

質点系に置換する方法による地盤の地震応答解析

正 員 金 子 孝 吉*

1 ま え が き

地盤の地震応答解析を行なうに当たり、等価質量一ばねを持った質点系に置換する方法を使用した。隣接する質点間に減衰力が相対速度に比例し、復元力が相対変位に比例して作用する系の水平せん断振動の問題は複素固有値を如何に決定するかで展開していく。固有振動数方程式は複雑な高次代数方程式であるため、数値解法によらざるを得ない。いままで数値解析すら系を単純化して試みている程度である。

本研究ではこの複素固有値を決定することを主眼において、質点系地盤の振動挙動を数式化することを目的とした。固有値決定には行列式を展開して高次代数方程式の係数を決めBairstow或いはNewtonの方法を用いて解の精度を上げた。

また質点系の運動方程式の一般解は普通Duhamelの積分を用いて表わされるが、手法をかえてLaplaceの像関数をそのまま用いて表現する方法で解を求めた。これにより応答値は積分を解くか近似的にDigital量になおす操作なしで直接計算することができた。

II 質点系地盤の地震応答解析

— Laplace 変換による解法 —

いま初期条件を $u(0)=u_0$, $\dot{u}(0)=v_0$ として式(2)をLaplace変換にて解くことにする。式(2)を像空間に移すと $t \rightarrow s$ に変換して次式になる。

$$(s^2+2hs+p^2)U(s)-(s+2hp)u_0-\dot{u}(0)=F(s) \dots\dots\dots (3)$$

ここで、 $u(t)$ と $\{p^2 f(t)\}$ の像関数をそれぞれ $U(s)$ と $F(s) \equiv H_0(s)/H(s)$ とする。式(3)は変形して

$$U(s) = \frac{F(s) + v_0 + (s+2hp)u_0}{s^2+2hps+p^2} = \frac{H_0(s) + \{v_0 + (s+2hp)u_0\}H(s)}{(s^2+2hps+p^2)H(s)} = \frac{E(s)}{G(s)} \dots\dots\dots (4)$$

になるが、特性方程式 $G(s)=0$ の根は $s = -hp \pm ip\sqrt{1-h^2}$ ($i = \sqrt{-1}$) と他に $H(s)=0$ の根がある。 $H(s)=0$ が $a_1, a_2, \dots, a_l$ なる l 個の単根と $b_1(k_1 \text{ 重根}), b_2(k_2 \text{ 重根}), \dots, b_m(k_m \text{ 重根})$ なる重根を持つとする。

つまり式(4)は一般に $\left\{2+l+\sum_{k=1}^m k_m\right\}$ 個の極を有する。

$$U(s) = \frac{H_0(s) + \{v_0 + (s+2hp)u_0\}H(s)}{(s^2+2hps+p^2)(s-a_1)(s-a_2)\dots(s-a_l)(s-b_1)^{k_1}(s-b_2)^{k_2}\dots(s-b_m)^{k_m}} \dots\dots\dots (5)$$

ここで留数定理および展開定理を用いて原空間へ逆変換する。特性方程式が単根 a をもつとき

$$u(t) = \sum \left\{ E(a) e^{at} / G'(a) \right\} \dots\dots\dots (6)$$

地盤が水平方向の地震力を受けて弾性振動をする場合、地盤層が水平でしかも水平方向に等質であれば、単位の質点系に置換してその質点の運動をもって地盤全体の運動を説明することができる。

質点系の運動方程式の一般解は通常 Duhamel の積分で表現しているが、強制外力の如何によつては積分量の計算がめんどうである。だから積分を解く操作なしで一般解を表現しておけば数値計算などには非常に便利である。そこで本研究は質点系地盤の振動応答に Laplace 変換を用いて表現する手法を述べることにする。

1) 強制力の像関数が判っている場合の一質点解

たとえば、地盤を一質点系の弾性体に置換してみると、その運動方程式は

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = -m\ddot{g}(t) \dots\dots\dots (1)$$

で表わせる。ここに、 m , c , k , $\ddot{u}(t)$ それに $\ddot{g}(t)$ はそれぞれ質量、減衰係数、ばね係数、水平方向相対変位それに地震動による強制外力の加速度である。またこの式を変形して、

$$\ddot{u}(t) + 2hp\dot{u}(t) + p^2u(t) = p^2f(t) \dots\dots\dots (2)$$

と表わせば、 h , p そして $f(t)$ は減衰定数、非減衰固有振動数そして $p^2f(t) = -\ddot{g}(t)$ なる強制外力である。なお dots は時間微分である。

* 北海道大学工学部助手

また k 重根 b をもつとき

$$u(t) = \left[\frac{\Phi^{(k-1)}(b)}{(k-1)!0!} + \frac{\Phi^{(k-2)}(b)t}{(k-2)!1!} + \cdots + \frac{\Phi^{(k-m)}(b)t^{m-1}}{(k-m)!(m-1)!} + \cdots + \frac{\Phi(b)t^{k-1}}{0!(k-1)!} \right] e^{bt} \quad (7)$$

で $u(t)$ が求まる。ここに、 $\Phi(s) = (s-a)^k U(s)$ である。

さて、式(5)より分母を s について微分すれば

$$G'(s) = 2(s+hp)H(s) + (s^2+2hps+p^2)H'(s) \quad (8)$$

になるが、この式に極値を代入して

$$\begin{aligned} G'(-hp+ip\sqrt{1-h^2}) &= i2p\sqrt{1-h^2}H(-hp+ip\sqrt{1-h^2}) \\ G'(-hp-ip\sqrt{1-h^2}) &= -i2p\sqrt{1-h^2}H(-hp-ip\sqrt{1-h^2}) \\ G'(a_1) &= (a_1^2+2hpa_1+p^2)H'(a_1) \\ G'(a_2) &= (a_2^2+2hpa_2+p^2)H'(a_2) \\ &\dots\dots\dots \\ G'(a_l) &= (a_l^2+2hpa_l+p^2)H'(a_l) \end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned} \Phi_\beta(s) &= \frac{(s-b_\beta)^{k_\beta} [H_0(s) + \{v_0 + (s+2hp)u_0\}H(s)]}{(s^2+2hps+p^2)H(s)} \\ &= \frac{H_0(s) + \{v_0 + (s+2hp)u_0\}H(s)}{(s^2+2hps+p^2)(s-a_1)\cdots(s-a_l)(s-b_1)^{k_1}\cdots(s-b_{\beta-1})^{k_{\beta-1}}(s-b_{\beta+1})^{k_{\beta+1}}\cdots(s-b_m)^{k_m}} \\ &\quad (\beta=1, 2, \dots, m) \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

に極値 b を代入して、

$$\begin{aligned} \Phi_1(b_1) &= \frac{H_0(b_1) + \{v_0 + (b_1+2hp)u_0\}H(b_1)}{(b_1^2+2hpb_1+p^2)(b_1-a_1)\cdots(b_1-a_l)(b_1-b_2)^{k_2}(b_1-b_3)^{k_3}\cdots(b_1-b_m)^{k_m}} \\ &\dots\dots\dots \\ \Phi_m(b_m) &= \frac{H_0(b_m) + \{v_0 + (b_m+2hp)u_0\}H(b_m)}{(b_m^2+2hpb_m+p^2)(b_m-a_1)\cdots(b_m-a_l)(b_m-b_1)^{k_1}\cdots(b_m-b_{m-1})^{k_{m-1}}} \end{aligned}$$

である。次に分子については、

$$\begin{aligned} E(s) &= H_0(s) + \{v_0 + (s+2hp)u_0\}H(s) \\ &= H_0(s) + \{v_0 + (s+2hp)u_0\}(s-a_1)\cdots(s-a_l)(s-b_1)^{k_1}\cdots(s-b_m)^{k_m} \\ &\dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

に極値を代入して、

$$\begin{aligned} E(-hp+ip\sqrt{1-h^2}) &= H_0(-hp+ip\sqrt{1-h^2}) + (v_0+hp u_0+ip\sqrt{1-h^2}u_0)H(-hp+ip\sqrt{1-h^2}) \\ E(-hp-ip\sqrt{1-h^2}) &= H_0(-hp-ip\sqrt{1-h^2}) + (v_0+hp u_0-ip\sqrt{1-h^2}u_0)H(-hp-ip\sqrt{1-h^2}) \\ E(a_1) &= H_0(a_1) \\ &\dots\dots\dots \\ E(a_l) &= H_0(a_l) \end{aligned}$$

になる。以上より求める原関数 $u(t)$ は式(6), (7)に代入して、

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{E(-hp+ip\sqrt{1-h^2})}{G'(-hp+ip\sqrt{1-h^2})} e^{(-hp+ip\sqrt{1-h^2})t} + \frac{E(-hp-ip\sqrt{1-h^2})}{G'(-hp-ip\sqrt{1-h^2})} e^{(-hp-ip\sqrt{1-h^2})t} \\ &\quad + \frac{E(a_1)}{G'(a_1)} e^{a_1 t} + \cdots + \frac{E(a_l)}{G'(a_l)} e^{a_l t} \\ &\quad + \left[\frac{\Phi_1^{(k_1-1)}(b_1)t^{k_1-1}}{(k_1-1)!0!} + \frac{\Phi_1^{(k_1-2)}(b_1)t^{k_1-2}}{(k_1-2)!1!} + \cdots + \frac{\Phi_1(b_1)t^{k_1-1}}{0!(k_1-1)!} \right] e^{b_1 t} \\ &\quad + \cdots \cdots \cdots \\ &\quad + \left[\frac{\Phi_m^{(k_m-1)}(b_m)t^{k_m-1}}{(k_m-1)!0!} + \frac{\Phi_m^{(k_m-2)}(b_m)t^{k_m-2}}{(k_m-2)!1!} + \cdots + \frac{\Phi_m(b_m)t^{k_m-1}}{0!(k_m-1)!} \right] e^{b_m t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-hpt} \left[\frac{H_0(hp + ip\sqrt{1-h^2}) + (v_0 + hpu_0 + ip\sqrt{1-h^2}u_0)H(-hp + ip\sqrt{1-h^2})}{i2p\sqrt{1-h^2}H(-hp + ip\sqrt{1-h^2})} e^{ip\sqrt{1-h^2}t} \right. \\
&\quad \left. - \frac{H_0(-hp - ip\sqrt{1-h^2}) + (v_0 + hpu_0 - ip\sqrt{1-h^2}u_0)H(-hp - ip\sqrt{1-h^2})}{i2p\sqrt{1-h^2}H(-hp - ip\sqrt{1-h^2})} e^{-ip\sqrt{1-h^2}t} \right] \\
&+ \sum_{a=1}^l \frac{E(a_\alpha)}{G'(a_\alpha)} e^{a_\alpha t} \\
&+ \sum_{\beta=1}^{l-1} \frac{\Phi_1^{(h-\beta)}(b_1)t^{\beta-1}}{(k_1-\beta)!(\beta-1)!} e^{b_1 t} + \dots + \sum_{\beta=1}^{k_m} \frac{\Phi_m^{(k_m-\beta)}(b_m)t^{\beta-1}}{(k_m-\beta)!(\beta-1)!} e^{b_m t} \\
&= \frac{\sqrt{v_0^2 + 2hpu_0v_0 + p^2u_0^2}}{p\sqrt{1-h^2}} e^{-hpt} \sin(p\sqrt{1-h^2}t + t \frac{v_0}{v_0 + hpu_0} \frac{p\sqrt{1-h^2}u_0}{v_0 + hpu_0}) \\
&\quad \dots\dots\dots (\text{自由減衰振動}) \\
&+ \frac{e^{-hpt}}{2p\sqrt{1-h^2}} \left[\{F(-hp + ip\sqrt{1-h^2}) + F(-hp - ip\sqrt{1-h^2})\} \sin p\sqrt{1-h^2}t \right. \\
&\quad \left. - i \{F(-hp + ip\sqrt{1-h^2}) - F(-hp - ip\sqrt{1-h^2})\} \cos p\sqrt{1-h^2}t \right] \\
&+ \sum_{a=1}^l \frac{H_0(a_2)}{(a_\alpha^2 + 2hpa_\alpha + p^2)H'(a_\alpha)} e^{a_\alpha t} \\
&+ \sum_{r=1}^m \sum_{\beta=1}^{k_r} \frac{\Phi_r^{(k_r-\beta)}(b_r)t^{\beta-1}}{(k_r-\beta)!(\beta-1)!} e^{b_r t} \\
&\quad \dots\dots\dots (\text{強制振動}) \\
&\quad \dots\dots\dots (11)
\end{aligned}$$

を表わすことができる。従って強制外力 $p^2 f(t)$ の像関数 $F(s) \equiv H_0(s)/H(s)$ が判っていて、しかもその関数が微分可能である場合の一質点系の変位応答を得たわけである。

つまり式(11)は式(2)において強制外力が与えられ、その像関数が $F(s)$ なる形で表わせる場合の一般解である。

2) 多質点系に置換した地盤のせん断振動

地震などによる強制外力が水平方向にのみ振動し、質点と質点の間にはせん断変形のみにより伝達するものと考える。地盤を図-1で示すごとく n 個の質点に置きかえ、各質点について運動方程式をたてる。図-2におけるように質点 r の動的なつりあいを考慮すれば、すなわち復元力は各質点間の相対変位に比例し、減衰力も相対速度に比例するとすれば、次の運動方程式を誘導することができよう。

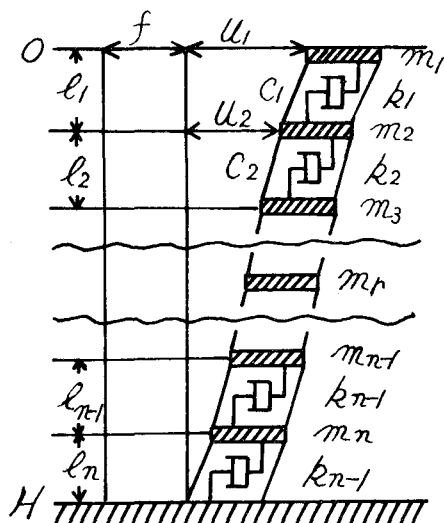


Fig-1 地震外力 $f(t)$ が作用するときの質点系モデル

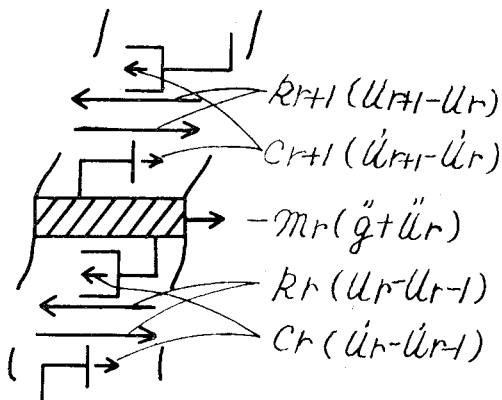


Fig-2 質点 r の動的なつりあい

$$\left. \begin{aligned}
 m_n \ddot{u}_n + c_n(\dot{u}_n - \dot{u}_{n-1}) + k_n(u_n - u_{n-1}) &= -m_n \ddot{g} \\
 m_{n-1} \ddot{u}_{n-1} - c_n(\dot{u}_n - \dot{u}_{n-1}) + c_{n-1}(\dot{u}_{n-1} - \dot{u}_{n-2}) \\
 \quad - k_n(u_n - u_{n-1}) + k_{n-1}(u_{n-1} - u_{n-2}) &= -m_{n-1} \ddot{g} \\
 \dots\dots\dots \\
 m_r \ddot{u}_r - c_{r+1}(\dot{u}_{r+1} - \dot{u}_r) + c_r(\dot{u}_r - \dot{u}_{r-1}) \\
 \quad - k_{r+1}(u_{r+1} - u_r) + k_r(u_r - u_{r-1}) &= -m_r \ddot{g} \\
 \dots\dots\dots \\
 m_2 \ddot{u} - c_3(\dot{u}_3 - \dot{u}_2) + c_2(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) \\
 \quad - k_3(u_3 - u_2) + k_2(u_2 - u_1) &= -m_2 \ddot{g} \\
 m_1 \ddot{u}_1 - c_2(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) + c_1 \dot{u}_1 - k_2(u_2 - u_1) + k_1 u_1 &= -m_1 \ddot{g}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

a) 複素固有値および固有関数

式(12)の右辺=0なる同次式

$$\begin{aligned}
 m_r \ddot{u}_r - c_{r+1}(\dot{u}_{r+1} - \dot{u}_r) + c_r(\dot{u}_r - \dot{u}_{r-1}) \\
 - k_{r+1}(u_{r+1} - u_r) + k_r(u_r - u_{r-1}) = 0 \quad (r=1, 2, \dots, n) \dots\dots\dots (13)
 \end{aligned}$$

の解を次式で仮定する。

$$u_r = Y_r e^{p t} \quad (r=1, 2, \dots, n) \dots\dots\dots (14)$$

ただし、 Y_r は質点 r の振幅である。式(14)を式(13)に代入すると、

$$-(c_r p + k_r) Y_{r-1} + \{m_r p^2 + (c_r + c_{r+1})p + (k_r + k_{r+1})\} Y_r - (c_r p + k_r) Y_{r+1} = 0 \quad (r=1, 2, \dots, n) \dots\dots\dots (15)$$

を得るが、 p が既知なら固有関数 Y_r に関する同次連立方程式である。 Y_r が 0 でない根を有するためには次の行列式が 0 でなければならない。

$$\begin{vmatrix}
 (m_n p^2 + c_n p + k_n) - (c_n p + k_n) & 0 & \dots\dots\dots 0 \\
 -(c_n p + k_n)(m_{n-1} p^2 + c_{n-1} p + k_{n-1}) - (c_{n-1} p + k_{n-1}) & \dots\dots\dots 0 \\
 \dots\dots\dots \\
 \dots\dots\dots - (c_2 p + k_2)(m_1 p^2 + c_1 p + k_1) & \dots\dots\dots 0
 \end{vmatrix} = 0 \dots\dots\dots (15)$$

ただし、 $c_{n-1 \cdot n} = c_{n-1} + c_n$, $k_{n-1 \cdot n} = k_{n-1} + k_n$ と約束する。

この行列式を展開すると、 p に関する $2n$ 次の代数方程式になるが、その根は一般に共役複素根を有しそれぞれ、 $p = -h_1 \pm i p_1$, $p = -h_2 \pm i p_2$, $\dots$, $p = -h_n \pm i p_n$ で求まる。ここに、 $p_1, p_2, \dots, p_n$ は減衰があるときの系の固有振動数の各次数で、 $h_1, h_2, \dots, h_n$ は減衰定数の各次数を表わす。数値解を求めるに当っては式(15)を多項式に展開し、高次代数方程式の解法 (Bairstow 法或いは Newton 法) を使用する。

高次代数方程式

$$f(p) = A_1 p^{2n} + A_2 p^{2n-1} + \dots + A_{2n} p + A_{2n+1} = 0 \quad (17)$$

($A_1 \neq 0$) の係数はたとえば 4 質点系 ($n=4$) の場合には、 $A_1 = m_1 m_2 m_3 m_4$

$$A_2 = m_1 m_2 m_3 c_4 + \{m_1 m_2 c_{34} + m_3(m_1 c_{23} + m_2 c_{12})\} m_4$$

$$\begin{aligned}
 A_3 = m_1 m_2 m_3 k_4 + \{m_1 m_2 c_3 + m_3(m_1 c_{23} + m_2 c_{12})\} c_4 + \{m_1(m_2 k_{34} + c_2 c_{34} + c_3 c_4) + m_2 c_{12} c_{34} \\
 + m_3(m_1 k_{23} + m_2 k_{12} + c_1 c_2 + c_{12} c_3)\} m_4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_4 = \{m_1 m_2 c_3 + m_3(m_1 c_{23} + m_2 c_{12})\} k_4 + \{m_1(m_2 k_3 + c_2 c_3) + m_2 c_{12} c_3 c_4 + m_3 m_1 k_{23} + m_2 k_{12} \\
 + c_1 c_2 + c_{12} c_3\} c_4 + \{m_2(c_{12} k_{34} + c_{34} k_{12}) + m_1(c_{23} k_4 + c_{42} k_3 + c_{32} k_2) + c_1 c_2 c_{34} + c_{12} c_3 c_4 + m_3(c_1 k_2 + c_{12} k_3 \\
 + c_{23} k_1 + c_3 k_2)\} m_4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_5 = \{m_1(m_2 k_3 + c_2 c_3) + m_2 c_{12} c_3\} k_4 + \{m_1(c_3 k_2 + c_2 k_3) + m_2(c_{12} k_3 + c_3 k_{12}) + m_3(c_1 k_2 + c_{12} k_3 + c_{23} k_1 + c_3 k_2) \\
 + c_1 c_2 c_3\} c_4 + \{(m_2 k_{12} + c_1 c_2) k_{34} + (c_1 k_2 + c_2 k_1) c_{34} + m_1(k_{23} k_4 + k_2 k_3) + c_{12}(c_3 k_4 + c_4 k_3) + c_3 c_4 k_{12} \\
 + m_3(k_1 k_2 + k_{12} k_3)\} m_4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_6 = \{m_1(c_3 k_3 + c_3 k_2) + m_2(c_{12} k_3 + c_3 k_{12}) + c_1 c_2 c_3 + m_3(c_1 k_2 + c_{12} k_3 + c_{23} k_1 + c_3 k_2)\} k_4 + \{(m_2 k_{12} + c_1 c_2) k_3 \\
 + (c_1 k_2 + c_2 k_1) c_3 + m_1 k_2 k_3 + m_3(k_1 k_2 + k_{12} k_3)\} c_4 + \{c_4(k_1 k_2 + k_{12} k_3) + c_3 k_1 k_2 + k_1(c_1 k_2 + c_{12} k_3 + c_{23} k_1 \\
 + c_3 k_1) + k_3(c_1 k_2 + c_2 k_1)\} m_4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_7 = \{m_3(k_{12} k_3 + k_1 k_2) + c_3(c_1 k_2 + c_2 k_1) + (m_1 k_3 + m_2 k_{12} + c_1 c_2) k_3\} k_4 + c_3 c_4 k_1 k_2 + k_3 k_4(c_1 k_2 + c_2 k_1) \\
 + m_4(k_1 k_2 k_{34} + k_{12} k_3 k_4)
 \end{aligned}$$

$$A_8 = c_4 k_1 k_2 k_3 + \{c_3 k_1 k_2 + k_3(c_1 k_2 + c_2 k_1)\} k_4$$

$$A_9 = k_1 k_2 k_3 k_4$$

になるが、ここでは便宜上 $c_{\lambda\mu} = c_\lambda + c_\mu$, $k_{\lambda\mu} = k_\lambda + k_\mu$ とおいている。

b) 多質点系せん断振動の Modal Analysis

強制外力を各質点に作用し、それを各次の振動について固有関数に応じて配分すると

$$m_r \ddot{y} = \sum_{\lambda=1}^n m_r Y_{r\lambda} Q_\lambda \dots\dots\dots (18)$$

で表わせる。ここで Q_λ は固有関数の直交性を用いて次のように求める。

$$Q_\lambda = \frac{\sum_{r=1}^n m_r Y_{r\lambda}}{\sum_{r=1}^n m_r Y_{r\lambda}^2} \ddot{y} \equiv \beta_{\lambda\lambda} \ddot{y} \dots\dots\dots (19)$$

ここに、 $Y_{r\lambda}$ は質点 r の第 λ 次固有関数で $\beta_{\lambda\lambda}$ は λ 次刺激係数である。

自由振動について、式(13)の一般解は

$$u_r = \sum_{\lambda=1}^n e^{-h_\lambda p_\lambda t} Y_{r\lambda} (A_\lambda \cos p_\lambda t + B_\lambda \sin p_\lambda t) \dots\dots\dots (20)$$

である。各質点の振動は各次の固有関数に各次の規準 mode をかけたものの和で表わせるから、

$$u_\lambda = \sum_{r=1}^n Y_{r\lambda} q_\lambda \dots\dots\dots (21)$$

で、 q_λ は第 r 次規準 mode を表わす。従って $\sum_{r=1}^n m_r Y_{r\lambda}^2 \neq 0$ のとき、

$$q_\lambda + 2h_\lambda p_\lambda q_\lambda + p_\lambda q_\lambda = -Q_\lambda \dots\dots\dots (22)$$

を得る。ここに、

$$2h_\lambda p_\lambda = \frac{\sum_{r=1}^n c_r (Y_{r\lambda} - Y_{r-1,\lambda})^2}{\sum_{r=1}^n m_r Y_{r\lambda}^2}, \quad p_\lambda = \frac{\sum_{r=1}^n k_r (Y_{r\lambda} - Y_{r-1,\lambda})^2}{\sum_{r=1}^n m_r Y_{r\lambda}^2} \dots\dots\dots (23)$$

である。

前述の式(2)を解いたように Laplace 変換を用いて、(11)式と同形の解を求める。

$$-Q_\lambda = -\beta_{\lambda\lambda} \ddot{y} = p_\lambda^2 f_\lambda(t), \quad q_{0\lambda} \supset X_\lambda(s)$$

$$f_\lambda(t) \supset F_\lambda(s) = H_{0\lambda}(s)/H_\lambda(s)$$

$$\Phi_{\lambda\mu}(s) = (s - b_{\lambda\mu})^{k_\mu} X_\lambda(s)$$

と約束すると式(22)の解は

$$\begin{aligned} q_\lambda = & \frac{\sqrt{v_{0\lambda}^2 + 2h_\lambda p_\lambda u_{0\lambda} + p_\lambda^2 u_{0\lambda}^2}}{p_0 \sqrt{1 - h_\lambda^2}} e^{-h_\lambda p_\lambda t} \sin(p_\lambda \sqrt{1 - h_\lambda^2} t + \tan^{-1} \frac{p_\lambda \sqrt{1 - h_\lambda^2} u_{0\lambda}}{v_{0\lambda} + h_\lambda p_\lambda u_{0\lambda}}) \\ & + \frac{e^{-h_\lambda p_\lambda t}}{2p_\lambda \sqrt{1 - h_\lambda^2}} \left\{ \{F(-h_\lambda p_\lambda + i p_\lambda^2 \sqrt{1 - h_\lambda^2}) + F(-h_\lambda p_\lambda - i p_\lambda^2 \sqrt{1 - h_\lambda^2})\} \sin p_\lambda \sqrt{1 - h_\lambda^2} t \right. \\ & \quad \left. - i \{F(-h_\lambda p_\lambda + i p_\lambda^2 \sqrt{1 - h_\lambda^2}) - F(-h_\lambda p_\lambda - i p_\lambda^2 \sqrt{1 - h_\lambda^2})\} \cos p_\lambda \sqrt{1 - h_\lambda^2} t \right\} \\ & + \sum_{\alpha=1}^c \frac{H_{0\lambda}(a_{\alpha\lambda})}{(a_{\alpha\lambda}^2 + 2h_\lambda p_\lambda a_{\alpha\lambda} + p_\lambda^2)} e^{a_{\alpha\lambda} t} \\ & + \sum_{r=1}^m \sum_{\beta=1}^k \frac{k_r}{(k_r - \beta)} \frac{\Phi_{r\lambda}^{(k_r - \beta)}(b_{r\lambda}) t^{\beta-1}}{(k_r - \beta)! (\beta - 1)!} e^{b_{r\lambda} t} \dots\dots\dots (24) \end{aligned}$$

よって、応答値は式(21)に式(24)を代入すれば決まる。

以上多質点系のせん断振動を Laplace 変換を用いて解き一般解を求めた。水平変位応答は式(24)で計算できるが、これは強制力の像関数が既知でありしかもそれが微分可能な関数であることが必要である。よって地震波などの Random 波動の場合はそのままでは使用できない。そのため、一手法として強制外力が Fourier 級数で展開される一

般の関数についてその近似解を誘導しよう。

3) Fourier 級数に展開される強制力

強制力 $\ddot{y}$ は $0 \sim T$ (秒) の区間で次のように Fourier 級数に展開できる。

$$-\ddot{y} = \frac{a_0}{2} + \sum_{\omega=1}^{\infty} (a_{\omega} \cos \omega t + b_{\omega} \sin \omega t) \quad (0 < t < T) \dots\dots\dots (25)$$

$\omega \rightarrow 2\pi\omega/T$ におきかえ、項数を有限 M 個とれば、

$$\ddot{y} = -\frac{a_0}{2} + \sum_{\omega=1}^M \left(a_{\omega} \cos \frac{2\pi}{T} \omega t + b_{\omega} \sin \frac{2\pi}{T} \omega t \right) = -\frac{a_0}{2} + \sum_{\omega=1}^M c_{\omega} \sin \left(\frac{2\pi}{T} \omega t + t_{a\omega} - \frac{a_{\omega}}{b_{\omega}} \right) \dots\dots\dots (26)$$

で近似されよう。ただし、 $c_{\omega} = \sqrt{a_{\omega}^2 + b_{\omega}^2}$

$$\left. \begin{aligned} a_{\omega} &= \frac{2}{T} \int_0^t \ddot{y} \cos \frac{2\pi}{T} \omega t \, dt \doteq \frac{2}{K} \sum_{j=1}^K G_j \cos \frac{2\pi}{K} \omega \cdot j \\ b_{\omega} &= \frac{2}{T} \int_0^t \ddot{y} \sin \frac{2\pi}{T} \omega t \, dt \doteq \frac{2}{K} \sum_{j=1}^K G_j \sin \frac{2\pi}{K} \omega \cdot j \end{aligned} \right\} \quad (j = Kt_j/T) \dots\dots\dots (27)$$

と digital 量に表現できよう。ここで G_j は図-3 に示すように強制外力の t_j 時刻における振幅を表わす。図中 $t_k - t_0 = T$ 、 $t_1 - t_0 = dt$ である。

強制外力 $-\ddot{y} = p_i^2 f_i(t)$ の像関数は

$$\begin{aligned} F_i(s) &= H_{0i}(s)/H_i(s) \\ &= \frac{a}{2s} + \sum_{\omega=1}^{\infty} \left(\frac{a_{\omega}s + b_{\omega}}{s^2 + \omega^2} \right) \dots\dots\dots (28) \end{aligned}$$

通分すると、

$$H_i(s) = 2s(s^2 + 1^2)(s^2 + 2^2) \dots (s^2 + \omega^2) \dots$$

$$\begin{aligned} H_{0i}(s) &= a_0(s^2 + 1^2)(s^2 + 2^2) \dots (s^2 + \omega^2) \dots + 2s\{(a_1s + b_1)(s^2 + 2^2) \dots (s^2 + \omega^2) \dots \\ &\quad \times (s^2 + 3^2) \dots (s^2 + \omega^2) \dots + \dots + (a_{\omega}s + b_{\omega})(s^2 + 1^2) \dots (s^2 + (\omega-1)^2)(s^2 + (\omega+1)^2) \dots + \dots \} \end{aligned}$$

になり特性方程式の根、つまり極値は

$$s = -h_i p_i \pm i p_i \sqrt{1 - h_i^2}, \pm i, \pm 2i, \dots, \pm \omega i, \dots$$

なる単根を有する。よって 1) で用いた展開定理および留数定理を使用して、式(21)の強制項は次式で求まる。

$$\begin{aligned} u_r(t) &= -\sum_{\lambda=1}^n \frac{Y_{r\lambda} e^{-h_i p_i t}}{2 p_i \sqrt{1 - h_i^2}} \left\{ \frac{a_0 h_i}{p_i} + 2 \sum_{\omega=1}^{\infty} \frac{a_{\omega} h_i p_i (p_i^2 + \omega^2) - b_{\omega} \omega (2 h_i^2 p_i^2 - p_i^2 + \omega^2)}{p_i^4 + 2 p_i^2 \omega^2 (2 h_i^2 - 1) + \omega^4} \right. \\ &\quad \times \sin p_i \sqrt{1 - h_i^2} t + \left. \frac{a_0 \sqrt{1 - h_i^2}}{p_i} - 2 \sum_{\omega=1}^{\infty} \frac{p_i \sqrt{1 - h_i^2} \{ a_{\omega} (h_i^2 p_i^2 - p_i^2 + \omega^2) + b_{\omega} \omega^3 \}}{p_i^4 + 2 p_i^2 \omega^2 (2 h_i^2 - 1) + \omega^4} \right\} \cos p_i \sqrt{1 - h_i^2} t \\ &\quad + \sum_{\lambda=1}^n Y_{r\lambda} \sum_{\omega=1}^{\infty} \left\{ \frac{2 a_{\omega} h_i p_i \omega + b_{\omega} (p_i^2 - \omega^2)}{(p_i^2 - \omega^2)^2 + 4 h_i^2 p_i^2 \omega^2} \sin \omega t + \frac{a_{\omega} (p_i^2 - \omega^2) - 2 b_{\omega} h_i p_i \omega}{(p_i^2 - \omega^2)^2 + 4 h_i^2 p_i^2 \omega^2} \cos \omega t \right\} \dots\dots\dots (29) \end{aligned}$$

$\omega \rightarrow 2\pi\omega/T$ におきかえ、 Σ を M 項まで近似的に表わせば、数値解が求まる。

III 複素固有値問題の数値解法と解析例

青森県津軽大橋架設地点(A)と北海道札幌市郊外樽川(B)の二地点を例に取り前述の解析方法を用いて数値計算を行なった。A地点(津軽大橋現場)においては1968年来、田治米・渡辺等^{3,4)}により弾性波探査法による地盤の振動測定が行なわれ、また札幌市の周辺では北海道防災会議の member による地盤調査が行なわれた。⁵⁾ 得られた data の解析から A、B (樽川) 二地点における地盤の弾性的性質を求めて整理すると表-1、表-2 に示すごとくなる。

表中の v_p 、 v_s 、 m 、 G および K は P 波の速度、 S 波の速度、単位質量、弾性係数(剛性率)および体積弾性係数である。計算に用いた m 、 k は地表から基盤表面までの距離 H を 5 m の等間隔に分け、各層の中間点で比例分配して単位の質量および質点にかかるばね係数を決めた。つまり

$$m_r = m \frac{l_r}{5} \dots\dots\dots (30)$$

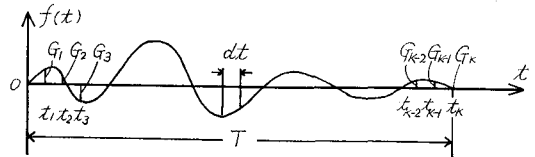


Fig-3 強制外力の読み取りによるデジタル化

表—1 青森県津軽大橋架設地点における地盤の弾性定数

	u_p	u_s	m	G	K
	$\text{cm/sec} \times 10^4$	$\text{cm/sec} \times 10^4$	$\text{kg/cm}^3 \times 10^{-3}$	$\text{kg/cmsec}^2 \times 10^5$	$\text{kg/cmsec}^2 \times 10^7$
0 (m)	4.0	1.45	1.4	0.28	0.14
17	9.0	1.4	1.8	3.53	0.87
30	9.0	2.0	2.0	8.00	1.97
50	14.	3.0	2.2	19.8	4.86
60					

表—2 札幌市郊外樽川における地盤の弾性定数

	u_p	u_s	m	G	K
	$\text{cm/sec} \times 10^5$	$\text{cm/sec} \times 10^4$	$\text{kg/cm}^3 \times 10^{-3}$	$\text{kg/cmsec}^2 \times 10^5$	$\text{kg/cmsec}^2 \times 10^7$
0 (m)	0.34	0.70	1.6	0.78	0.19
5	1.5	1.63	1.9	5.05	2.51
15	1.5	1.90	2.0	7.22	3.58
35	1.7	2.75	2.2	16.6	5.53
50	1.8	3.45	2.3	27.4	6.85
70					

$$k_r = \begin{cases} k & (\text{各層の最上部に質点を取る場合}) \\ k_r \left(1 - \frac{l_r}{2H}\right) + k_{r+1} \frac{l_{r+1}}{2H} & (\text{各層の中間点に質点を取る場合}) \end{cases} \quad (31)$$

で計算に用いた値は表—3に示した。また減衰係数 c は最表層の相対速度に比例する係数として $0.0035 (\text{kg/cm}^3 \text{sec})$ を与え、質量との連成比で次のようにして近似した。

$$c_1/m_1 = c_2/m_2 = \dots = c_n/m_n \quad (32)$$

表—3 計算に用いた各質点系の諸定数
(k は各層の中間点に質点をとる場合)

質点番号	1	2	3	4
A地点				
$m \times 10^{-3} (\text{kg/cm}^3)$	4.8	4.7	8.0	4.4
$c \times 10^{-3} (\text{kg/cm}^3 \text{sec})$	3.5	4.5	5.0	5.5
$k \times 10^7 (\text{kg/cm}^3 \text{sec}^2)$	0.21	1.29	2.03	4.46

質点番号	1	2	3	4	5
B地点					
$m \times 10^{-3} (\text{kg/cm}^3)$	1.6	3.8	8.0	6.6	4.6
$c \times 10^{-3} (\text{kg/cm}^3 \text{sec})$	3.50	4.16	4.38	4.81	5.05
$k \times 10^7 (\text{kg/cm}^3 \text{sec}^2)$	0.36	2.84	3.66	5.92	5.87

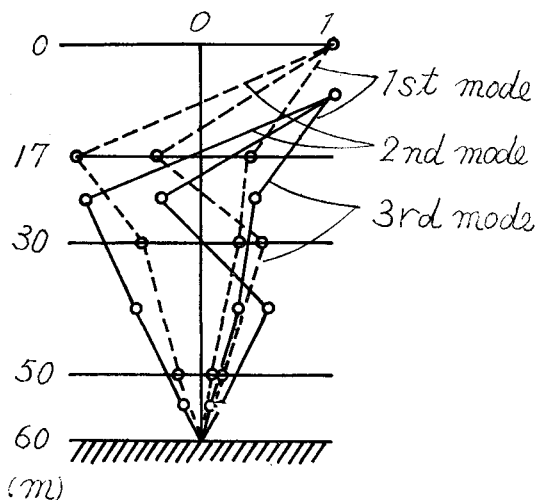
表—4 A地点における固有値

λ 次	1	2	3
$h\lambda$	0.276	0.110	0.079
$\rho\lambda$	4.31	10.58	19.16
$\tau\lambda (\text{sec})$	1.46	0.59	0.33

表—5 B地点における固有値

λ 次	1	2	3
$h\lambda$	0.258	0.163	0.075
$\rho\lambda$	4.88	14.28	21.01
$\tau\lambda (\text{sec})$	1.29	0.44	0.33

固有振動数 p_i 減衰定数 h_i および固有関数 Y_{ri} は式(17)および式(23)を使って求めた。3次 mode まで示すと表—4, 表—5, 図—4, 図—5のごとくなる。図—4の規準 mode は質点の位置を各層の最上部と中間部との二通りの場合を示した。また1968年の十勝沖地震の余震記録の一つを強制外力として応答計算を行なったが、図—6はA地点における地表層の変位応答波形の一例である。地盤の各深部における応答およびそれらの相関の詳細は書面を改めて次回に報告したい。



----- 各層の最上部に質点をとる場合
 ——— 各層の中間点に質点をとる場合

Fig-4 A地点における規準モード

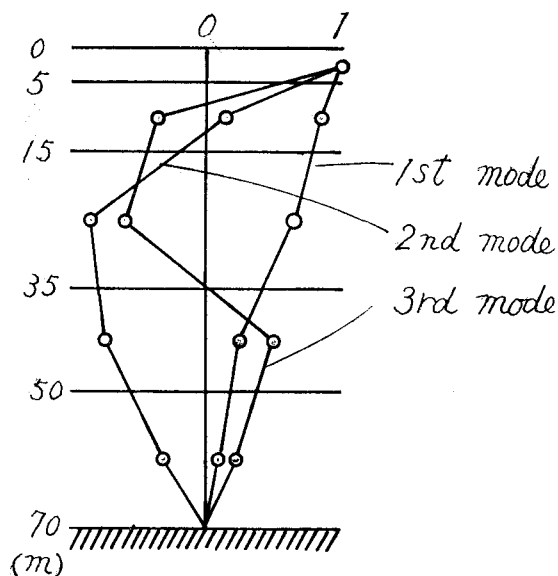


Fig-5 B地点における規準モード

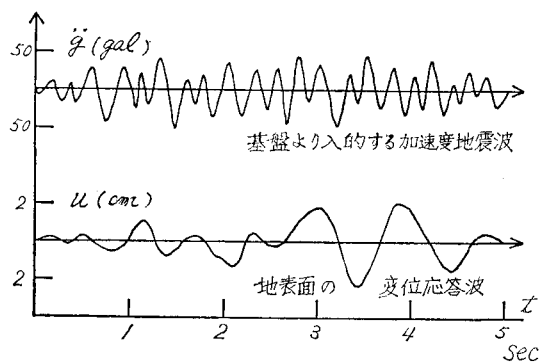


Fig-6

IV あとがき

以上質点数4, 5の場合の複素固有値を求め地震応答解析を行なったが、高次になるに従って固有値決定が非常に困難になるので、如何に一般化していくかはやはり今後の課題として残る。

また、地盤を等価質量—ばね系に置換する方法における質点系モデルの設定は本研究が唯一のものではなく条件を諸々に変えて考査して行きたい。

なお式(11), 式(21)および式(29)の表現方法は強制外力の像関数が判っている場合の一般解であることは前述したが、この式を用いれば任意の強制外力に対する応答値を即座に計算することができる。本研究の目的ではなかったが省略したが各種の単位函数（或いは pulse 函数）を外力とする各質点系の振動挙動を示すための計算

等には便利に使えた。A地点における固有 mode は筆者の文献⁹⁾における地盤を連続体に置換する方法による解析と良く一致するものであった。

計算には北大大型計算センターの FACOM230—50 を使用した。

最後に本論文作成にあたり北大工学部渡辺昇教授の種々の御助言に対し感謝致します。

参考文献

- 1) Idriss and Seed : "SEISMIC RESPONSE of HORIZONTAL SOIL LAYERS" proc. of A.S.C.E 1968.
- 2) Ewing, Jardesky and Press : 「ELASTIC WAVES IN LAYERED MEDIA」 McGRAW-HILL BOOK COMPANY inc.
- 3) 田治米他 : "青森県長泥橋の橋脚の振動測定と地盤調査" 北大地球物理学研究報告, 昭和44年
- 4) 渡辺他 : "軟弱地盤における橋の振動応答について" 土木学会年次学術講演会講演集, 昭和45年
- 5) 鈴木 : "札幌市およびその周辺の1968年十勝沖地震の震度と地盤との関係" 北大地球物理学研究報告, 昭和44年
- 6) 金子 : "多層地盤のせん断波動による地震応答および振幅分布について" 土木学会年次学術講演会講演集, 昭和45年