

水文学の一手法としての周波数特性のベクトル表示 (そのⅢ)

正 員 藤 田 睦 博*

概 要

前報^{1),2)}において天塩川流域の各地点において降雨流出の周波数伝達関数のベクトル表示(ナイキスト図)を求めた。又それらナイキスト図は、各地点毎に特有のパターンを示し流域の動特性と対応していることを認めた。

本報告においては、前報で取扱いが不充分であった周波数伝達関数の数値計算上の問題点及び求められたナイキスト図から流出モデルを求める手法について検討する。

1. 基本式

降雨流出系は、ゼロ初期条件、線形性、不変性、因果性の一連の仮定を満足しているものとする。降雨量を $i(t)$ 、直接流出量を $O(t)$ とすると常に(1.1)が成立する。

$$O(t) = \int_0^t i(\tau) h(t-\tau) d\tau \quad (1.1)$$

$h(t)$: 系の impulse response

(1.1)式の両辺を Fourier 変換すると

$$O(\omega) = I(\omega) \cdot H(\omega) \quad (1.2)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} O(\omega) &= \int_0^\infty O(t) e^{-j\omega t} dt \\ I(\omega) &= \int_0^\infty i(t) e^{-j\omega t} dt \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

j : 虚数単位

(1.2)式より

$$H(\omega) = \frac{O(\omega)}{I(\omega)} \quad (1.4)$$

$H(\omega)$ はシステム関数と呼ばれ、 $H(\omega)$ は一般に複素数でその実数部、虚数部を表わす式は容易に誘導できる。

(前報参照)

一方 $H(\omega)$ は物理系のシステム関数であることを考慮すると因果関数の条件を満足しなければならない。すなわち

$$h(t) = 0 \quad t < 0 \quad (1.5)$$

$H(\omega)$ が因果関数の Fourier 積分である必要十分条件式

は、いわゆる Play-Wiener の条件を考えねばならないが、ここでは $H(\omega)$ が(1.4)式で表わされているので、次のような条件を考える。

$$H(\omega) = A(\omega) e^{-j\theta(\omega)} \quad (1.6)$$

とおくと条件式は

$$\int_0^\infty A^2(\omega) d\omega < \infty \quad (1.7)$$

Parseval の等式より次式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty |f(t)|^2 dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty A^2(\omega) d\omega \\ F(\omega) &= \int_{-\infty}^\infty f(t) e^{-j\omega t} dt = A(\omega) e^{-j\theta(\omega)} \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

降雨量、直接流出量は正值時間制限信号と考えられるので

$$\int_{-\infty}^\infty A^2(\omega) d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^\infty |f(t)|^2 dt < \infty \quad (1.9)$$

かつ、 $I(\omega)$ は $O(\omega)$ に比較し広いスペクトルを有しているので、(1.7)式は成立しており

$$\operatorname{Re}[H(\omega)] \leq 1 \quad (1.10)$$

となる。

$h(t)$ が因果関数であることを考慮すると

$$h(t) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re}[H(\omega)] e^{-j\omega t} d\omega \quad (1.11)$$

と表わされ、Impulse response は $H(\omega)$ の実数部のみが既知であれば求めることができるが、システムの内部状態を検討するには、 $H(\omega)$ の虚数部をも考慮すると非常に便利である。すなわちナイキスト図、ゲインと位相を表わすボード線図は重要な情報を与える。

2. 数値計算法³⁾

Fourier 変換の数値計算法には、Fourier 級数展開による方法、多項式展開による方法等があるが、ここでは高周波成分の多い $i(t)$ と $h(t)$ の因果性を考慮して次のような数値計算法を採用した。降雨量 $i(t)$ は fig. 2.1(a) に示されるように Δt ごとの平均値の矩形 pulse 列として与えられるので

$$I(\omega) \simeq \frac{1}{j\omega} \sum K_i e^{-j\omega t_i} \quad (2.1)$$

* 北海道大学工学部 助教授 工修

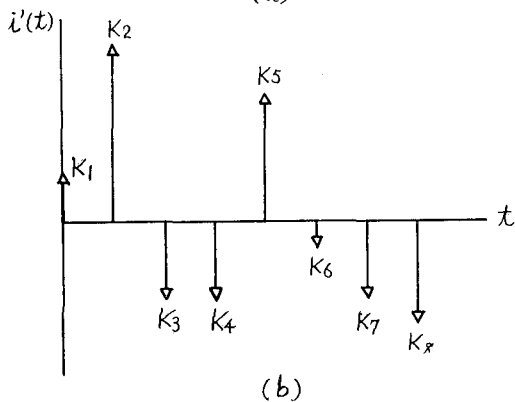
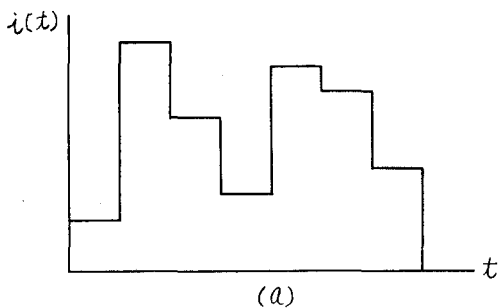


Fig. 2.1

一方流出量 $O(t)$ も Δt ごとの平均値ではあるが、 $i(t)$ に比較して非常にめらかなので折線近似法をとった。したがって $O(\omega)$ は

$$O(\omega) \simeq -\frac{1}{\omega^2} \sum K_i' e^{-j\omega t_i'} \quad (2.2)$$

(1.4) 式より

$$H(\omega) = \frac{O(\omega)}{I(\omega)} = -\frac{1}{j\omega} \cdot \frac{\sum K_i e^{-j\omega t_i}}{\sum K_i e^{-j\omega t_i}} \quad (2.3)$$

(2.3)式より $\lim_{\omega \rightarrow \infty} H(\omega) = 0$ となり、 $H(\omega)$ は有限のエネルギーを有していることと等価なので、 $h(t)$ の因果性の条件は成立している。

3. 観測誤差の検討

(1.4)式で $H(\omega)$ を計算する場合、入出力間の相関関数を求めることができる時には、入出力間の無相関な雑音が消去できる。しかしながらここで対象としている降雨流出系では、入出力の観測時間がデータのサンプリング時間に比較して短く又入出力間の直流成分が極めて強い場合で、相互相関関数の計算上の誤差に消去できるはずの雑音が埋没してしまう。したがって(2.3)式で示さ

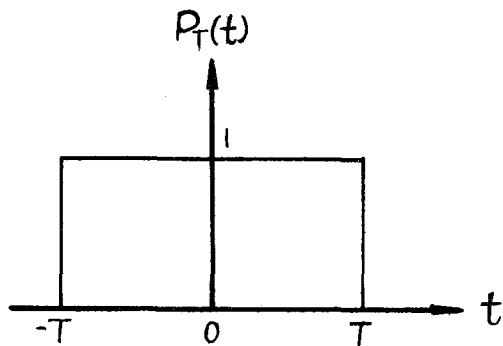


Fig. 3.1

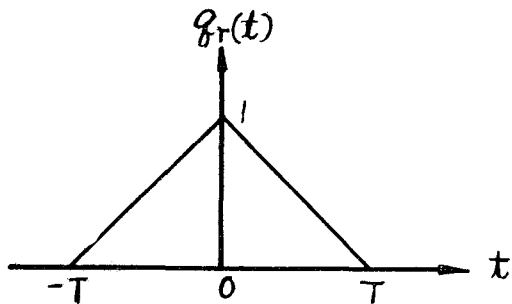


Fig. 3.2

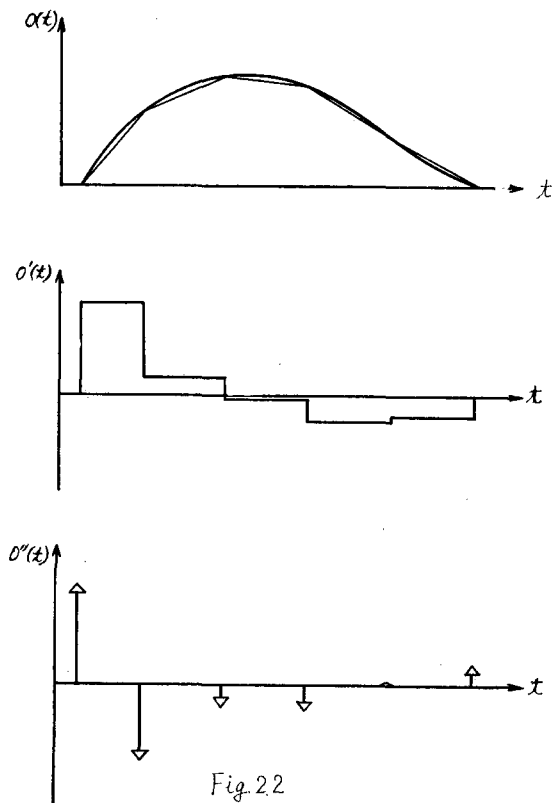


Fig. 2.2

れる $H(\omega)$ には、数値計算上の誤差のほかに入出力間の無相関な雑音が含まれている。

ここでは、簡単なモデルによってこれら観測誤差が周波数領域でどのような形を示すか検討する。システム関数 $H(\omega)$ を計算する際 $i(t)$, $o(t)$ はそれぞれ矩形 pluse 列、折線で近似したので $i(t)$, $o(t)$ の誤差を fig. 3.1, fig. 3.2 に示すような矩形 pulse, 三角 pulse と考える。

$$Pr(t)=U(t+T)-U(t-T)=\begin{cases} 0 & |t|>T \\ 1 & |t|\leq T \end{cases} \tag{3.1}$$

$$qr(t)=\begin{cases} 1-\frac{|t|}{T} & |t|\leq T \\ 0 & |t|>T \end{cases} \tag{3.2}$$

$Pr(t)$, $qr(t)$ の Fourier 積分を $Fp(\omega)$, $Fq(\omega)$ で示すと

$$Fp(\omega)=\frac{2\sin\omega T}{\omega} \tag{3.3}$$

$$Fq(\omega)=\frac{4\sin^2\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{T\omega^2} \tag{3.4}$$

$Pr(t)$, $qr(t)$ を任意の時間 t_0 ($t_0>0$) 移動した $Rr(t-t_0)$, $qr(t-t_0)$ に対する Fourier 積分は

$$F_{Pr(t_0)}(\omega)=\frac{2\sin\omega T}{\omega}e^{-jt_0\omega} \tag{3.5}$$

$$F_{qr(t_0)}(\omega)=\frac{4\sin^2\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{T\omega^2}e^{-jt_0\omega} \tag{3.6}$$

(3.5), (3.6)式の T , t_0 を Table 3.1 のように定め、 $F_{Pr(t_0)}(\omega)$, $F_{qr(t_0)}(\omega)$ の計算結果を fig. 3.3, fig. 3.4 に示す。

Table 3.1

	矩 形 Pulse		三 角 Pluse	
	T	t_0	T	t_0
case 1	1.0hr	5hr	1.0hr	5hr
case 2	1.0	10	1.0	10
case 3	1.0	20	1.0	20

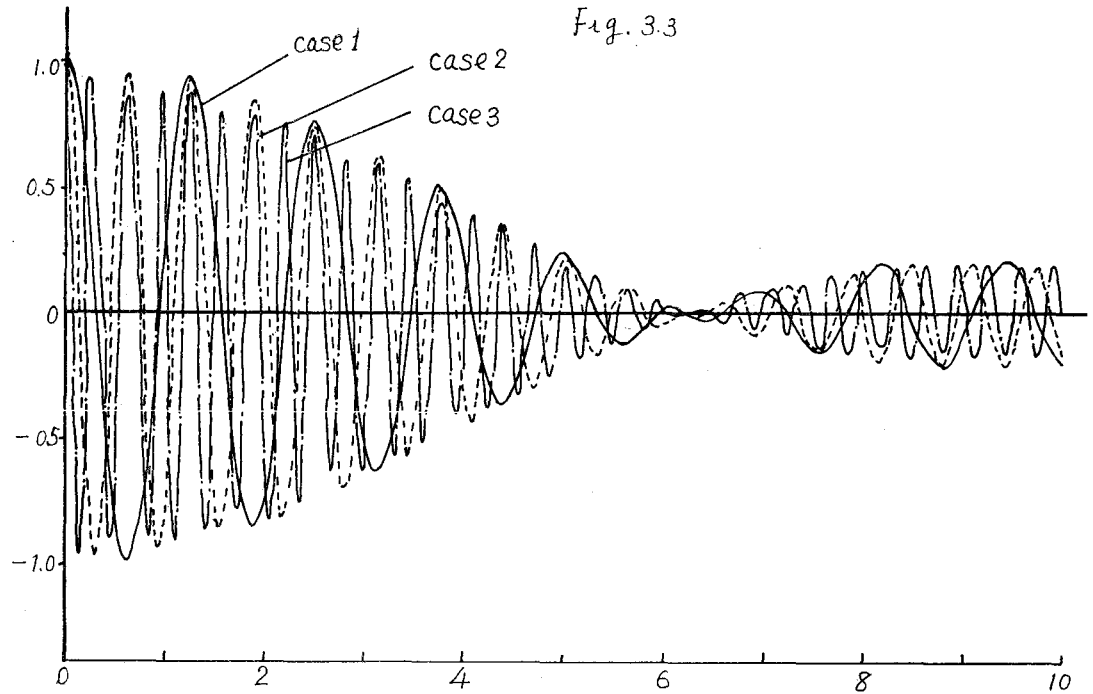
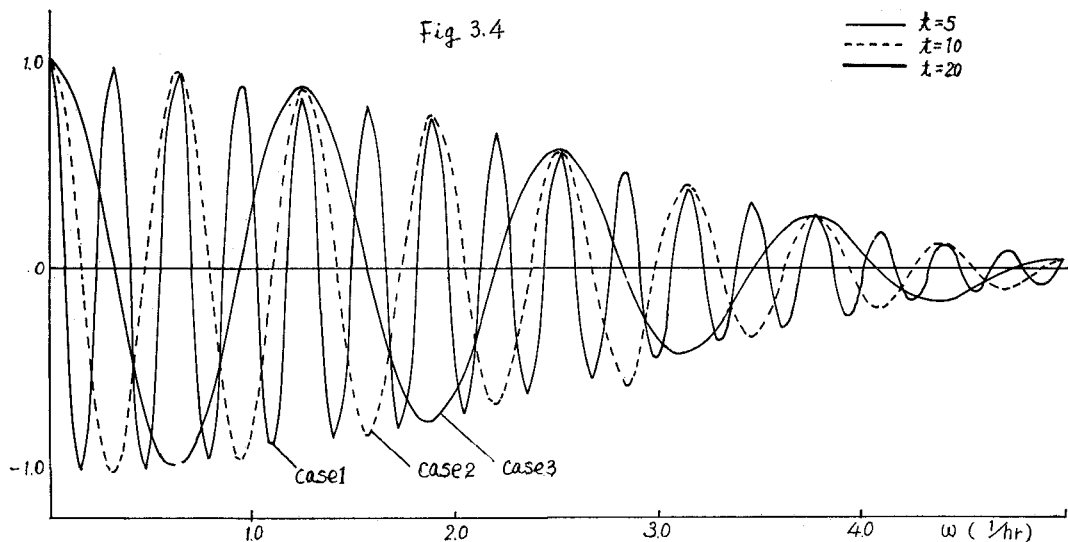
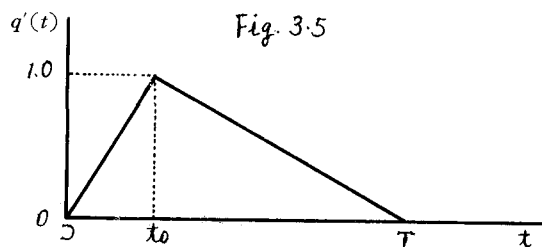


Fig. 3.3



これら計算結果から継続時間の短い信号は極めて広いスペクトルを有していることがわかる。したがってこれら雑音の影響は高周波領域で強く表われる。

次に出力である直接流出の分離法の影響について考察する。種々の分離法があるが、それらの差は全体の流出量に比較して非常に小さい。しかしながら周波数領域でどの部分にその影響が表われるかということは、重要な意味をもっている。基底流の各分離手法間の差は, fig. 3.5 で示される三角形で近似される。



$q'(t)$ の Fourier 積分は

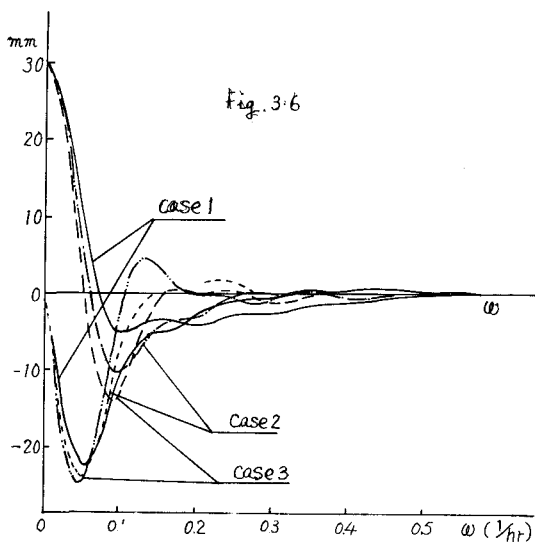
$$q'(\omega) = \left(\frac{1}{t_0} + \frac{1}{T-t_0} \right) \frac{\cos t_0 \omega}{\omega^2} - \frac{1}{T-t_0} \cdot \frac{\cos T \omega}{\omega^2} - \frac{1}{t_0 \omega^2} + j \left\{ \left(\frac{1}{t_0} + \frac{1}{T-t_0} \right) \frac{\sin t_0 \omega}{\omega^2} - \frac{1}{T-t_0} \cdot \frac{\sin T \omega}{\omega^2} \right\} \quad (3.7)$$

で与えられる。Table 3.1 に実際の洪水例を参考として決めた $q'(t)$ の定数値を示す。これら定数値を用いて計算した $q'(\omega)$ を fig. 3.6 に示す。

Table 3.1

	t_0	T
case 1	5 hr	60 hr
case 2	10	60
case 3	20	60

この場合には、継続時間が非常に長い信号で、スペクトルの減衰が非常に速く低周波領域で影響を与えることがわかる。



4. 天塩川流域における解析例

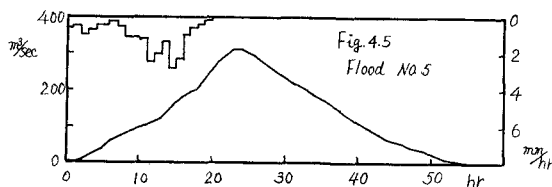
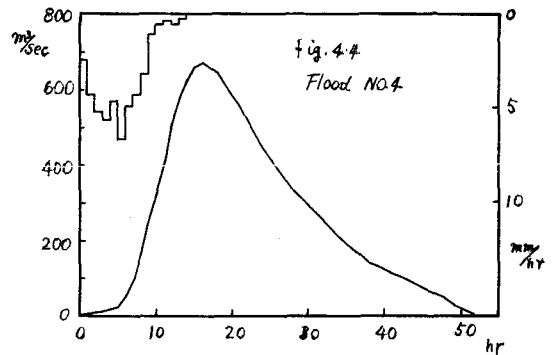
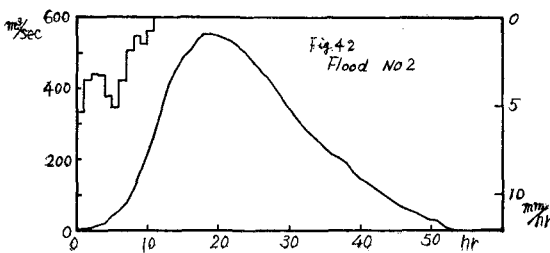
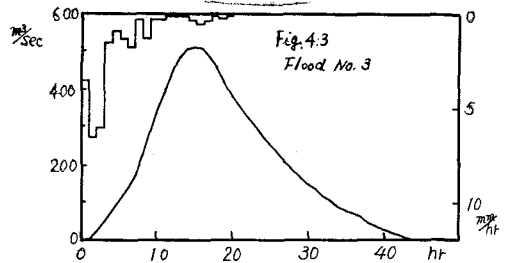
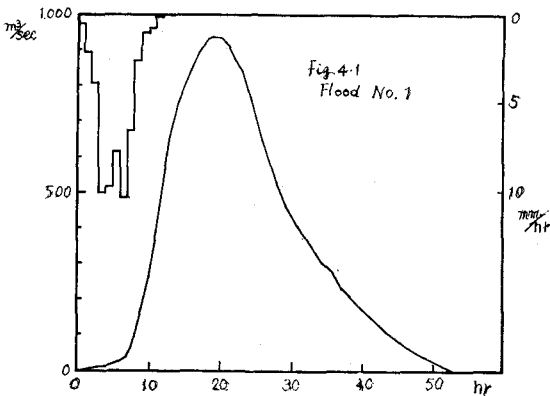
ここでは、天塩川上流部美深地点における5例洪水について検討してみる。fig. 4.1～fig. 4.5に用いた雨量と直接流出量を示す。

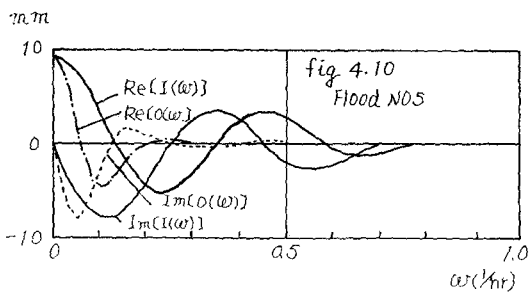
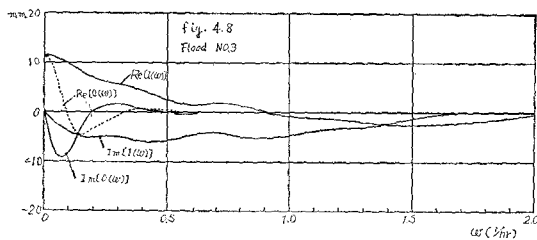
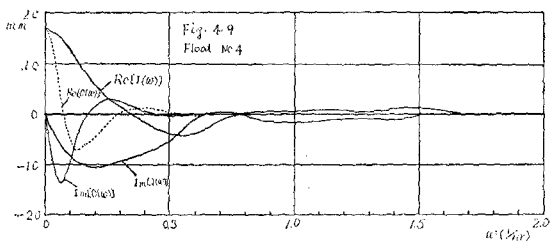
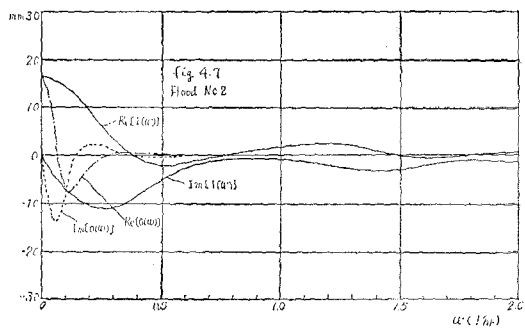
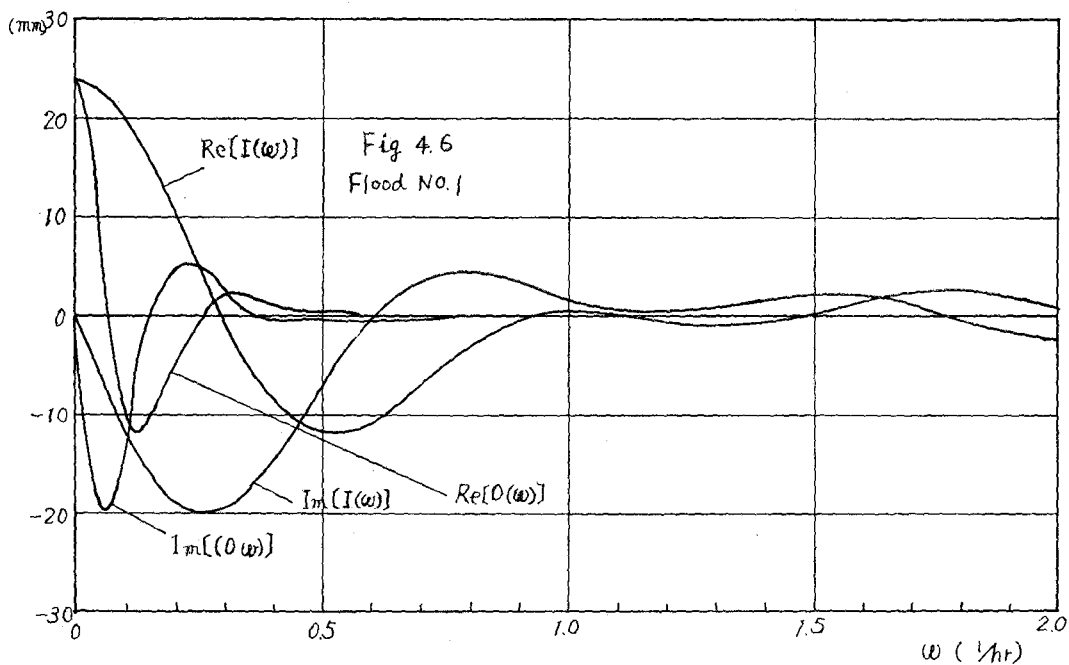
又 fig. 4.6～fig. 4.7に $i(t)$, $o(t)$ を Fourier 積分した結果を示す。図に示されているように降雨は、流出量に比較してはるかに広いスペクトルをもち、流域が低域フィルターの役目を果していることが明らかである。

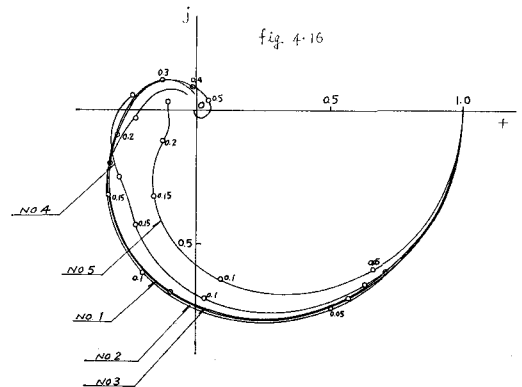
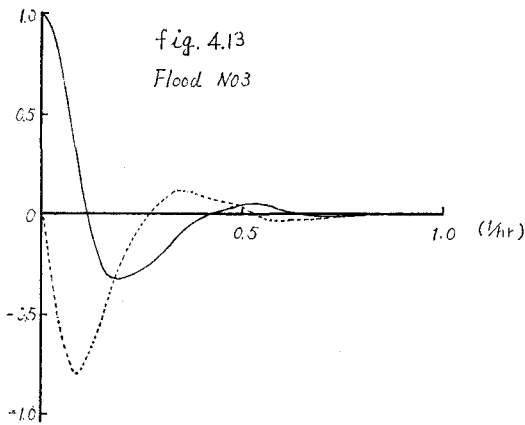
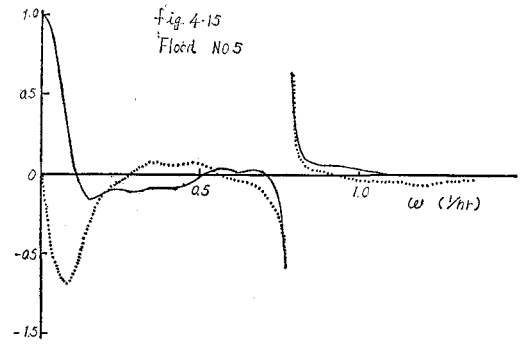
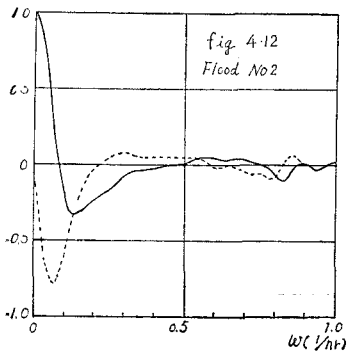
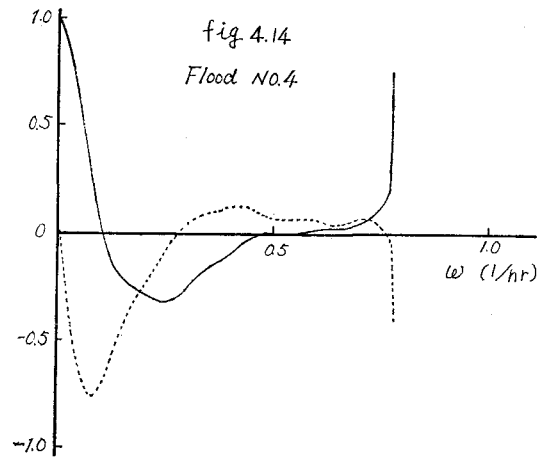
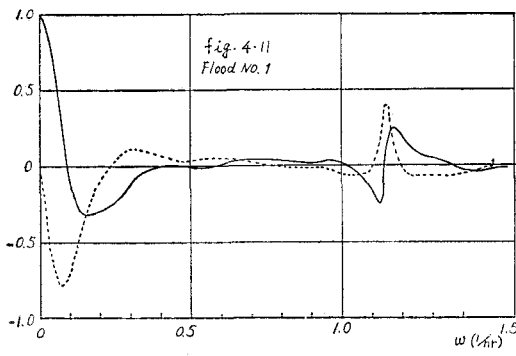
fig. 4.11～fig. 4.15にシステム関数 $H(\omega)$ を示す。実線は、実数部、破線は虚数部を表わす。Flood No. 1, 4, 5において途中で鋭いピークを示しているが、この原因として次のようなことが考えられる。すなわち $H(\omega)$ は (1.4)式で示されるように、 $i(t)$, $o(t)$ の Fourier 積分の比の形で表わされるので、誤差が拡大されて途中でビ

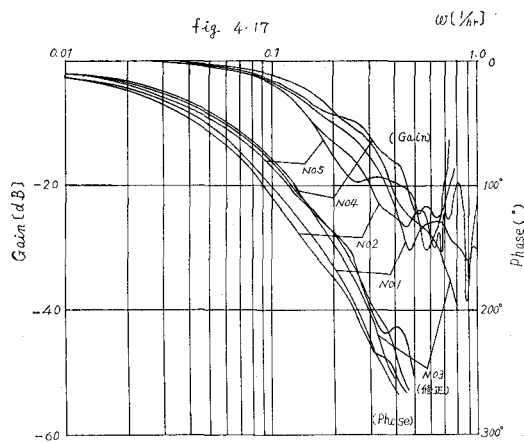
ークを示すものと思われる。

以上の結果をまとめて $H(\omega)$ をナイキスト図に表示したのが、fig. 4.16である。極めて線型性の強い流域であることが明示されているが、No. 5の洪水だけが他の洪水群に比較して性格を異にしているようである。fig. 4.5からもわかるように、No. 5は小さな洪水で、低周波領域における基底流の分離法による誤差は他の洪水よりも強く表われている。更に厳密に各洪水を比較するため、ボード線図を作成し、fig. 4.17にそれを示す。これによると、No. 5の洪水は、Gainでは他の洪水より大きい値をとっているが、phaseは、No. 3, No. 4の洪水とほとんど同じであることがわかる。このことは、出力に正の一定値を加えてやれば他の洪水とほとんど同じ特性を有することになり、実際的には基底流の分離に工夫してやればよいことになる。









5. む す び

降雨流出系のように正值時間制限関数で示される信号は、Fourier 積分の数値計算は容易である。かつ積分の形の計算なので計算は安定で、各種誤差の影響も少ない。しかしながら $H(\omega)$ を求める際に比の形となるために、雑音の影響が強く表われる場合がある。したがって実用的な問題として impulse 応答を求める場合、いかなる周波数でカットするかということが、重要な問題となる。このことについて簡単に吟味してみる。

短い時間の信号は、広いスペクトルをもち、長い時間の信号はスペクトルが急速に減衰してしまう。信号の継続時間と Fourier 変換の継続幅の関係を示す尺度があればいいのだが、ここでは最も簡単な尺度として、fig. 5.1 に示されるような信号の立上り時間 D_t をとる。

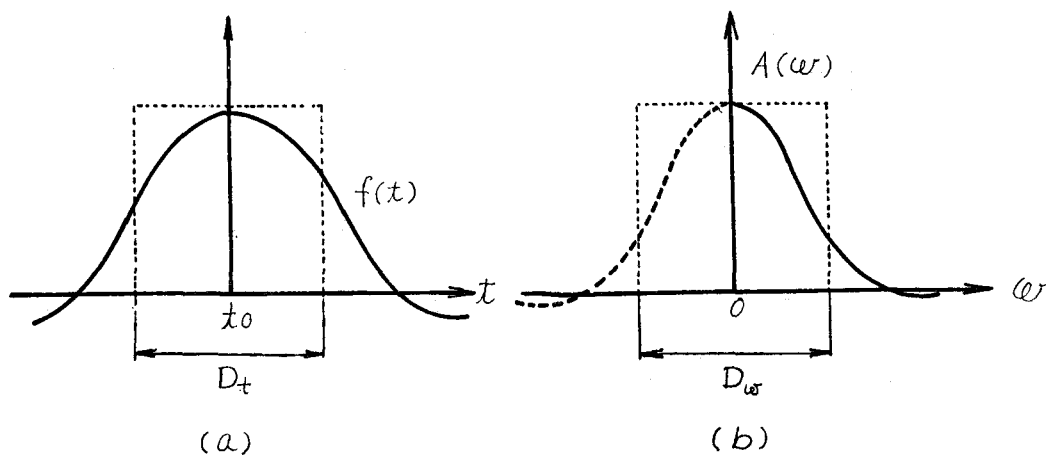


fig 5.1

$$D_t = \frac{1}{f_{max}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \quad (5.1)$$

$$D_\omega = \frac{1}{A_{max}} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) d\omega \quad (5.2)$$

ただし

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (5.3)$$

$f(t)$ が正值時間制限信号の場合には、常に次式が成立している。

$$A(0) \geq A(\omega) \quad (5.4)$$

したがって(5.2)式の右辺の A_{max} は $A(0)$ となる。 $A(0)$ は

$$A(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \quad (5.5)$$

である。一方 D_t と D_ω の関係式は

$$D_t \cdot D_\omega = 2\pi \quad (5.6)$$

である。前述の美深の5洪水例について降雨と流出量の D_t D_ω を求めた結果を Table 5.1 に示す。

Table 5.1

洪水番号	D_{it} hr	$D_{i\omega}$ 1/hr	D_{ot} hr	$D_{o\omega}$ 1/hr
1	5.347	1.175	20.207	0.311
2	6.317	0.995	23.884	0.263
3	3.895	1.613	18.207	0.345
4	7.237	0.868	20.175	0.311
5	7.112	0.884	23.849	0.263

添字 i , o は、降雨及び流出量を意味する。降雨と流出量のスペクトルの継続幅は、前者が後者の2～3倍の範

囲をとることがわかる。システム関数 $H(\omega)$ は、(1.4) 式で示されるので、 $O(\omega)$ に規制される。したがって $O(\omega)$ の継続幅の平均値は $D_{0\omega}$ と考えてよく、洪水例毎に多少のバラツキがあるが、ほぼ $D_{0\omega} \approx 0.3$ 1/hr 程度と推定される。この値は信号の継続時間の定差により、多少変化するが、大きく見積って $D_{0\omega} \approx 0.5$ 1/hr 程度であり、 $\omega \geq 0.5$ 1/hr の範囲の $H(\omega)$ はカットしてもよいことになる。したがって計算例の $H(\omega)$ で途中ピークをなしている周波領域は、カットされる。

最後に終始御指導いただいた山岡教授に感謝します。
なお本研究は、文部省特定研究費（災害科学）による研

究の一部であることを付記する。

参 考 文 献

- 1) 藤田陸博：水文字の一手法としての周波数特性のベクトル表示(I)，土木学会北海道支部研究発表論文集，1969. 2.
- 2) 藤田陸博：水文字の一手法としての周波数特性のベクトル表示(II)，1970. 2.
- 3) Athanasios Papoulis : The Fourier Integral and ITS Application, McGraw-Hill Book company.