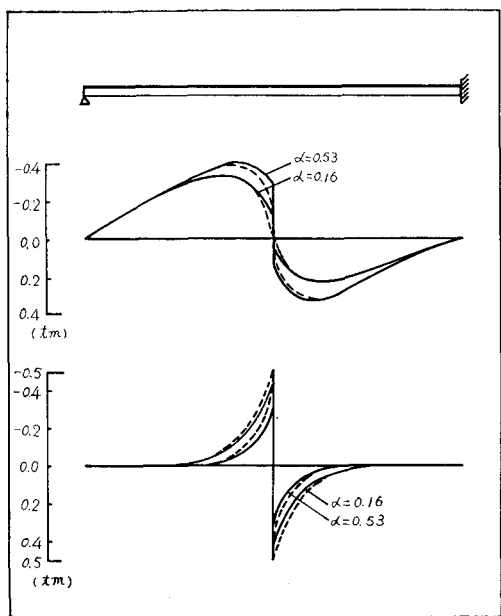
図—12 1次ねじりモーメント影響線(支点A及びB)(上)

図—13 2次ねじりモーメント影響線(支点A及びB)(下)



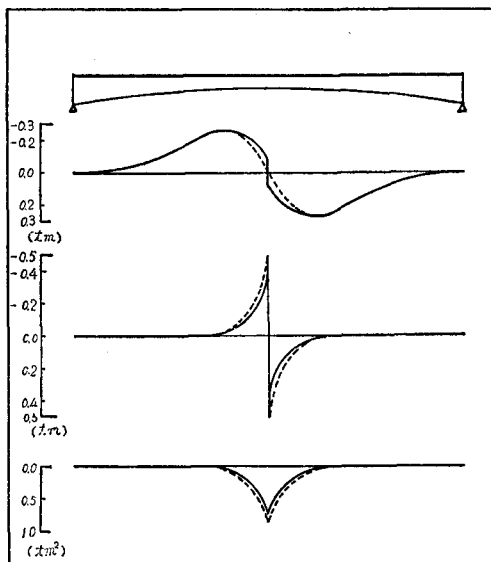
図—16 1次ねじりモーメント影響線(支点A及びB)(上)

図—17 2次ねじりモーメント影響線(支点A及びB)(下)



図—14 1次ねじりモーメント影響線(中央点)(上)

図—15 2次ねじりモーメント影響線(中央点)(下)



図—18 1次ねじりモーメント影響線(中央点)(上)

図—19 2次ねじりモーメント影響線(中央点)(中)

図—20 拘束ねじりモーメント影響線(中央点)(下)

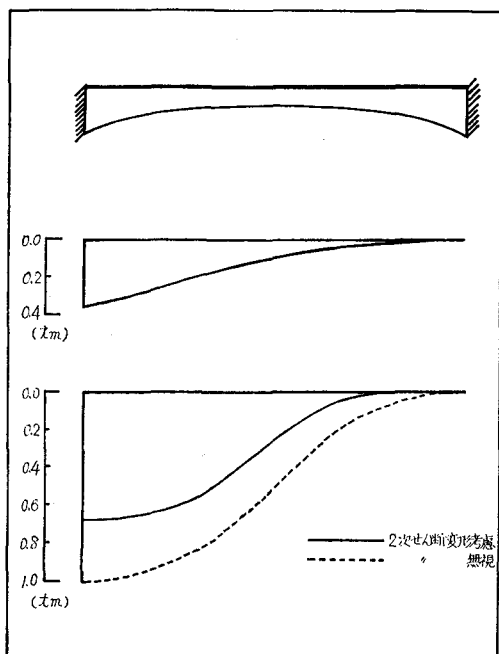


図-21 1次ねじりモーメント影響線(支点)(上)

図-22 2次ねじりモーメント影響線(支点)(下)

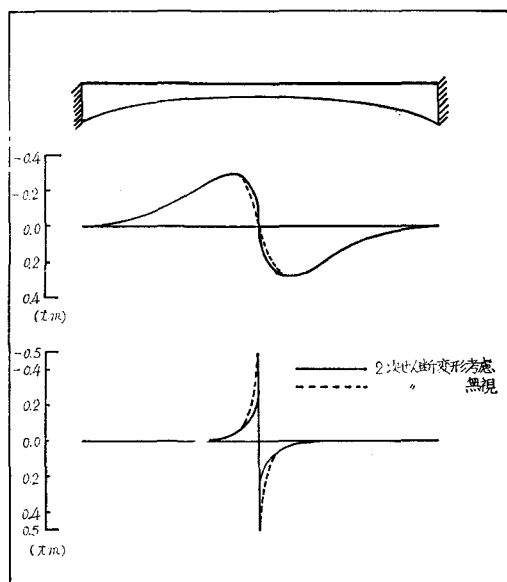


図-23 1次ねじりモーメント影響線(中央点)(上)

図-24 2次ねじりモーメント影響線(中央点)(下)

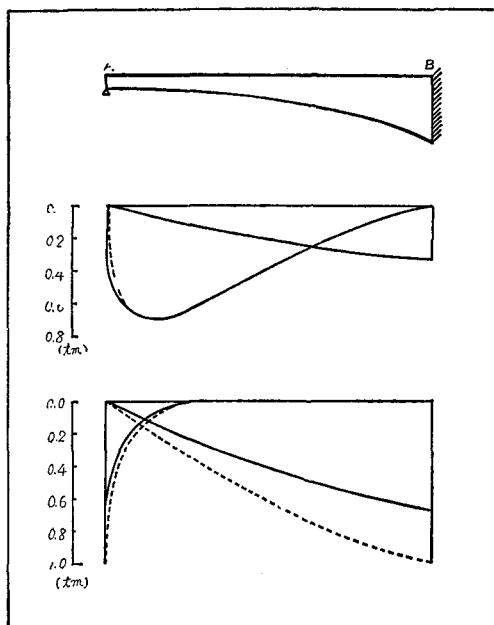


図-25 1次ねじりモーメント影響線(点A及びB)(上)

図-26 2次ねじりモーメント影響線(点A及びB)(下)

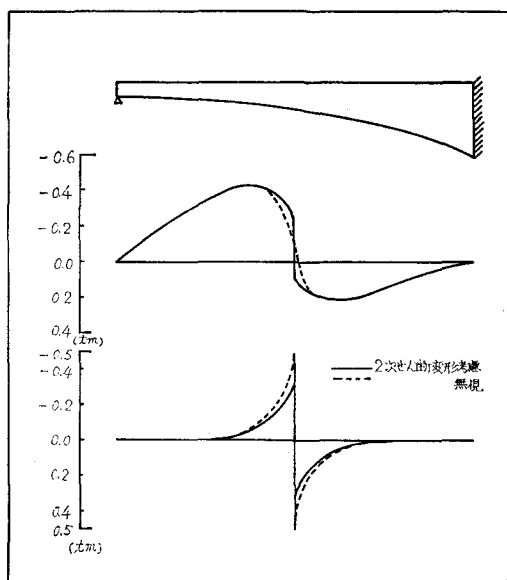


図-27 1次ねじりモーメント影響線(中央点)(上)

図-28 2次ねじりモーメント影響線(中央点)(下)

