

帯板を要素とする弾性床上板の解法について

正員 能 町 純 雄*

正員 松 岡 健 一**

学生員 ○越 後 隆 一***

1. ま え が き

最近、交通量の増加に伴ない、地下鉄、地下道等の地下埋設構造物の建設が多くなって来ている。従来、これら構造物の解析には、軸方向には弾性床上の梁として、また断面方向にはラーメン構造として行なわれているようである。

本論文はラーメン作用と壁面応力とを相関させながら立体的に応力解析を試みたものである。すなわち、断面方向には底板が弾性床上にあることを考慮したラーメン構造として検討し、span方向には折板構造として折板理論による変位せん断方程式を用いて理論を進めたものである。

2. 底板について解析

底板は横方向には対称荷重が作用した弾性梁とみなすことができる。そのたわみ W は端モーメント M_B 、端たわみ w_B を用いて

$$w = \frac{M_B b}{EI\pi^2 c^2} P_{(\xi)}^{(1)} + w_B Q_{(\xi)}^{(1)} + L_{(\xi)}^{(1)} \dots \dots \dots (1)$$

と表わせる

ここに

$$\xi = x/b$$

$$P_{(\xi)}^{(1)} = \frac{\sinh \frac{\pi c}{\sqrt{2}} (1-\xi) \sin \frac{\pi c}{\sqrt{2}} \xi + \sinh \frac{\pi c}{\sqrt{2}} \xi \sin \frac{\pi c}{\sqrt{2}} (1-\xi)}{\cosh \frac{\pi c}{\sqrt{2}} + \cos \frac{\pi c}{\sqrt{2}}} \dots \dots \dots (2)$$

$$Q_{(\xi)}^{(1)} = \frac{\cosh \frac{\pi c}{\sqrt{2}} (1-\xi) \cos \frac{\pi c}{\sqrt{2}} \xi + \cosh \frac{\pi c}{\sqrt{2}} \xi \cos \frac{\pi c}{\sqrt{2}} (1-\xi)}{\cosh \frac{\pi c}{\sqrt{2}} + \cos \frac{\pi c}{\sqrt{2}}} \dots \dots \dots (3)$$

$$L_{(\xi)}^{(1)} = \sum \frac{2X_0 c \sin m \pi \xi_0 \sin m \pi \xi \times b^3 \{1 - (-1)^m\}}{\pi^2 EI (m^4 + c^4)} \dots \dots \dots (4)$$

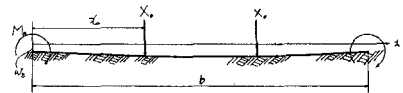
X_0 : 荷重

ξ_0 : 荷重点

$$c^4 = K_G b^4 / EI \pi^4 \quad K_G : \text{地盤反力係数}$$

式(2)、式(3)を ξ で微分して

$$\left. \begin{aligned} \frac{dP_{(\xi)}^{(1)}}{d\xi} &= \frac{\pi c}{\sqrt{2}} \left\{ U_{(\xi)}^{(1)} - V_{(\xi)}^{(1)} \right\} \\ \frac{dQ_{(\xi)}^{(1)}}{d\xi} &= -\frac{\pi c}{\sqrt{2}} \left\{ U_{(\xi)}^{(1)} - V_{(\xi)}^{(1)} \right\} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$



図—1 対称荷重が作用した弾性梁

* 室蘭工業大学 教授 工博
 ** 室蘭工業大学 助教授 工修
 *** 室蘭工業大学大学院

ここで

$$\left. \begin{aligned} U_{(\xi)}^{(1)} &= \frac{\sinh \frac{\pi c}{\sqrt{2}} (1-\xi) \cos \frac{\pi c}{\sqrt{2}} \xi - \sinh \frac{\pi c}{\sqrt{2}} \xi \cos \frac{\pi c}{\sqrt{2}} (1-\xi)}{\cosh \frac{\pi c}{\sqrt{2}} + \cos \frac{\pi c}{\sqrt{2}}} \\ V_{(\xi)}^{(1)} &= \frac{\cosh \frac{\pi c}{\sqrt{2}} (1-\xi) \sin \frac{\pi c}{\sqrt{2}} \xi - \cosh \frac{\pi c}{\sqrt{2}} \xi \sin \frac{\pi c}{\sqrt{2}} (1-\xi)}{\cosh \frac{\pi c}{\sqrt{2}} + \cos \frac{\pi c}{\sqrt{2}}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

さらに式(5)を ξ で微分して

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 P_{(\xi)}^{(1)}}{d\xi^2} &= -\pi^2 c^2 Q_{(\xi)}^{(1)} \\ \frac{d^2 Q_{(\xi)}^{(1)}}{d\xi^2} &= \pi^2 c^2 P_{(\xi)}^{(1)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

式(4)を ξ で微分し $\xi=0$ をおくと

$$\left. \frac{dL_{(\xi)}}{d\xi} \right)_{\xi=0} = \frac{2X_0 b^2}{EI \pi^2 c^2} P_{(\xi_0)}^{(1)} \dots\dots\dots (8)$$

さらに式(8)を ξ で二回微分して $\xi=0$ とおくと

$$\left. \frac{d^3 L_{(\xi)}}{d\xi^3} \right)_{\xi=0} = \frac{2X_0}{EI} Q_{(\xi_0)}^{(1)} \dots\dots\dots (9)$$

式(1)を x で微分し、式(5)を用いて

$$\frac{dw}{dx} = \frac{M_B b}{EI \pi \sqrt{2} c} \left\{ U^{(1)} - V^{(1)} \right\} - w_B \frac{\pi c}{\sqrt{2}} \left\{ U^{(1)} + V^{(1)} \right\} + L'_{(\xi)} \dots\dots\dots (10)$$

式(10)を x で二回微分して $-EI$ を乗じて式(7)を用いると横方向のせん断力が求まる

これを X とすると

$$X = -M_B \frac{\pi c}{\sqrt{2} b} \left\{ U^{(1)} + V^{(1)} \right\} - w_B \frac{\pi^3 c^3}{2 \sqrt{2} b^3} EI \left\{ U^{(1)} - V^{(1)} \right\} + L'_{(\xi)} \dots\dots\dots (11)$$

式(10)において $x=0$ とおくことにより B 点の撓角を求めることができる。

$$\theta_B = \frac{M_B b}{\sqrt{2} c \pi EI} \alpha - w_B \frac{\pi c}{\sqrt{2} b} \beta + L'_{(0)} \dots\dots\dots (12)$$

ここに

$$\alpha = \frac{\sinh \frac{\pi c}{\sqrt{2}} + \sin \frac{\pi c}{\sqrt{2}}}{\cosh \frac{\pi c}{\sqrt{2}} + \cos \frac{\pi c}{\sqrt{2}}}$$

$$\beta = \frac{\sinh \frac{\pi c}{\sqrt{2}} - \sin \frac{\pi c}{\sqrt{2}}}{\cosh \frac{\pi c}{\sqrt{2}} + \cos \frac{\pi c}{\sqrt{2}}}$$

式(11)において $x=0$ において B 点のせん断力を求める

$$X_{BC} = -M_B \frac{\pi c}{\sqrt{2} b} \beta - w_B \frac{\pi^3 c^3}{2 \sqrt{2} b^3} EI \alpha + L'_{(0)} \dots\dots\dots (13)$$

式(12)より

$$M_B = \left(\theta_B + w_B \frac{\pi c}{\sqrt{2} b} \beta \right) \frac{\pi c \sqrt{2} EI}{ab} - L'_{(0)} \frac{\pi c \sqrt{2} EI}{ab} \dots\dots\dots (14)$$

ここで

$$\alpha' = 1/\alpha, \quad \beta' = \beta/\alpha$$

とおき

$$M_{BC} = \pi c \sqrt{2} K \alpha' \theta_B + \frac{w_B}{b} \pi^2 c^2 K \beta' - C_{Be} \dots\dots\dots (15)$$

$$C_{Bc} = \frac{L'_0 EI \pi c \sqrt{2}}{b} \alpha' = \alpha' \Sigma \frac{2X_0 b}{\pi^2} \sqrt{2} c \frac{m \sin m \pi \xi_0 \{1 - (-1)^m\}}{(m^4 + c^4)}$$

とおくことにより、式(12)に式(15)を代入して

$$X_{Bc} = -(\pi c)^2 \frac{K \beta'}{b} \theta_B - \frac{w_B}{b} \frac{\pi^3 c^3}{2 \sqrt{2} b} K (\alpha + 2\beta \beta') + C_{Bc} \frac{\pi c}{\sqrt{2} b} \beta + L'_0 \dots \dots \dots (16)$$

$$K = EI/b$$

3. 隅点のつり合い

a モーメントのつり合い

荷重状態及び構造が対称

よって

$$M_{AD} = 2 K_1 \theta_A + C_{AD} \dots \dots \dots (17)$$

$$M_{AB} = 2 K' (2\theta_A + \theta_B) + C_{AB} \dots \dots \dots (18)$$

$$M_{BA} = 2 K' (2\theta_B + \theta_A) + C_{BA} \dots \dots \dots (19)$$

K : 部材剛度

隅点のつり合いを考えると

$$A点: M_{AD} + M_{AB} = 0$$

$$B点: M_{BA} + M_{Bc} = 0$$

この二式に式(15), (17), (18), (19)を代入して

$$\left. \begin{aligned} 2(K_1 + 2K')\theta_A + 2K'\theta_B + C_{AD} + C_{AB} &= 0 \\ 2\left(2K' + \frac{\pi c \sqrt{2} K \alpha'}{2}\right)\theta_B + 2K'\theta_A + \frac{w_B}{b} \pi^2 c^2 K \beta' + C_{BA} - C_{Bc} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

ここに

$$B = (k_1 + 2k')(2k' + \pi c \sqrt{2} \alpha'/2) - k'^2$$

$$k_1 = K_1/K, \quad k' = K'/K$$

とおき、 θ_A , θ_B を求めると

$$\theta_A = \frac{w_B}{2b} \frac{\pi^2 c^2 \beta' k'}{B} - \frac{1}{2K} \frac{(2k' + \pi c \sqrt{2} \alpha'/2)}{B} (C_{AD} + C_{AB}) + \frac{1}{2K} \frac{k'}{B} (C_{BA} - C_{Bc}) \dots \dots \dots (20)$$

$$\theta_B = -\frac{w_B}{2b} \frac{\pi^2 c^2 \beta' (2k' + k_1)}{B} - \frac{1}{2K} \frac{(2k' + k_1)}{B} (C_{BA} - C_{Bc}) + \frac{1}{2K} \frac{k'}{B} (C_{AD} + C_{AB}) \dots \dots \dots (21)$$

式(21)を式(16)に代入し

$$A = \left\{ \frac{(\alpha + 2\beta \beta')}{\sqrt{2}} - \frac{\pi c \beta'^2 (2k' + k_1)}{B} \right\} (\pi c)^3$$

$$D = \pi c \beta / \sqrt{2}$$

$$J = \frac{(\pi c)^2 (2k' + k_1) \beta}{B}$$

$$N = (\pi c)^2 \frac{k' \beta'}{B}$$

とおいて

$$X_{Bc} = -\frac{w_B K}{2b^2} A + \frac{C_{Bc} D}{b} + \frac{J}{2b} (C_{BA} - C_{Bc}) - \frac{N}{2b} (C_{AD} + C_{AB}) + L'_0 \dots \dots \dots (22)$$

b セン断力のつり合い

A点, B点でせん断力, 軸力のつり合いを考えると

$$A点: S_{AB} + q_1 b/2 = 0$$

$$B点: S_{BA} - X_{Bc} = 0$$

故に

$$S_{AB} - S_{BA} = -q_1 b/2 - X_{Bc} \dots \dots \dots (23)$$

折板理論による変位せん断方程式

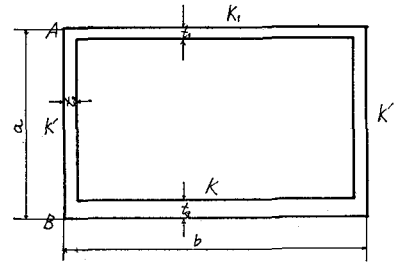


図-2 断面図

$$T_{AD} = Ebt_1(2\ddot{U}_A + \ddot{U}_D) + \frac{S_{AD} - S_{DA}}{b} \dots\dots\dots(24)$$

$$T_{AB} = Eat_2(2\ddot{U}_A + \ddot{U}_B) + \frac{S_{AB} - S_{BA}}{a} \dots\dots\dots(25)$$

$$T_{BA} = Eat_2(2\ddot{U}_B + \ddot{U}_A) + \frac{S_{BA} - S_{AB}}{a} \dots\dots\dots(26)$$

$$T_{BC} = Eat_3(2\ddot{U}_B + \ddot{U}_C) + \frac{S_{BC} - S_{CB}}{b} \dots\dots\dots(27)$$

T : せん断力, S : 軸力, u : 軸方向変位
 b : 幅員 a : 高さ
 • : $span$ 方向に微分

対称性を考慮して

$$\ddot{U}_A = \ddot{U}_D \quad S_{AD} = S_{DA}$$

$$\ddot{U}_B = \ddot{U}_C \quad S_{BC} = S_{CB}$$

つり合い条件

$$T_{AD} + T_{AB} = 0$$

$$T_{BA} + T_{BC} = 0$$

に式(21), (22), (23), (24) を代入し

$$Ebt_2(3\ddot{U}_A) + Eat_2(2\ddot{U}_A + \ddot{U}_B) + \frac{S_{AB} - S_{BA}}{a} = 0 \dots\dots\dots(28)$$

$$Eat_2(2\ddot{U}_B + \ddot{U}_A) + Ebt_3(3\ddot{U}_B) + \frac{S_{BA} - S_{AB}}{a} = 0 \dots\dots\dots(29)$$

また

$$Gt_2\ddot{w}_B = Gt_2 \frac{(\dot{U}_A - \dot{U}_B)}{a} + \frac{S_{AB} - S_{BA}}{a} \dots\dots(30)$$

ここで

$$U_A = \frac{U_A + U_B}{2} + \frac{U_A - U_B}{2}$$

$$U_B = \frac{U_A + U_B}{2} - \frac{U_A - U_B}{2}$$

とおき

式(25), (26)に代入して, $U_A - U_B$ について解くと

$$\ddot{U}_A - \ddot{U}_B = - \frac{(S_{AB} - S_{BA})(2at_2 + bt_3 + bt_1)}{aE\{(at_2)^2 + 3b^2t_1t_3 + 2abt_1t_2 + 2abt_2t_3\}}$$

これに式(20)を代入して

$$\ddot{U}_A - \ddot{U}_B = \frac{(q_1b + 2X_{BC})(2at_2 + bt_3 + bt_1)}{2aE\{(at_2)^2 + 3b^2t_1t_3 + 2abt_1t_2 + 2abt_2t_3\}} \dots\dots\dots(31)$$

式(30)より

$$Gt_2\ddot{w}_B = Gt_2 \frac{(\ddot{U}_A - \ddot{U}_B)}{a} + \frac{\ddot{S}_{AB} - \ddot{S}_{BA}}{a}$$

この式に(23), (31)式を代入して

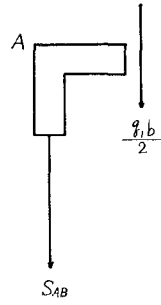
$$\ddot{w}_B = \frac{(q_1b + 2X_{BC})(2at_2 + bt_3 + bt_1)}{2a^2E\{(at_2)^2 + 3b^2t_1t_3 + 2abt_1t_2 + 2abt_2t_3\}} - \frac{\ddot{X}_{BC}}{aGt_2} \dots\dots\dots(32)$$

さらにこの式の X_{BC} に式(22)の X_{BC} を代入して整理すると式(32)は

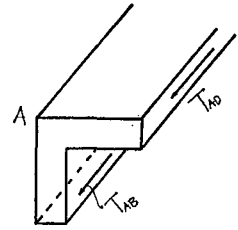
$$\ddot{w}_B - \frac{H}{2ab} \ddot{w}_B + \frac{H_1}{2a^2b^2} w_B = \frac{C'X_0}{2a^2b^2E} + \frac{C'q_1}{2a^2bE} \dots\dots\dots(33)$$

ここに

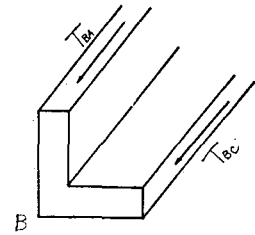
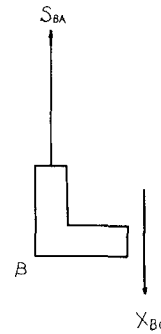
$$H = \frac{K}{Gbt_2} A$$



図—3 節点A, Bの
つり合い



図—4



$$H_1 = \frac{K}{E} \frac{(2at_2 + bt_3 + bt_1)}{\{(at_2)^2 + 3b^2t_1t_3 + 2abt_1t_2 + 2abt_2t_3\}} A$$

$$C' = \frac{(2at_2 + bt_3 + bt_1) b}{\{(at_2)^2 + 3b^2t_1t_3 + 2abt_1t_2 + 2abt_2t_3\}} \left\{ \frac{C_{BC}(2D - J) + L_0' b}{X_0} \right\}$$

$$C_1 = \frac{(2at_2 + bt_3 + bt_1)}{\{(at_2)^2 + 3b^2t_1t_3 + 2abt_1t_2 + 2abt_2t_3\}} \left\{ \frac{JC_{BA}}{q_1} - \frac{N(C_{AD} + C_{AB})}{q_1} + b^2 \right\}$$

3. フーリエ変換及び逆変換

式(33)をスパン方向にフーリエ変換すると

$$\int_0^l w_B \sin \frac{m\pi y}{l} dy - \frac{H}{2ab} \int_0^l w_B \sin \frac{m\pi y}{l} dy + \frac{H_1}{2a^2b^2} \int_0^l w_B \sin \frac{m\pi y}{l} dy$$

$$= \frac{C'}{2a^2b^2E} \int_0^l X_0 \sin \frac{m\pi y}{l} dy + \frac{C_1}{2a^2bE} \int_0^l q_1 \sin \frac{m\pi y}{l} dy \dots \dots \dots (34)$$

l : スパン長

となる

$$\int_0^l w_B \sin \frac{m\pi y}{l} dy = S_i[w_B], \quad \int_0^l X_0 \sin \frac{m\pi y}{l} dy = \bar{X}_0, \quad \int_0^l q_1 \sin \frac{m\pi y}{l} dy = \bar{q}_1$$

とおき, simple support として

式(34)は

$$\left(\frac{m\pi}{l}\right)^4 S_i[w_B] + \frac{H}{2ab} \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 S_i[w_B] + \frac{H_1}{2a^2b^2} S_i[w_B] = \frac{C'}{2a^2b^2E} \bar{X}_0 + \frac{C_1}{2a^2bE} \bar{q}_1 \dots \dots \dots (35)$$

これを $S_i[w_B]$ について解くと

$$S_i[w_B] = \frac{C'}{2a^2b^2E} \frac{\bar{X}_0}{\left(\frac{\pi}{l}\right)^4 \left\{ m^4 + \frac{Hl^2}{2ab\pi^2} m^2 + \frac{H_1l^4}{2a^2b^2\pi^4} \right\}}$$

$$+ \frac{C_1}{2a^2bE} \frac{\bar{q}_1}{\left(\frac{\pi}{l}\right)^4 \left\{ m^4 + \frac{Hl^2}{2ab\pi^2} m^2 + \frac{H_1l^4}{2a^2b^2\pi^4} \right\}} \dots \dots \dots (36)$$

この $S_i[w_B]$ を逆変換すると

$$w_B = \frac{2}{l} \sum_{m=1}^{\infty} S_i[w_B] \sin \frac{m\pi y}{l} \dots \dots \dots (37)$$

式(36)を式(38)を代入し

さらに

$$d = \left(\frac{ab}{l^2}\right)^2 \pi^4, \quad d_1 = \left(\frac{a}{l}\right)^2 \left(\frac{l}{l}\right) \pi^4, \quad d_2 = \frac{ab}{l^2}$$

$$h = \frac{H}{2\pi^4 d_2^2}, \quad h_1 = \frac{H_1}{2\pi^4 d_2^2}, \quad \varsigma = \frac{y}{l}$$

とおくと

$$w_B = \frac{2}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C'}{2dE} \frac{\bar{X}_0 \sin m\pi\varsigma}{(m^4 + hm^2 + h_1)} + \frac{2}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_1 l}{2d_1 E} \frac{\bar{q}_1 \sin \pi\varsigma}{(m^4 + hm^2 + h_1)} \dots \dots \dots (38)$$

ここで

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{h}{4} + \frac{\sqrt{h_1}}{2}} \quad \beta_1 = \sqrt{-\frac{h}{4} + \frac{\sqrt{h_1}}{2}}$$

$$\lambda^2 = \frac{h + \sqrt{h^2 - 4h_1}}{2} \quad \lambda'^2 = \frac{h - \sqrt{h^2 - 4h_1}}{2}$$

とおくと

式(38)は

$$w_B = \frac{X_0}{El} \frac{C'\pi}{8 \cdot d\alpha_1\beta_1(\alpha_1^2 + \beta_1^2)} \left\{ \alpha_1 \Psi_1(\zeta, \varsigma_1) + \beta_1 \Phi_1(\zeta, \varsigma_1) \right\} + \frac{q_1 l}{E} \frac{C'_1}{4d_1} \left\{ \frac{U_Y^{(-1)}}{\lambda^2 - \lambda'^2} + \frac{1}{\lambda^2 \lambda'^2} \right\} \dots\dots\dots (39)$$

$\varsigma_1 > \zeta$ のとき

$$\Psi_1(\zeta, \varsigma_1) = \frac{1}{\cosh 2\alpha_1\pi - \cos 2\beta_1\pi} \left\{ \cosh \alpha_1\pi(2+\zeta-\varsigma_1) \sin \beta_1\pi(\varsigma_1-\zeta) \right. \\ - \cosh \alpha_1\pi(2-\zeta-\varsigma_1) \sin \beta_1\pi(\varsigma_1+\zeta) + \cosh \alpha_1\pi(\varsigma_1-\zeta) \sin \beta_1\pi(2+\zeta-\varsigma_1) \\ \left. - \cosh \alpha_1\pi(\varsigma_1+\zeta) \sin \beta_1\pi(2-\zeta-\varsigma_1) \right\}$$

$$\Phi_1(\zeta, \varsigma_1) = \frac{1}{\cosh 2\alpha_1\pi - \cos 2\beta_1\pi} \left\{ \sinh \alpha_1\pi(2+\zeta-\varsigma_1) \sin \beta_1\pi(\varsigma_1-\zeta) \right. \\ - \sinh \alpha_1\pi(2-\zeta-\varsigma_1) \sin \beta_1\pi(\varsigma_1+\zeta) + \sinh \alpha_1\pi(\varsigma_1-\zeta) \sin \beta_1\pi(2+\zeta-\varsigma_1) \\ \left. - \sinh \alpha_1\pi(\varsigma_1+\zeta) \cos \beta_1\pi(2-\zeta-\varsigma_1) \right\}$$

$$U_Y^{(-1)} = \frac{\cosh \pi\lambda(\frac{1}{2}-\zeta)}{\lambda^2 \cosh \frac{\pi}{2}\lambda} - \frac{\cosh \pi\lambda'(\frac{1}{2}-\zeta)}{\lambda'^2 \cosh \frac{\pi}{2}\lambda'}$$

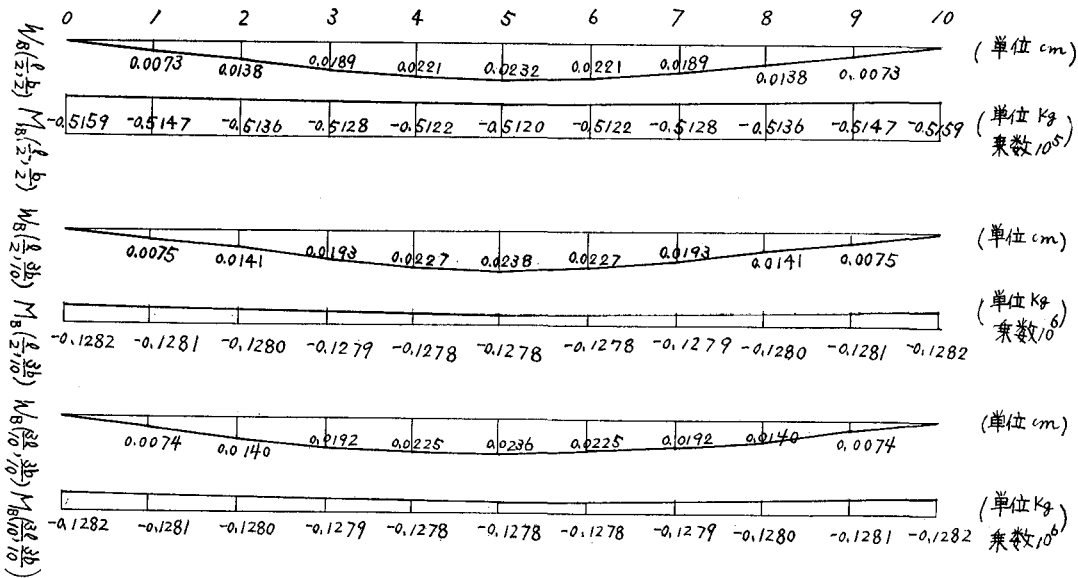
式(39)により w_B が求まり、これを式(1), (11), (12), (15)に代入することにより断面力が出る。

4. 数 値 計 算

数値計算に用いた断面諸元は次の如くである。

$a = 5 \text{ m}$, $b = 10 \text{ m}$, $t_1 = 20 \text{ cm}$, $t_2 = 30 \text{ cm}$, $t_3 = 40 \text{ cm}$, $E = 3.0 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$, $G = 1.3 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$, γ_t (土の単位体積重量) $= 1.65/\text{m}^3$,

上の諸値を用いて土かぶり 4 m, 底板の中央に 10 t の集中荷重が乗った時の端モーメント, たわみを計算した。



図—5 端たわみ, 端モーメント図 () 内は荷重点位置

5. あ と が き

帯板を要素とする弾性床板の応用問題として、Boxculvert の断面について対称変形問題を取り扱ったが、さらに逆対称変形問題及び一般解法に研究を進める予定である。

参 考 文 献

Sumio G.Nomachi : On Bending of Multi-Equi-Cell Plate, Reprinted from the Memoirs of the Muroran
I nstitute of Technology (Science and Engineering) Vol 6, No 2 July 1968