

トポロジカル一致を有するトラス間の関係 について

正 員 能 町 純 雄*

正 員 松 岡 健 一**

学生員 ○佐 藤 隆***

1. ま え が き

構造物間のトポロジーについて、ここでは、位相間の不変量を

1. 格点数
2. 対応格点の自由度
3. 格点の相対的位置

の3つに限定し、格点間の距離の概念を除く。

このトポロジーが一致する2つの構造物間において、一方の構造物で実際の解析演算を行ない、もう一方の構造物で各格点における力のつりあいの Remainder を check しながら、一方の構造物を解析することが可能かどうかを考察したものである。

この解析方法が可能であるならば、規則性が著しく乏しい構造物の解析において、その構造物とトポロジカル一致を有する規則性に富む構造物を考え、これと対応させながら、解析することができる。

規則性のある構造物の解析は、構造物のトポロジカル一致内での任意性と規則性から Fourier 定和分変換を用いることができ、スチフネスマトリックスの元数を大幅に減少させることが可能で、それにより、後述の様に、スチフネスマトリックスの逆マトリックスを解くことが容易になる。このことが、この解析法を可能ならしめる1つの大きな要素であり、また一方、解析の対象となる構造物のスチフネスマトリックスの逆マトリックスを直接求めることは、不要であるため、スチフネスマトリックスを用いず任意点での力のつり合い式のみを求めておくだけで良いという利点もある。

この解析方法は、解析の対象となる構造物とトポロジカル一致する構造物を考えなければならないという制約だけであるから、構造解析において、応用面が広く、自

由度の高い解析方法となると思う。

尚、この論文では、曲弦ワーレントラスを、平行弦ワーレントラスに対応させ、数値計算を行なった。

2. 解析方法

この解析法の大きな利点は Fourier 変換または Fourier 定和分変換をほどこすことのできる、しかも解析する構造物とトポロジカル一致を有する構造物を考え、そのスチフネスマトリックスの元数を減少させる点にある。

解析の対象となる構造物をⅡ、それとトポロジカル一致を有する構造物をⅠの構造物とし、それぞれのスチフネスマトリックスを $[B_2]$, $[B_1]$, 変位ベクトルを $[U_2]$, $[U_1]$ とし、荷重ベクトルを $[P]$ とするとⅠにおいて

$$[B_1][U_1] = [P] \quad (1)$$

同様、Ⅱにおいて、

$$[B_2][U_2] = [P] \quad (2)$$

であり、

$$[B_2] = [B_1] + [B']$$

と書けるから、(1), (2) 式に $[B_1]^{-1}$ を左から作用させて、

$$[U_1] = [B_1]^{-1}[P] \quad (1')$$

$$[U_2] + [B_1]^{-1}[B'] [U_2] = [B_1]^{-1}[P] \quad (2')$$

ここで、 $[C] = [B_1]^{-1}[B']$

と置くと (2') 式は

$$[U_2] + [C][U_2] = [U_1]$$

となり、繰返し法により $[U_2]$ は

$$\begin{aligned} [U_2] = & [U_1] - [C][U_1] + [C]^2[U_1] \\ & - \dots - [C]^r[U_2] \end{aligned} \quad (3)$$

となり、この級数が収斂すると解が求まることになる。

即ち、(2) 式の $[U_2]$ に $[U_1]$ を代入すると、

* 室蘭工業大学 教授 工博

** 室蘭工業大学 助教授 工修

*** 室蘭工業大学大学院

$$\begin{aligned} [B_2][U_1] &= [B_1][U_1] + [B'][U_1] \\ &= [P] + [B'][U_1] \end{aligned} \quad (4)$$

(4)式の右辺の第2項 $[B'][U_1]$ が Remainder で、この Remainder を I の構造物に作用させて、変位 $[U_1]$ を求めます、

$$[B_1][U_1] = [B'][U_1]$$

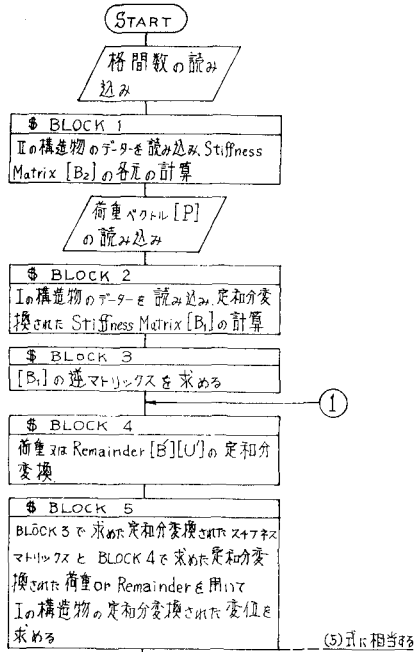
$[B_1]^{-1}$ を、両辺の左から作用させ

$$\begin{aligned} [U_1] &= [B_1]^{-1}[B'][U_1] \\ &= [C][U_1] \end{aligned} \quad (5)$$

となり、これが(3)式の第2項に相当する。

以上を繰返すことは、I の構造物を解き、その変位を II の構造物に代入し、つり合いの計算をして Remainder 外力を求め、これを I の構造物に作用させて、逐次(3)の各項を計算することを意味する。

PROCESS FLOW CHART

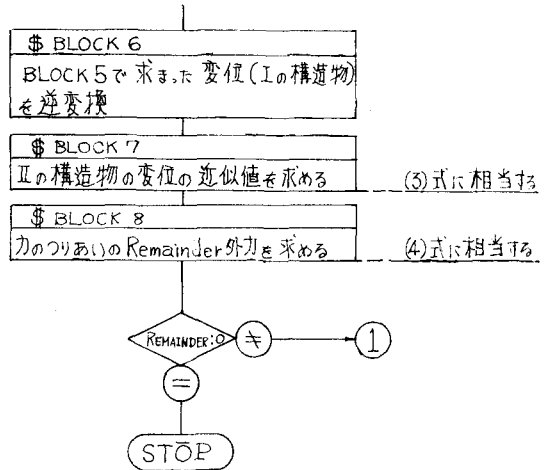


図—1 (1)

3. 数値計算

平行弦ワーレントラスは、Fourier 定和分変換をほどこし、スチフネスマトリックスを 4×4 元に落して、計算を行なう。

Fourier 定和分変換公式は
Symbolic Notation



図—1 (2)(続)

$$S_i[f(x)] = \sum_{x=1}^{n-1} f(x) \sin \frac{\pi i x}{n}$$

$$C_i[f(x)] = \sum_{x=1}^{n-1} f(x) \cos \frac{\pi i x}{n}$$

$$H S_i \left[f \left(x + \frac{1}{2} \right) \right] = \sum_{x=0}^{n-1} f \left(x + \frac{1}{2} \right) \sin \frac{\pi i}{n} \left(x + \frac{1}{2} \right)$$

$$H C_i \left[f \left(x + \frac{1}{2} \right) \right] = \sum_{x=0}^{n-1} f \left(x + \frac{1}{2} \right) \cos \frac{\pi i}{n} \left(x + \frac{1}{2} \right)$$

を導入すると、逆変換公式は

$$f(x) = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n-1} S_i[f(x)] \sin \frac{\pi i x}{n} \quad (0 < x < n)$$

$$f(x) = \sum_{i=0}^n R_i \cos \frac{\pi i x}{n} \quad (0 \leq x \leq n)$$

ただし

$$R_0 = \frac{1}{n} \left\{ C_0[f(x)] + \frac{f(0)}{2} + \frac{f(n)}{2} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 R_i &= \frac{2}{n} \left\{ C_i[f(x)] + \frac{f(0)}{2} + (-1)^i \frac{f(n)}{2} \right\} \\
 R_n &= \frac{1}{n} \left\{ C_n[f(x)] + \frac{f(0)}{2} + (-1)^n \frac{f(n)}{2} \right\} \\
 f\left(x + \frac{1}{2}\right) &= \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n-1} HS_i \left[f\left(x + \frac{1}{2}\right) \right] \sin \frac{\pi i}{n} \left(x + \frac{1}{2}\right) \\
 &\quad + \frac{1}{n} HS_n \left[f\left(x + \frac{1}{2}\right) \right] (-1)^x \\
 f\left(x + \frac{1}{2}\right) &= \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n-1} HC_i \left[f\left(x + \frac{1}{2}\right) \right] \cos \frac{\pi i}{n} \left(x + \frac{1}{2}\right) \\
 &\quad + \frac{1}{n} HC_0 \left[f\left(x + \frac{1}{2}\right) \right]
 \end{aligned}$$

Hook's law と格点 r , $r + \frac{1}{2}$ での水平力, 鉛直力のつり合いから, 格点力と変位の差分方程式ができ, それに格点 r については, 水平

方向のつり合い式に cosine 変換を, 鉛直方向に sine 変換を, また, 格点 $r + \frac{1}{2}$ においては, 水平方向のつり合い式に half cosine 変換を, 鉛直方向に half sine 変換をほどこすと, 次の 4×4 元の対称マトリックス方程式が, なりたち, これは2.(1)式に相当するものです。

$$\begin{pmatrix}
 \frac{EA_u}{l} \cdot D_i + 2 \frac{EA_d}{d} \cdot \cos^2 \alpha & 0 & -\frac{2EA_d}{d} \cdot \cos^2 \alpha \cdot \cos \frac{\pi i}{2n} & 2 \frac{EA_d}{d} \cdot \cos \alpha \cdot \\
 2 \frac{EA_d}{d} \cdot \sin^2 \alpha & -\frac{2EA_d}{d} \sin \alpha \cos \alpha \cdot \sin \frac{\pi i}{2n} & -2 \frac{EA_d}{d} \cdot \\
 \frac{EA_u}{l} \cdot D_i + 2 \frac{EA_d}{d} \cdot \cos^2 \alpha & 0 & \\
 2 \frac{EA_d}{d} \sin^2 \alpha & \swarrow
 \end{pmatrix} \text{Symmetry}$$

$$\begin{pmatrix}
 \sin \alpha \cdot \sin \frac{\pi i}{2n} \\
 \sin^2 \alpha \cdot \cos \frac{\pi i}{2n}
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 \bar{u}_i \\
 \bar{v}_i \\
 \bar{u}_i \\
 \bar{v}_i
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 \bar{H}_i + H_0 + (-1)^i H_n \\
 \bar{P}_i \\
 \bar{H}_i \\
 \bar{P}_i
 \end{pmatrix}$$

ここで, n は格間数

$$\bar{u}_i = C_i[u_r] + \frac{u_0}{2} + \frac{u_n}{2} (-1)^i \quad \bar{v}_i = S_i[v_r]$$

$$\bar{u}_i = HC_i[u_{r+\frac{1}{2}}] \quad \bar{v}_i = HS_i[v_{r+\frac{1}{2}}]$$

$$\bar{H}_i = \sum_{r=1}^{n-1} H_r \cos \frac{\pi i r}{n} \quad \bar{P}_i = \sum_{r=1}^{n-1} P_r \sin \frac{\pi i r}{n}$$

$$\bar{H}_i = \sum_{r=0}^{n-1} H_{r+\frac{1}{2}} \cos \frac{\pi i}{n} \left(r + \frac{1}{2}\right)$$

$$\bar{P}_i = \sum_{r=0}^{n-1} P_{r+\frac{1}{2}} \sin \frac{\pi i}{n} \left(r + \frac{1}{2}\right)$$

数値計算は, 格間数 5 と 10 の場合で行なった。

図中で ratio とは, 平行弦, 曲弦トラスの upper, lower, diagonal chord の断面積をその部材長で除したものの,

それぞれの平均値の比である。

図-3, 7 は, 繰返し回数毎の, 外力のつりあいの Remain der をプロットしたものであるが, 繰返す度毎に

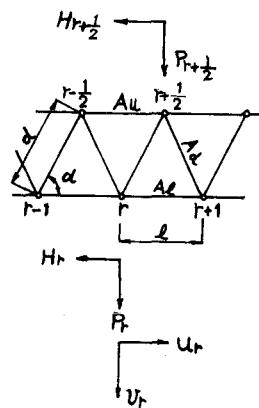
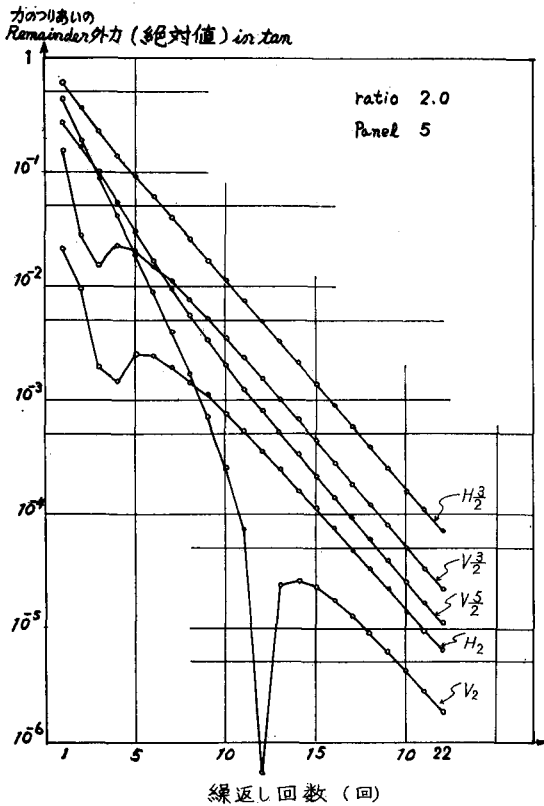


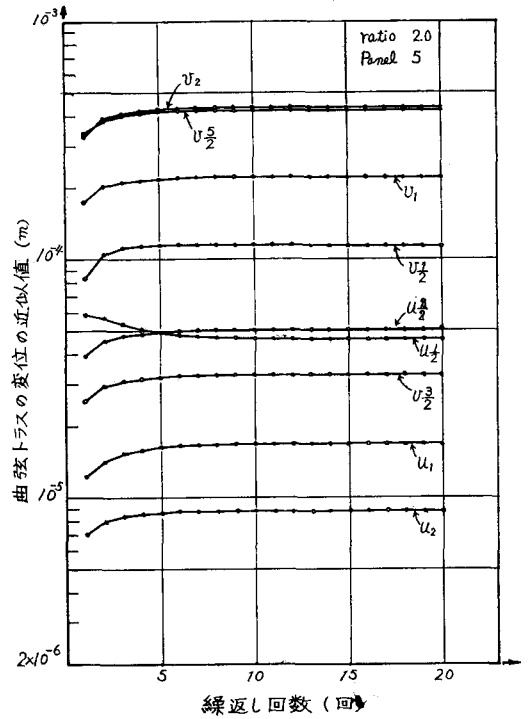
図-2



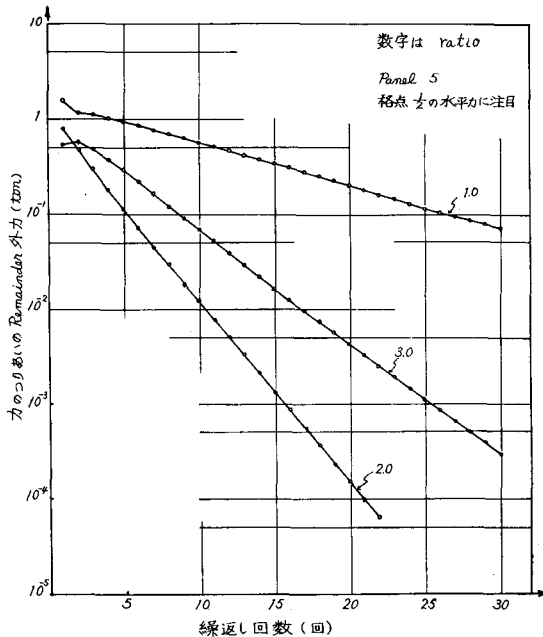
図一3 ratio 2.0 の場合の各格点の Remainder の減少の様子

小さくなってゆく、即ち、収斂しているのがわかる。しかし、図一5、9は、それぞれ異なる ratio のある格点の Remainder であるが、その図からは収斂の最も速い ratio が存在することがわかる。

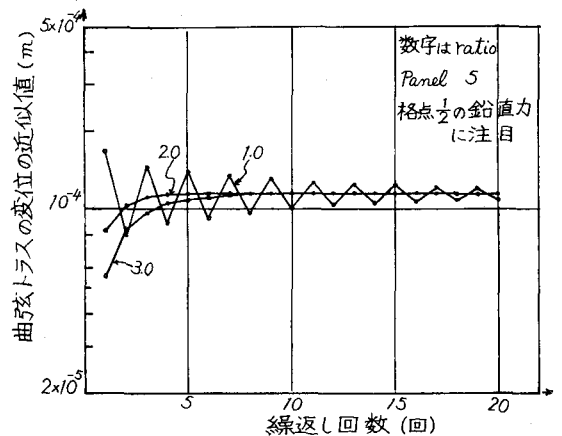
これらの図から、解析すべき構造物Ⅱにトポロジカル一致する構造物を考えると、いかなるものでも、収斂するというだけではなく、ある剛性の ratio の範囲内に限定



図一4 Panel 5 の曲弦トラスの変位の近似値と繰返し回数



図一5 ratio の違いによる収斂性の相異



図一6 ratio の違いによる収斂の速さ

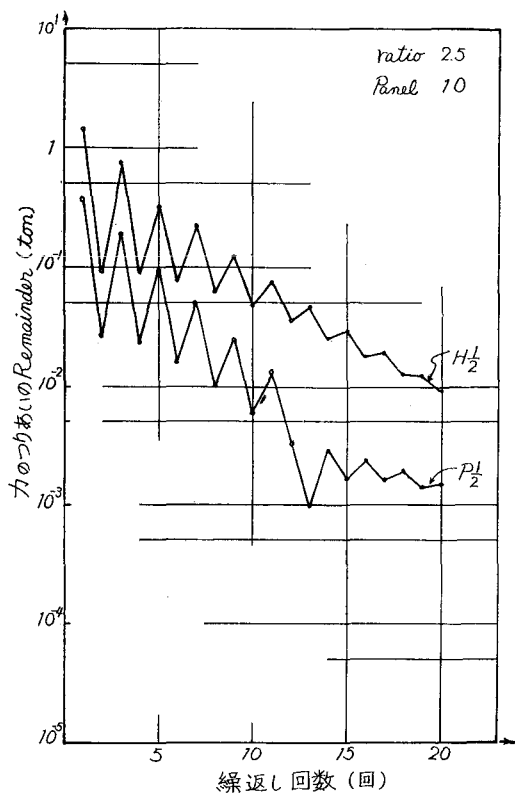


図-7 格点 $\frac{1}{2}$ の水平と鉛直方向の Remainder の減少の様子

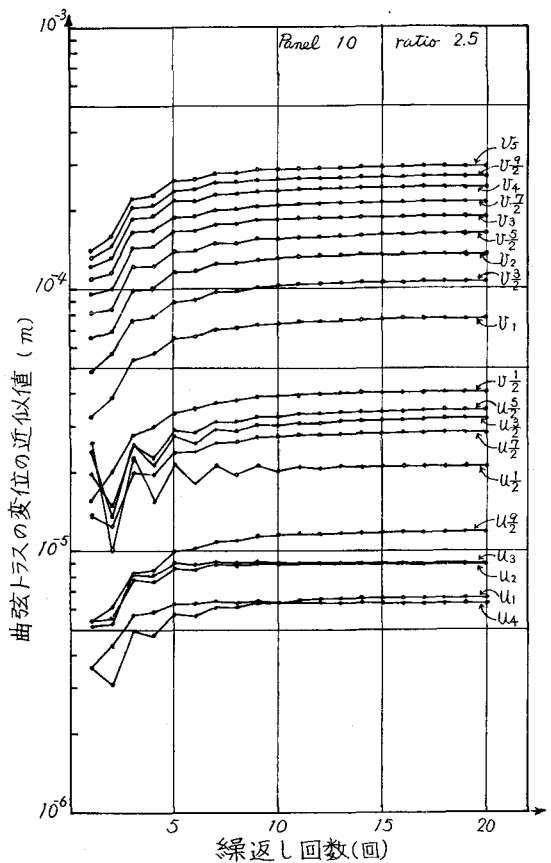


図-8 各格点の変位の近似の速さ

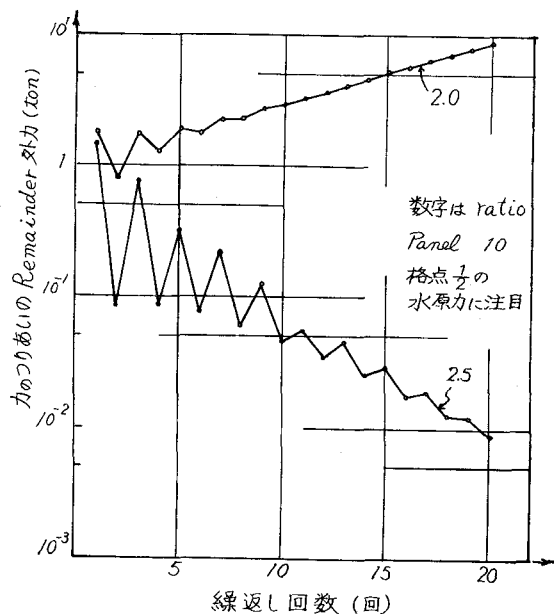


図-9 ratio の違いによる Remainder の減少と増加

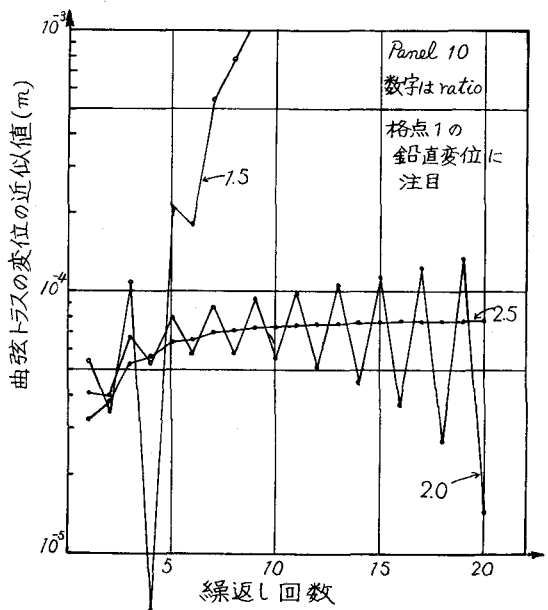


図-10 ratio の違いによる近似の収斂と発散

されるといえる。

計算を行なった ratio の中で、最も収斂の速い ratio において、部材力について、収束値に対する誤差が 5% 以内には、4 回の繰返しで、また 1% 以内には、6 回の繰返しで達した。変位について、収束値に対する誤差が 5% 以内には、収斂の最も遅い格点 2 の水平変位において、6 回収斂の最も速い格点 2 の鉛直変位において、4 回の繰返しで、また、1% 以内になるのは、前者において、9 回、後者において、6 回の繰返しで達した。しかし、この ratio より、収斂のより速い ratio の平行弦トラスが、存在するはずであり、以上の結果より少ない回数で変位、部材力とも収斂すると思う。

6. む す び

以上、最も簡単な例題として、曲弦ワーレントラスを本方法で解析したが、Ⅱの構造物の stiffness マトリックスの逆マトリックスを求めて解く普通の方法における計算の際の配列の core 数は、 n を格間数とすると、対角要素の付近のある幅をとると、 $48 \times n + 24$ を要し、この方法では、 $40 \times n + 8$ であった。

参 考 文 献

- 1) S.G.Nomachi : A Note of Finite Fourier Transforms Concerning Finite Integration (Trans. mem. M.I.T. Vol. 5 No. 2)