

## 一様斜面上における孤立波の変形に関する研究

### —— 砕 波 後 の 変 形 ——

正 員 佐 伯 浩\*

学生員 ○宮 川 孝 仁\*

正 員 花 安 繁 郎\*\*

#### 1. 緒 論

長波、即ち津波のような波長の長い波の変形を論じた理論的研究は、かなり多く発表されている。特に、微小振幅長波の研究については、その歴史は古い。特に、1960年5月23日のチリ地震津波は世界中に多大の被害を与えた。

その後、津波の様な長波の変形、運動機構の理論的研究とともに、実験的な研究も数多く報告されてきた。

長波の理論的研究では、Greenspan, Shen-Mayer, Kishi, Long, Shudo 等その研究は数多くある。又、長波の変形の問題を数値計算により解く事も行なわれた。Amein, Freeman, Méhauté, Pergrine がその例である。Amein, Freeman, Méhauté は運動方程式を特性曲線法により、特性方程式を導き、それを直接数値計算した。Pergrine は、長波の運動方程式より、摂動法により式を求め、その数値計算等を行なった。

以上の研究の中で、Freeman, Méhauté の研究は注目値する。彼らは、長波の運動を4つの段階に分けて、各々の段階の方程式を求め、それを計算した。つまり、砕波前迄の変形、砕波後から完全な段波になる迄、完全に段波になってから汀線迄、汀線からは、rerfaction wave として dry bed をはい上る迄の4つの段階を一度に計算を行なった。

実験的な研究としては、急勾配斜面の遡上高を取り扱った Kaplan, Hall-Watts の研究、同じく急勾配斜面上の変形、遡上高さを取り扱った岸、佐伯の研究と Ippen, Kulin の研究、緩勾配の斜面上の変形を取り扱った Camfield, Street の研究が発表されている。Kaplan, Hall & Watts, 岸・佐伯, Camfield・Street, Ippen・Kulin の実験には、全て孤立波が用いられている。又、Freeman, Méhauté, Pergrine の計算にも孤立波で計算を行なっている。一般に津波の様な長周期の現象を実験で行なう場

合、孤立波を用いる事が多い。これは、孤立波理論が波長・周期がともに、理論的に無限である事から、長周期波の波のモデルとして用いられる。しかし津波の様な長波のモデルとして孤立波を使う事が理論的に正しいか否かという点、それは単純には解決できない。実験で作る孤立波は、孤立波理論と波の主要部分（第一波）に関しては、波速、波形に関してかなりよく一致している。しかし、孤立波を使う場合、短時間に水移動を起こさせて作るため、第一波目は、孤立波理論に近い波が出来るが、その後にすぐ、じょう乱によって作られる二次波が発生する。この二次波に関しては、あまり研究されていないが、とにかく、波形の記録からみると、第一波目が特別他の波にくらべて大きいだけで、あとは津波の波形と似ている。又、チリ地震津波（1960）の Hawaii における陸上への遡上高が孤立波によって求めた遡上高さによく一致している事が Kaplan によって報告されているし、又、佐々木によっても三陸海岸における遡上高が、Kaplan の実験結果とよく一致している事が報告されているので、ある程度以上の波高を持つ様な津波に対しては、孤立波がモデルとして適用できるものと考えられる。

今回の我々の研究は、一様斜面上における、孤立波の砕波後の砕波点における形態を調べた。又、砕波後の波を段波と見直し、その理論と計算結果を示した。

#### 2. 孤立波の変形（底勾配の効果）

波の変形に及ぼす、海底勾配の影響は大きい。この波の変形と底勾配の関係を最初に実験的に研究したのは、Ippen Kulin であり、その後、岸・佐伯, Camfield・Street により研究されてきた。孤立波が、傾斜面上を進行する場合に、勾配(S)がゆるければ、波は対称であり、傾斜面上においても、ある程度、孤立波理論が満足されていると思われる。しかし勾配が急 ( $S > 1/40$ ) になると、波形は対称でなくなる。特に砕波点近傍では、非対称性

\* 北海道大学工学部土木工学科

\*\* 労働省産業安全研究所

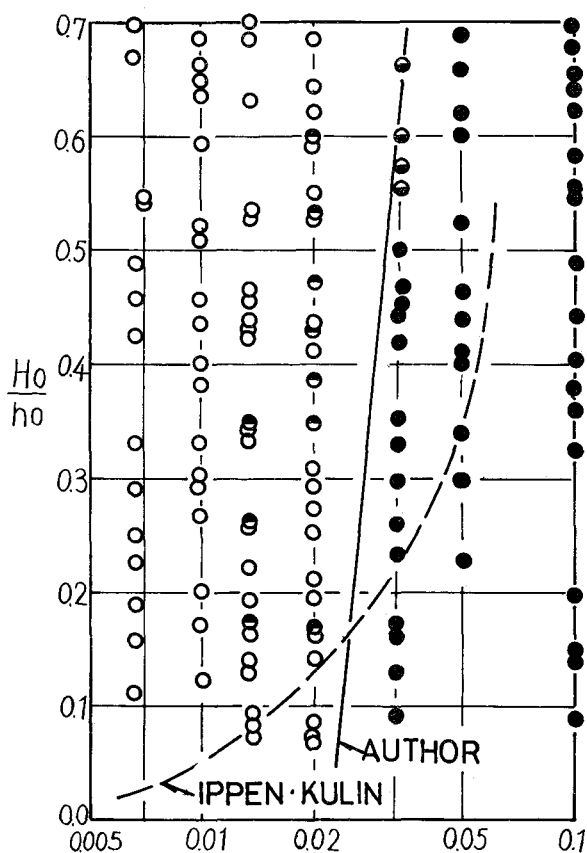


Fig 1 Classification of Wave profile of Breaking Point

が強くなり、波は plunging breaker となる。また勾配  $S$  が緩い時は、波は理論どおり波頂から砕け、波形は対称形となり、spilling breaker となる。よって、波の砕ける部分の形態によって、その砕波点近傍で波動理論が適用できるか否かが判定できることになる。Fig-1 は、その砕波点の形態を分類したものである。Fig-1 が示すとおり、今回の我々の実験は  $S \leq \frac{1}{100}$  の範囲であったが、完全な plunging breaker はなかった。しかし沖波水深  $h_0$  が大きくなると、勾配  $S$  が小さくても、波頂部近辺のみに plunging が生じていた。この理由は明確でない。又、勾配  $S$  が  $S = \frac{1}{100}$  の時は、plunging breaker と spilling breaker の境界は、岸・佐伯の実験では、 $H_0/h_0 \approx 0.07$  くらいであり、又  $S > \frac{1}{100}$  では、完全な spilling breaker は起こらなかった。しかし Ippen-Kulin の結果は、Fig-1 の破線で示されている様に、かなり勾配が大きくても spilling breaker が起っており、我々の実験結果とかなり異っている事が分る。これは、Ippen-Kulin の実験水路が、9.6m と短い水路で行った為と思われる。又砕波点近傍は波が、非常に微妙で、側壁、底部の粗度

などによっても、砕波形態に影響を与えると思われる。次に砕波点における、相対波高 ( $H_B/h_B$ ) について調べてみた。水平床上で求められた、孤立波理論による、砕波時の相対波高 ( $H_B/h_B$ ) は多くの研究者により計算されている。その一部は下記の如くである。

Keulegan ( $H_B/h_B$ ) = 0.731

McCowan ( $H_B/h_B$ ) = 0.78

Laitone ( $H_B/h_B$ ) = 0.71

岸・佐伯の実験結果と今回の我々の実験結果より、斜面上における、砕波点の相対波高 ( $H_B/h_B$ ) は、沖波の相対波高 ( $H_0/h_0$ ) にかなり影響を受ける事が分った。 $H_B$  と  $h_B$  との関係でプロットすると、いかにも直線関係に見えるが、( $H_B/h_B$ ) と ( $H_0/h_0$ ) との関係をプロットすると、( $H_B/h_B$ ) は ( $H_0/h_0$ ) によってかなり変化している。その関係を Fig-2 に示す。

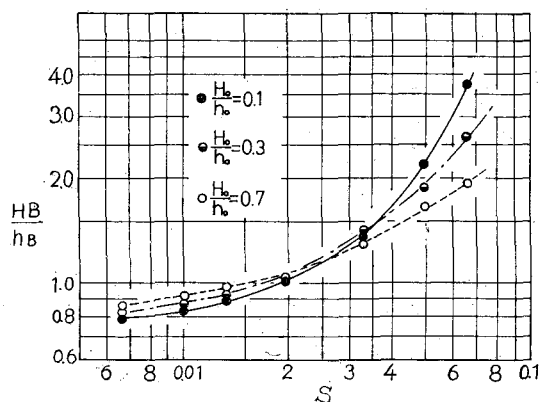


Fig 2 Breaking Point

$S \leq \frac{1}{100}$  では、( $H_0/h_0$ ) の影響は小さいが、 $S > \frac{1}{100}$  では、( $H_0/h_0$ ) によって、( $H_B/h_B$ ) が大きく変化する。 $S \leq \frac{1}{100}$  では ( $H_B/h_B$ ) は 0.8~0.9 で、理論値に近い値である。よって、 $S \leq \frac{1}{100}$  では、傾斜面上であるとはいえ、孤立波理論が適用できるようである。そこでエネルギー伝達の式より、砕波前迄の波高変化を計算してみたが、実測値とはかなり異なっていた。

これは当然、摩擦、粘性等の効果を無視した結果もあると思うが、波高の変化の仕方を調べてみると、砕波点近く迄は、波高の変化は少ないが、砕波点近傍で急に波高を増すためであると思われる。この事に関しては、Pergine が導いた長波の式を用いて、彼自身が  $S = \frac{1}{100}$  に対して波形の変化を計算しているが、波形の変形の様子、砕波点近傍の様子は、実測値と非常に似かよっているが、波高の変化を実測値と比較してみると、砕波点近

傍では、かなり異なっていた。これは Pergrine は、鉛直方向の速度成分  $v$  を無視して計算しているが、砕波点近傍では、波高の変化からみて、当然砕波点近傍では、水平方向流速  $u$  にくらべて、無視できない流速を持っているからと思われる。

これは、Ippen, Kulin の実験結果からも明らかである。

### 3. 砕波後の変形について

砕波点で砕波した後、波は、急激に波高を減じる。砕波形態が spilling breaker の場合は、砕波後、plunging breaker にくらべて、波高の減衰の割合は小さい。 $S > 1/5$  では、ほとんどの波が plunging breaker で、砕波後、水塊は dry bed 上に落下する。今回、我々が行なった実験は  $S = 1/60, 1/75, 1/100, 1/150$  で緩勾配である。その砕波の形態は、Fig-1 でも明らかのように、ほとんど全部、spilling breaker であった。砕波が始まると、徐々に波高が小さくなり、波の表面は、気泡で覆われる。この気泡の厚さはかなり厚く、この部分の波高は、波高計で測定は非常に困難であり、その後、気泡も少なくなり、波は、Bore 状になる。波が Bore 状になると、気泡も非常に小さくなる。この Bore の状態で汀線迄進行する。我々は、砕波後の波が Bore となる条件を一応波の先端部が静水面と不連続となった場合をもって Bore の始点とした。これは砕波後の波は、一種の不安定な過渡現象であり、これを物理的に表現する事は、かなり困難であると思われたので、写真で判定して、Bore の始点というものを仮定した。Bore の始点からは、一応 Bore の変形として計算できるからである。これは次の砕波後の波高変化の図からも明らかであるが、Bore 始点の位置は、勾配に対して、 $(h/h_B)$  は一定である。これを図示したものが Fig-3 である。この Fig-3 から明らかな様に  $S > 1/5$  となると  $(h/h_B)$  は急に小さくなる事を示している。これは Bore の始点がない事を意味し、砕波は plunging breaker で、直接汀線近傍に水塊となって落下することを意味する。又、 $S$  が緩い場合には、相対的に Bore となるのが早く、長い距離を Bore となって進行する事を意味している。水深が変化する様な場所を進行する Bore の変化の計算をしたのは Whitham であり、その後、Whitham, Keller, Levine

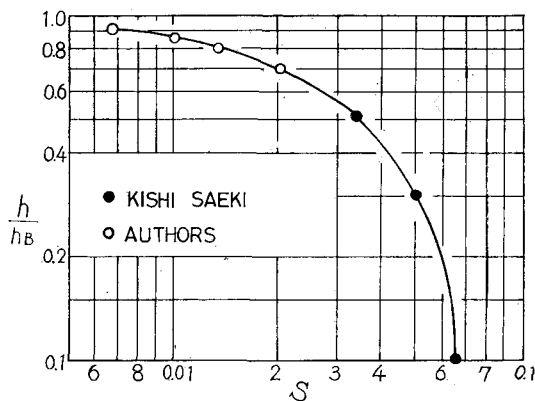


Fig 3 Bore Inception Point

により、さらに詳しく解の吟味がなされた。

### 4. 砕波後の波の変形理論

3 でも述べた様に、勾配が緩い場合には、波は、砕波後 Bore 状になって進行する事が、写真により確かめられた。そこで我々は、写真から Bore の始点を決定した。ここで、斜面上における Bore の変形理論を導く。これについては Whitham も求めているが、我々は、底部摩擦、側壁の変化も考慮した一般式を求め、その特殊な場合に対して、解を求めた。

今、任意の点の静水面下の水深を  $h_0(x)$ 、静水面上の水面の高さを  $H(x, t)$  とする。又波の進行方向を  $x$ 、時間を  $t$ 、 $x$  方向の水粒子速度を  $u(x, t)$ 、重力加速度を  $g$ 、水路幅を  $B(x)$ 、摩擦応力を  $\tau$ 、水の密度を  $\rho$  とすれば、浅水における長波の運動方程式及び連続の式は、各々、(1), (2) 式で表わされる。

$$u_t + u u_x + g H_x + \frac{\tau}{\rho(h_0 + H)} = 0 \quad (1)$$

$$B H_t + \{(h_0 + H) B u\}_x = 0 \quad (2)$$

摩擦係数を  $f$  とし、 $\tau$  を (3) 式で表わす。

$$\tau = \rho f u^2 \quad (3)$$

$$h(x, t) = h_0(x) + H(x, t) \quad (4)$$

(3) 式を (1) 式に代入すると (5) 式を得る。

$$u_t + u u_x + g H_x + \frac{f u^2}{h_0 + H} = 0 \quad (5)$$

(2) 式と (5) 式より特性方程式を求める。

$$\left. \begin{aligned} B \frac{\partial H}{\partial t} + B u \frac{\partial H}{\partial x} + 0 + (h_0 + H) B \frac{\partial u}{\partial x} + B u \frac{\partial h_0}{\partial x} + (h_0 + H) U \frac{\partial B}{\partial x} &= 0 \\ 0 + g \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{f u^2}{h_0 + H} &= 0 \\ dt \frac{\partial H}{\partial t} + dx \frac{\partial H}{\partial x} + 0 + 0 - dH &= 0 \\ 0 + 0 + dt \frac{\partial u}{\partial t} + dx \frac{\partial u}{\partial x} - du &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

(6)式より

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{1}{A} \begin{vmatrix} B & -\left\{ Bu \frac{\partial h_0}{\partial x} + (h_0 + H) u \frac{\partial B}{\partial x} \right\} & 0 & (h_0 + H) B \\ 0 & -\frac{fu^2}{h_0 + H} & 1 & u \\ dt & dH & 0 & 0 \\ 0 & du & dt & dx \end{vmatrix} \quad (7)$$

$$A = \begin{vmatrix} B & Bu & 0 & (h_0 + H) B \\ 0 & g & 1 & u \\ dt & dx & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dt & dx \end{vmatrix} \quad (8)$$

(8)式より  $A=0$  とおくと,

$$Budxdxdt - B(dx)^2 + Budxdxdt - \{gB(h_0 + H) - Bu^2\}(dt)^2 = 0$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - 2u \frac{dx}{dt} - \{g(h_0 + H) - u^2\} = 0 \text{ より}$$

$$\frac{dx}{dt} = u \pm \sqrt{g(h_0 + H)} \quad (9)$$

ここで  $C = \sqrt{gh} = \sqrt{g(h_0 + H)}$  とすると(9)式は次の如くなる。

$$\frac{dx}{dt} = u \pm C \quad (10)$$

さらに, (7)式の分子を0とおく事により, 次式が得られる。

$$\frac{du}{dt} + \sqrt{\frac{g}{h_0 + H}} \frac{dH}{dt} + \sqrt{\frac{g}{h_0 + H}} \frac{\partial h_0}{\partial x} u + \sqrt{g(h_0 + H)} \frac{u}{B} \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{fu^2}{h_0 + H} = 0$$

上式を変形して, (10)式を用いると次式を得る事ができる。

$$\frac{d(u \pm C)}{dt} = -\frac{g}{C} \left\{ u \frac{\partial h_0}{\partial x} + (h_0 + \zeta) \frac{u}{B} \frac{\partial B}{\partial x} \right\} - \frac{fu^2}{h_0 + \zeta} \quad (11)$$

これで, (1), (2)の偏微分方程式が2組の常微分方程式で表わされたわけである。ここで我々は, Wditham 等が行なった様に, Bore の前面の運動を考えた時, (10)(11)式の positive characteristic curve のみで表わされるとする。

(10)(11)式の positive characteristic equation より, 次の(12)式を得る事ができる。

$$du + 2dc - \frac{g dh_0}{u + C} - \frac{g dh_0}{C} - \frac{g fu^2 dh_0}{SC^2(u + C)} - \frac{Cu}{u + C} \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial x} \cdot \frac{dh_0}{S} = 0 \quad (12)$$

ここで, 海底勾配を  $S$  とすると,

$$dh_0 = -S dx \text{ となる。}$$

又, Bore の波速は, 次の(3)式で表わされる。

$$U = \sqrt{\frac{gh(h_0 + h)}{2h_0}} \quad (13)$$

ここで, Whitham 等によつて  $M = U / \sqrt{gh}$  とおくと,  $c$ ,  $u$ ,  $u + c$ ,  $u \cdot c$ ,  $u/c$  と  $du + 2dc$  は, 次の如く表わされる。

$$C = \sqrt{gh_0} \sqrt{2M^2 - 1} \quad (14)$$

$$u = \sqrt{gh_0} \frac{2M(M^2 - 1)}{\sqrt{2M^2 - 1}} \quad (15)$$

$$u + C = \sqrt{gh_0} \frac{(2M^3 + 2M^2 - 2M - 1)}{\sqrt{2M^2 - 1}} \quad (16)$$

$$u \cdot C = gh_0(2M^3 - 2M) \quad (17)$$

$$\frac{u}{C} = \frac{2M^3 - 2M}{2M^2 - 1} \quad (18)$$

$$2dc + du = \sqrt{\frac{g}{h_0}} \left\{ \frac{M^3 + 2M^2 - M - 1}{\sqrt{2M^2 - 1}} \right\} dh_0 + \sqrt{gh_0} \left\{ \frac{8M^4 + 8M^3 - 6M^2 - 4M + 2}{\sqrt{2M^2 - 1} (2M^2 - 1)} \right\} \quad (19)$$

ここで波高変化を計算する。Whitham 等は(12)式の前3項をとって計算を行なった。

$$(A) \quad du + 2dc - \frac{gdh_0}{u+C} = 0 \quad (20)$$

(20)式に(16)(19)式を代入して整理すると次の(21)式を得る。

$$\frac{1}{h_0} \frac{dh_0}{dM} = - \frac{2(2M^3+2M^2-2M-1)(4M^4+4M^3-3M^2-2M+1)}{(M^2-1)(2M^2-1)(2M^4+6M^3+2M^2-3M-2)} \quad (21)$$

(B) 次に(12)式の左の4項迄をとって計算する。

$$du + 2dc - \frac{gdh_0}{u+C} + \frac{gdh_0}{C} = 0 \quad (22)$$

(22)式に(14), (16), (19)式を代入して, 整理すると次の(22)式を得る。

$$\frac{1}{h_0} \frac{dh_0}{dM} = - \left( \frac{8M^4+8M^3-6M^2-4M+2}{2M^2-1} \right) \left\{ \frac{2M^3+2M^2-2M-1}{(M^3+2M^2-M-1)(2M^3+2M^2-2M-1)+(2M^3-2M)} \right\} \quad (23)$$

(C) 次に(12)式の第4項, つまり, 摩擦の項を入れて計算してみる。

$$du + 2dc - \frac{gdh_0}{u+c} + \frac{gdh_0}{C} - \frac{gfu^2 dh_0}{SC^2(u+c)} = 0 \quad (24)$$

(24)式に, (14), (16)(18), (19)式を代入して整理すると, 次の(25)式を得る。

$$\frac{1}{h_0} \frac{dh_0}{dM} = - \frac{(8M^4+8M^3-6M^2-4M+2)(2M^3+2M^2-2M-1)}{(M^3+2M^2-M-1)(2M^2-1)(2M^3+2M^2-2M-1)+(2M^3-2M)(2M^2-1)-(f/s)(2M^3-2M)^2} \quad (25)$$

さて, ここで(20)式により求められた解, (21)を用いて Bore の変形の計算を行なった。計算は(21)を差分化して計算を行った。計算結果を Fig—4 (a), (b), (c),

(d), (e), (f)に示す。計算は Bore の始点の相対波高 ( $H_0/h_0$ ) を0.001~5.0迄の範囲で計算した。

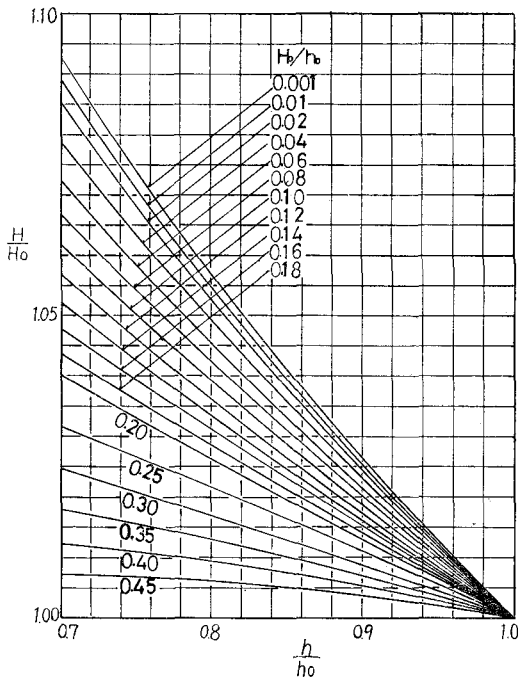


Fig 4(a) Transformation of Bore Height

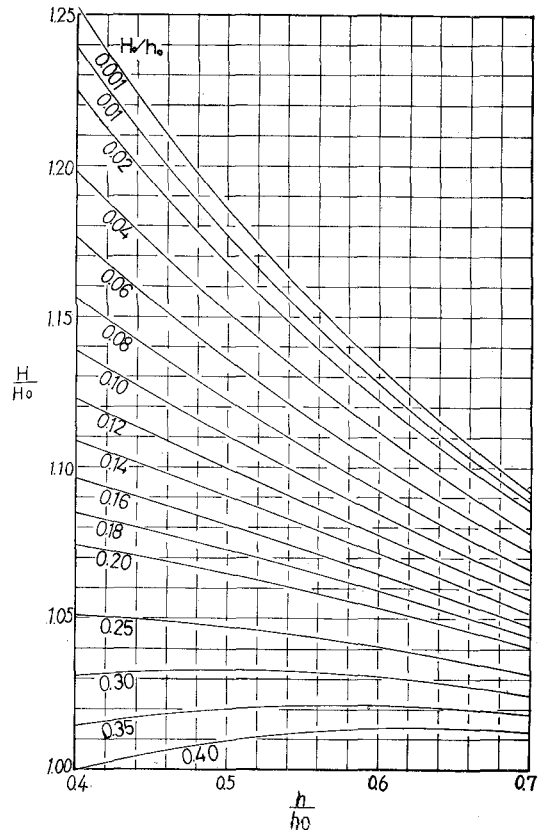


Fig 4(b) Transformation of Bore Height

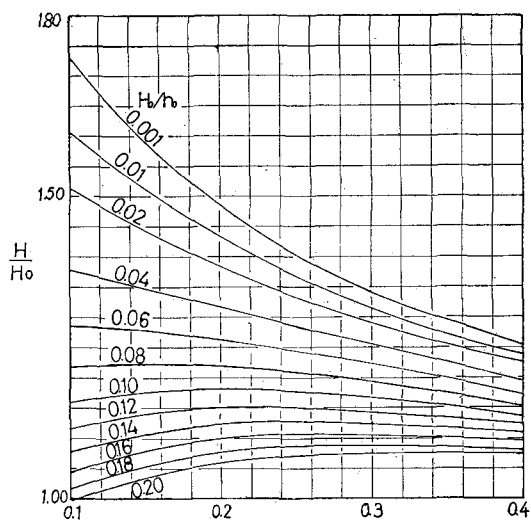


Fig 4(c) Transformation Bore Height

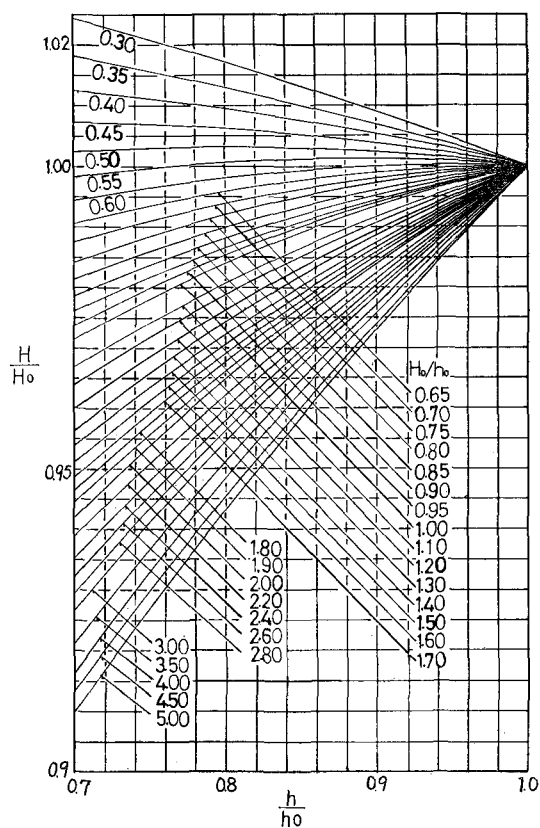


Fig 4(d) Transformation of Bore Height

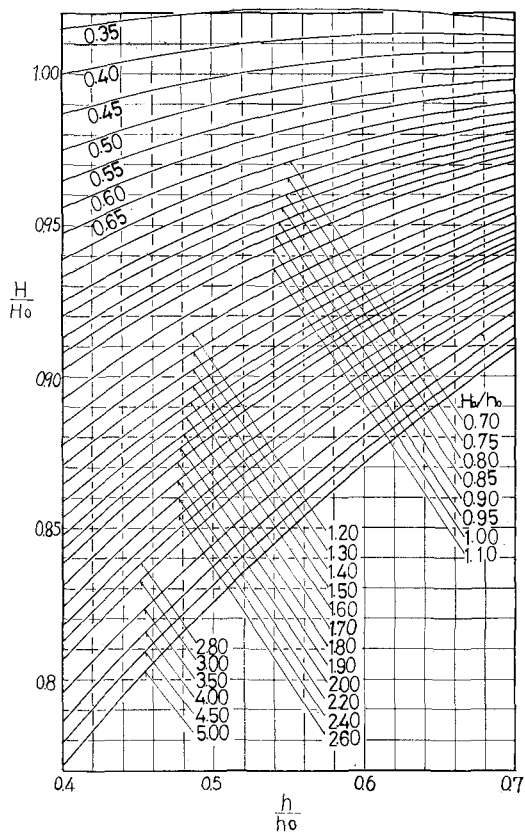


Fig 4(e) Transformation of Bore Height

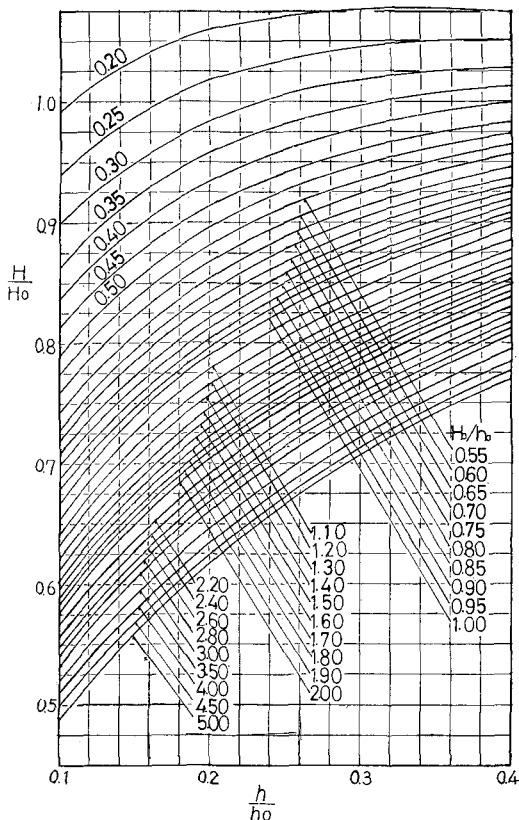


Fig 4 (f) Transformation of Bore Height

$$M = \sqrt{1 + \frac{H}{2h_0}} \quad (26)$$

となるから、(21)式より $M$ を求めれば、水深 $h_0$ を与えると、(26)式より $H$ を求める事が出来る。

ここで $1 < M < \infty$ であるが、 $M \rightarrow 1$ の時、即ち $H \ll h_0$ の時は $M - 1 = \epsilon$ を(21)式に代入して、 $\epsilon \rightarrow 0$ とくと、次式の如くなる。

$$M - 1 \propto h_0^{-5/4}, H \propto h_0^{-1/4} \quad (27)$$

これから分る様に、 $H \ll h_0$ の時は Bore の波高の変化は、Green の式と同じとなる。又逆に $M \rightarrow \infty$ となると次式の如くなる。

$$M \propto h_0^{-1/4}, H \propto h_0^{1/2} \quad (28)$$

### 5. 砕波高の波高変化の実測値

砕波後の波高変化は勾配  $S = 1/50, 1/5, 1/10, 1/50$  について実験を行なった。実験は、長さ24m、幅80cm、深さ80cmの鋼製ガラス張り水槽で行なった。片側には、真空ポンプに連結されたタンクを有している。傾斜板は、鋼製格子状フレームに厚さ5mmの塩ビ板を張ったもので、非常に滑らかである。波高は一部抵抗線式波高計で

測定したが、ほとんど16mmシネカメラで台車を走らせて、撮影して、フィルムより読みとった。結果をFig-5 (a), (b), (c), (d)に示す。図から判かる様に $(h/h_B) = 1$ が砕波点である。砕波点から、急激に波高は減少し、ある点で、その変化の割合が急に変化し、波高の減衰の仕方が急にゆるくなる。この点が、我々が、3で述べたBoreの始点となる位置である。この点では、波の front と静水面が不連続点となる点である。この事が、我々が Bore 始点と考えた理由である。Street 等の砕波後の実験結果を見ると、沖波の相対波高 $(H_0/h_0)$ に関係なく、一本の曲線で表わしているが、我々の詳細な実験から判断すると、沖波の $(H_0/h_0)$ でかなり変化の様子が変わることが分る。又、図中の曲線は、(21)式で計算した Fig-4 から求めたもので、実測値は、理論値よりかなり波高が小さくなっている。これは、勾配 $S$ が小さい程、理論値と実測値の差が大きい事から考えて、底部、側壁の摩擦の効果により、波高減衰が起っているものと思われる。よって摩擦を考慮して求められた Bore の変化の式(25)で計算するべきであろう。

又、今後は、Bore のエネルギー損失機構を明らかにすべきであろう。

### あ と が き

本研究に行なうにあたり、実験に適切なアドバイスをいただいた北大工学部酒井謙太郎氏に謝意を表するとともに、実験に協力していただいた、現東京都庁勤務、佐々木真君に感謝する次第であります。

### 参 考 文 献

- 1) Amein, M (1964); Bore Inception and propagation by the nonlinear wave theory; proc. Ninth Conf. Coastal Eng.
- 2) Amein, M (1966); A method for determining the behavior of long waves climbing a sloping beach; J. Geoph. Res. vol. 71, No.2
- 3) Camfield, F.E & Street, R.L (1969) Shoaling of solitary waves on small slopes; proc. A.S.C.E.
- 4) Freeman, J.C. & Le Méhauté, B. (1964); Wave breakers on a beach and surge on a dry bed; proc. A.S.C.E. Hy. vol. 90
- 5) Ippen, A.T. & Kulin, G. (1955); The shoaling and breaking of the solitary wave; Proc. Fifth Conf. Coastal Eng.
- 6) Kaplan, K (1955); Generalized laboratory study of tsunami run-up; Tech. Memo. No. 60, B.E.B

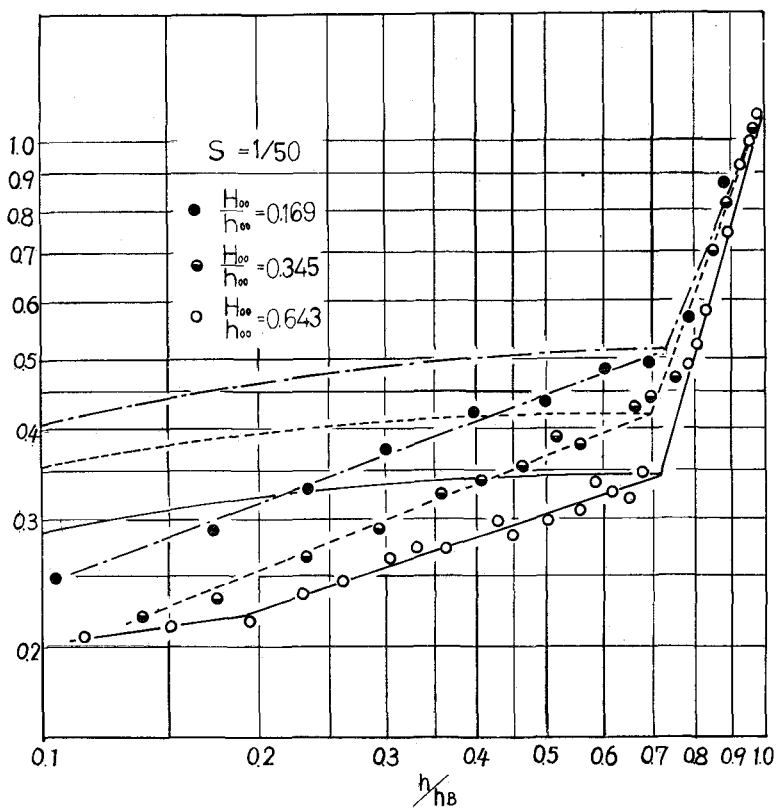


Fig 5(a) Relation between  $(H/h_B)$  and  $(h/h_B)$  after Breaking

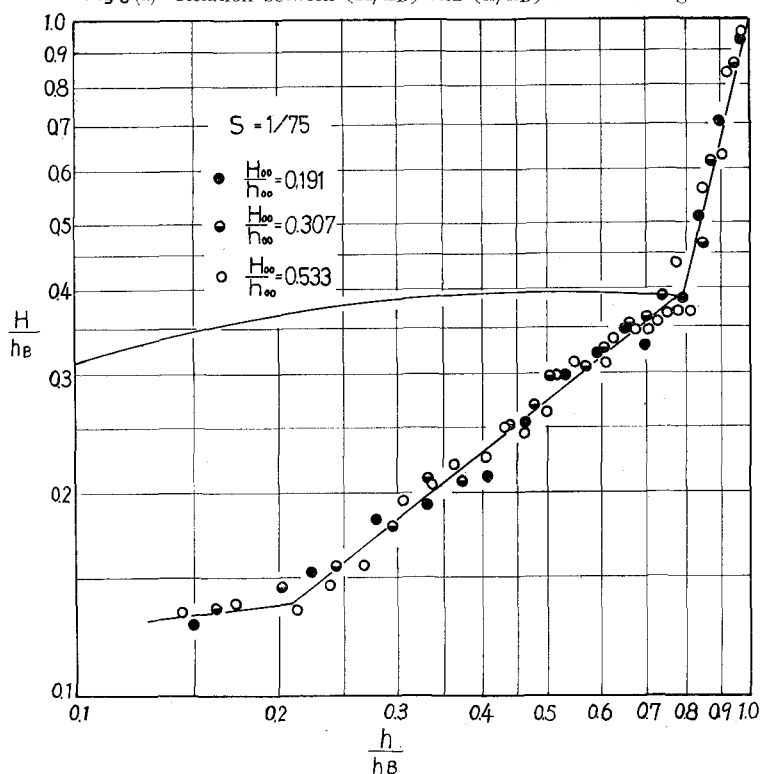


Fig 5(b) Relation between  $(H/h_B)$  and  $(h/h_B)$  after Breaking

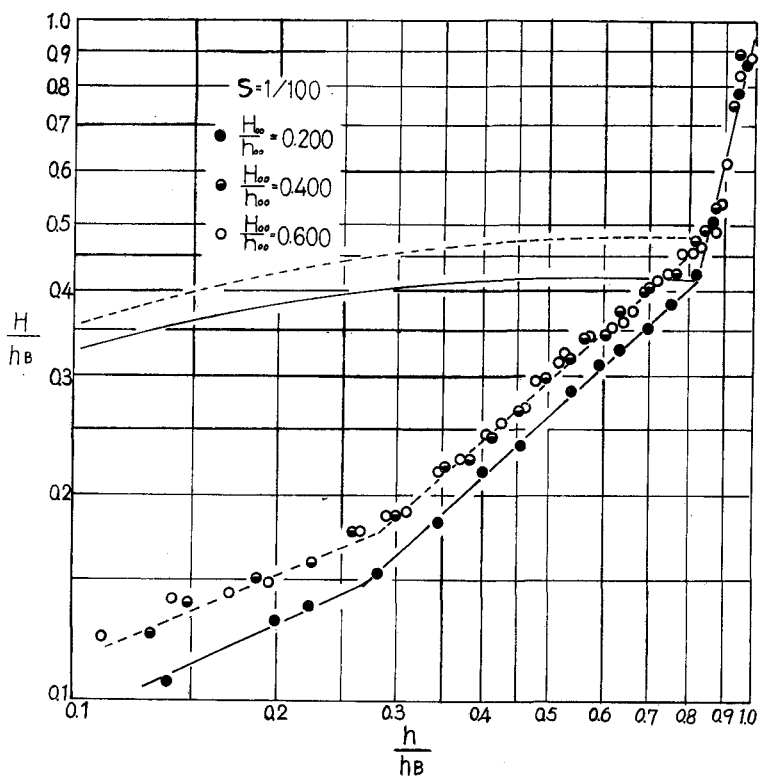


Fig 5(c) Relation between  $(H/h_B)$  and  $(h/h_B)$  after Breaking

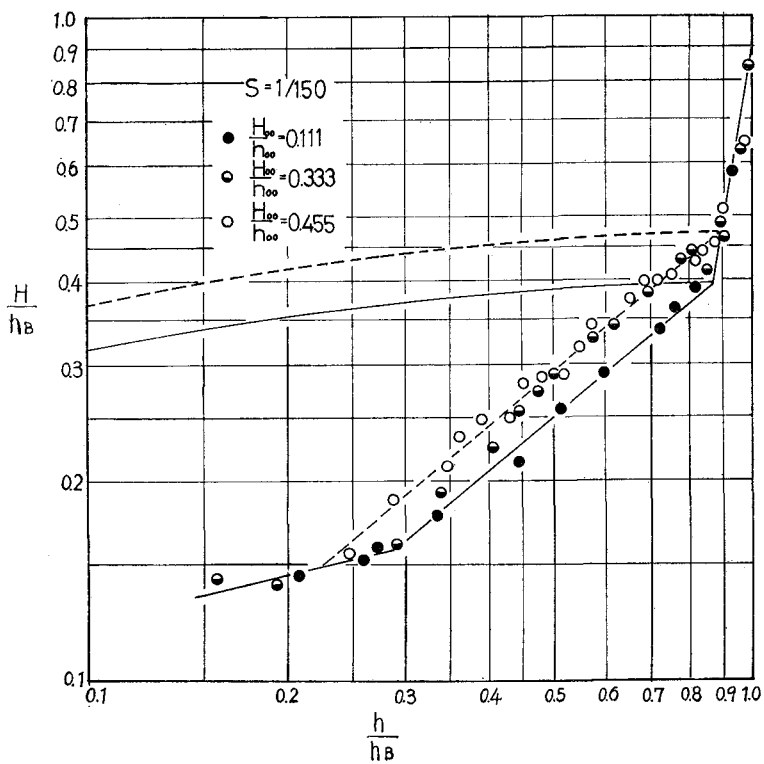


Fig 5(d) Relation between  $(H/h_B)$  and  $(h/h_B)$  after Breaking

- 7) Whitham, G.B. (1958) ; On the propagation of shock waves through regions of non-uniform area of flow ; J.F.M. vol. 4
- 8) Keller, H.B, Levine, D.A. and whitham, G.B. (1960) ; Motion of a bore on a sloping beach ; J.F.M. vol. 7
- 9) Kishi, T (1962) ; Transformation, breaking and run-up of a long wave of a finite height ; proc. Eighth. Cont. Coastal Eng.
- 10) Kishi, T & Saeki,H (1966) ; The shoaling, breaking and run-up of the solitary wave on impermeable slope ; proc. Tenth Conf. Coastal Eng.
- 11) 岸, 佐伯, 加藤 (1966) : 一様勾配斜面上における孤立波の変形, 砕波および Run-up. 第21回年次学術講演会
- 12) Pergrine, D.H (1967) ; Long waves on a beach ; J.F.M. vol. 27, Part 4.
- 13) Street, R.L & Camfield, F.E (1966) ; Observations and experiments on solitary wave deformation ; Proc. Tenth. Conf. Coastal Eng.
- 14) 佐々木忍 (1959), 三陸沿岸の津波対策について 第6回海岸工学講演会講演集