

曲線変断面梁の振動について

正員 能 町 純 雄*

正員 松 岡 健 一**

学生員 ○佐 渡 公 明***

1. ま え が き

著者らは、これ迄桁の固有振動解析を求めるに当り、力学的に等価な有限自由度のデイスクリートなモデルに単純化し、曲げ及び曲げ振れに対する3連モーメントをフレキシビリティとする方法により精度の良い固有振動解析ができることを研究してきたが、今回はこの方法を曲率半径が任意に変化する変断面曲線梁に適用したものである。

一般に曲線梁の振動は、曲げと曲げ振れの連成振動であるので曲げ振動に対しては各分割点の撓み f_r と曲げモーメント M_r を未知量とし、曲げ振れ振動に対しては振

れ角 θ_r と曲げ振れモーメント B_r を未知量とする。 f_r , θ_r については夫々 r 点の両区画部分のせん断力の釣合い及び振りモーメントの釣合いをとり、 M_r, B_r については r 点で撓み角及び振れ角が連続しているという条件即ち曲げ及び曲げ振れに対する3連モーメント式を用い、慣性力及び慣性トルクが各分割点に作用すると仮定して、固有値、固有ベクトルを求めようとするものである。

2. 記 号

$0, 1, \dots, r, r+1, \dots, n: 1$ スパンを n 等分したときの分割点

$R_r: r-1, r$ 点間を1ケの円曲線で置き換

えたときの曲率半径

$\ell_r: r-1, r$ 点間の円弧長

T : せん断中心

G : 重心

e_r : 分割点 r に於る断面の T と G との間の距離

A_r : " " " 断面積

I_{pr} : " " " 断面2次極モーメント

GJ_{r+1} : 分割点 $r, r+1$ 区間の平均振り剛性

EC_{wr+1} : " " " 平均曲げ振り剛性

I_{yr+1} : " " " y 軸に関する平均断面2次モーメント

P_{zr} : r 点に作用する z 方向集中荷重

M_{Tr} : " " " 集中振りモーメント荷重

$Q_{r,r+1}$: r 断面で $r+1$ 方向の梁に作用する z 方向せん断力

$H_{r,r+1}$: " " " " 全振りモーメント

M_r : r 断面に作用する y 軸廻りの曲げモーメント

t : 等分布振りモーメント荷重及び時間

p_z : z 方向の等分布荷重

f_r : r 点の垂直変位

θ_r : " 振り角

$\rho_{r+1} = \ell_{r+1}/R_{r+1}$

$$k_{r+1}^2 = \frac{GJ_{r+1}}{EC_{wr+1}} R_{r+1}^2$$

$$w_{r+1}(x) = \frac{\ell_{r+1} \sin \frac{x}{R_{r+1}}}{\sin \frac{\ell_{r+1}}{R_{r+1}}} - x$$

* 室蘭工業大学 教授 工博

** 室蘭工業大学 助教授 工修

*** 室蘭工業大学 大学院

$$\varphi_{r+1} = \theta_{r+1} + f_{r+1}/R_{r+1}$$

$$\text{但し } \varphi_0 = \theta_0 + f_0/R_1$$

$$\phi_{r+1}(x) = \frac{\ell_{r+1} \sinh \frac{k_{r+1} x}{R_{r+1}}}{\sinh \frac{k_{r+1} \ell_{r+1}}{R_{r+1}}} - x$$

$$\eta_{r+1} = 1 + k_{r+1}^2$$

$$\psi_{r+1}(x) = \frac{1}{4 \sin^2 \frac{\ell_{r+1}}{R_{r+1}}} \left\{ (\ell_{r+1} + x) \sin \left(\frac{\ell_{r+1} - x}{R_{r+1}} \right) - (\ell_{r+1} - x) \sin \left(\frac{\ell_{r+1} + x}{R_{r+1}} \right) \right\}$$

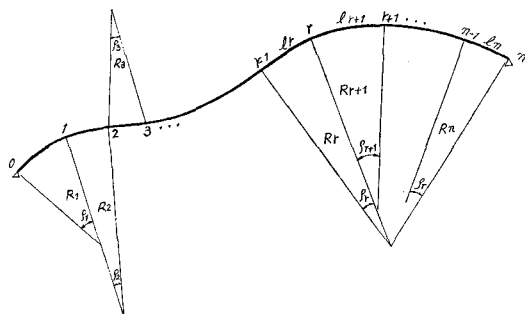
$$\alpha_{r+1}(x) = \left(\frac{GJ_{r+1}}{EI_{r+1}} + 1 - \frac{1}{\eta_{r+1}} \right) \psi'_{r+1}(x) - \frac{w'_{r+1}(x)}{\rho_{r+1}} + \frac{w'_{r+1}(x) - \phi'_{r+1}(x)}{\eta_{r+1} \rho_{r+1}}$$

$$\beta_{r+1}(x) = \frac{w'_{r+1}(x) - \phi'_{r+1}(x)}{\eta_{r+1}} - w'_{r+1}(x)$$

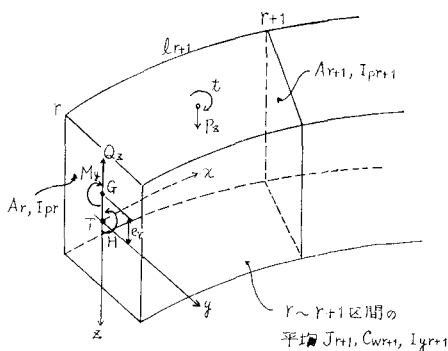
ρ : 円振動数

B_r : r 点の曲げ捩れモーメント

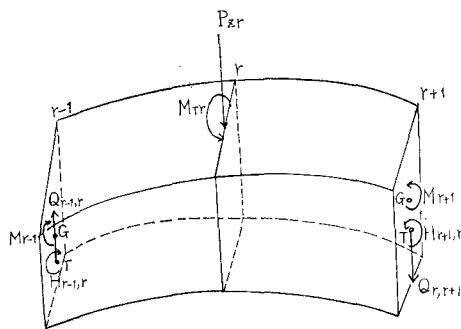
E : 単位マトリックス



図—1



図—2



図—3

3. 基礎方程式

図—2を参照して t, p_z 荷重を受ける桁の z 方向の力の釣合い及び x, y 軸廻りのモーメントの釣合いから $r \sim r+1$ 区間に対し次式を得る。

$$\dot{Q}_z + p_z = 0 \quad (1)$$

$$\dot{H} - M_y/R_{r+1} + t = 0 \quad (2)$$

$$\dot{M}_y + H/R_{r+1} - Q_z = 0 \quad (3)$$

$\dot{}$ は曲線座標軸 x についての微分を表す。各分割点に質量が集中しているとする多質点系の振動を論じているから $p_z = t = 0$ とおき、(3)を1回微分し(1), (2)を代入して

$$\dot{M}_y + M_y/R_{r+1}^2 = 0 \quad (4)$$

(4)を境界条件($x = 0$ で $M_y = M_r$, $x = \ell_{r+1}$ で $M_y = M_{r+1}$)のもとに解くと

$$M_y = \frac{\sin \frac{\ell_{r+1}-x}{R_{r+1}}}{\sin \frac{\ell_{r+1}}{R_{r+1}}} M_r + \frac{\sin \frac{x}{R_{r+1}}}{\sin \frac{\ell_{r+1}}{R_{r+1}}} M_{r+1} \quad (5)$$

(5)を1回及び2回積分して(但し, $M_r = M_y$) $_r$, $M_{r+1} = M_y$) $_{r+1}$ の意味である)

$$\int M_y dx = \frac{R_{r+1}^2}{\ell_{r+1}} w'_{r+1}(\ell_{r+1}-x) M_r - \frac{R_{r+1}^2}{\ell_{r+1}} w'_{r+1}(x) M_{r+1} + \frac{\bar{M}_{r+1}}{\ell_{r+1}} - \frac{\bar{M}_r}{\ell_{r+1}} \quad (6)$$

$$\int \int M_y dx dx = -\frac{R_{r+1}^2}{\ell_{r+1}} w_{r+1}(\ell_{r+1}-x) M_r - \frac{R_{r+1}^2}{\ell_{r+1}} w_{r+1}(x) M_{r+1} + x \bar{M}_{r+1}/\ell_{r+1} + (\ell_{r+1}-x) \bar{M}_r/\ell_{r+1} \quad (7)$$

$$\text{但し } \bar{M}_r = \iint M_y dx dx \quad (8)$$

$r \sim r+1$ 区間に対し

$$\dot{H} = GJ_{r+1} \ddot{\varphi} - EC w_{r+1} \varphi = GJ_{r+1} \ddot{\varphi} + \ddot{B} = M_y/R_{r+1} \quad (9)$$

(9)を2回積分して

$$GJ_{r+1} \varphi + B = -\frac{\bar{M}_y}{R_{r+1}} + \frac{\ell_{r+1}-x}{\ell_{r+1}} (B_r + GJ_{r+1} \varphi_r) + \frac{x}{\ell_{r+1}} (B_r + GJ_{r+1} \varphi_{r+1}) - \frac{1}{R_{r+1}} \left(\frac{x}{\ell_{r+1}} \bar{M}_{r+1} + \frac{(\ell_{r+1}-x)}{\ell_{r+1}} \bar{M}_r \right) \quad (10)$$

$$\therefore H = GJ_{r+1} \dot{\varphi} + \dot{B} = \frac{\bar{M}_y}{R_{r+1}} + \frac{1}{\ell_{r+1}} \{ B_{r+1} - B_r + GJ_{r+1} (\varphi_{r+1} - \varphi_r) \} - \frac{1}{R_{r+1} \ell_{r+1}} (\bar{M}_{r+1} - \bar{M}_r) \quad (11)$$

よって $r \sim r+1$ 区間の H は

$$H = \frac{w'_{r+1}(\ell_{r+1}-x)}{\rho_{r+1}} M_r - \frac{w'_{r+1}(x)}{\rho_{r+1}} M_{r+1} + \frac{B_{r+1} - B_r}{\ell_{r+1}} + \frac{GJ_{r+1}}{\ell_{r+1}} \{ (\theta_{r+1} - \theta_r) + \frac{f_{r+1}}{R_{r+1}} - \frac{f_r}{R_r} \} \quad (12)$$

(12)に $x=0$, ℓ_{r+1} を代入して $H_{r,r+1}$, $H_{r+1,r}$ を求めると

$$H_{r,r+1} = \frac{w'_{r+1}(\ell_{r+1})}{\rho_{r+1}} M_r - \frac{w'_{r+1}(0)}{\rho_{r+1}} M_{r+1} + \frac{B_{r+1} - B_r}{\ell_{r+1}} + \frac{GJ_{r+1}}{\ell_{r+1}} \{ (\theta_{r+1} - \theta_r) + \frac{f_{r+1}}{R_{r+1}} - \frac{f_r}{R_r} \} \quad (13)$$

$$H_{r+1,r} = \frac{w'_{r+1}(0)}{\rho_{r+1}} M_r - \frac{w'_{r+1}(\ell_{r+1})}{\rho_{r+1}} M_{r+1} + \frac{B_{r+1} - B_r}{\ell_{r+1}} + \frac{GJ_{r+1}}{\ell_{r+1}} \{ (\theta_{r+1} - \theta_r) + \frac{f_{r+1}}{R_{r+1}} - \frac{f_r}{R_r} \} \quad (14)$$

3-1 トルクの釣合い式

図-3に於て r の両区画部分の振りモーメントの釣合いを取ると $H_{r+1,r} - H_{r-1,r} + M_{Tr} = 0$ (15)

(13), (14)を代入して整理すれば ($H_{r-1,r}$ は(13)のサイフィックス r , $r+1$ を夫々 $r-1$, $r+1$ だけ下げれば良い)

$$\begin{aligned} & -\frac{w'_r(\ell_r)}{\rho_r} M_{r-1} + \left(\frac{w'_r(0)}{\rho_r} + \frac{w'_{r+1}(0)}{\rho_{r+1}} \right) M_r - \frac{w'_{r+1}(\ell_{r+1})}{\rho_{r+1}} M_{r+1} + \frac{B_{r-1}}{\ell_r} - \left(\frac{1}{\ell_r} + \frac{1}{\ell_{r+1}} \right) B_r \\ & + \frac{B_{r+1}}{\ell_{r+1}} + \frac{GJ_r}{\ell_r} \theta_{r-1} - \left(\frac{GJ_r}{\ell_r} + \frac{GJ_{r+1}}{\ell_{r+1}} \right) \theta_r + \frac{GJ_{r+1}}{\ell_{r+1}} \theta_{r+1} + \frac{GJ_r}{\ell_r} \frac{f_{r-1}}{R_{r-1}} \\ & - \left(\frac{GJ_r}{\ell_r} + \frac{GJ_{r+1}}{\ell_{r+1}} \right) \frac{f_r}{R_r} + \frac{GJ_{r+1}}{\ell_{r+1}} \frac{f_{r+1}}{R_{r+1}} + M_{Tr} = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

$w'_r(0)$, $w'_r(\ell_r)$ をテーラー展開し微少項(ρ^3 以下)を無視して

$$w'_r(0) = \frac{\rho_r^2}{6} + \frac{7}{360} \rho_r^4 = \frac{\rho_r^2}{6} \quad w'_r(\ell_r) = -\frac{\rho_r^2}{3} - \frac{\rho_r^4}{45} = -\frac{\rho_r^2}{3}$$

よって(16)は

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{6} \left[2 \frac{\ell_r}{R_r} M_{r-1} + \left(\frac{\ell_r}{R_r} + \frac{\ell_{r+1}}{R_{r+1}} \right) M_r + 2 \frac{\ell_{r+1}}{R_{r+1}} M_{r+1} \right] + \frac{B_{r-1}}{\ell_r} - \left(\frac{1}{\ell_r} + \frac{1}{\ell_{r+1}} \right) B_r + \frac{B_{r+1}}{\ell_{r+1}} \\ & + G \left[\frac{J_r}{\ell_r} \theta_{r-1} - \left(\frac{J_r}{\ell_r} + \frac{J_{r+1}}{\ell_{r+1}} \right) \theta_r + \frac{J_{r+1}}{\ell_{r+1}} \theta_{r+1} \right] \\ & + G \left[\frac{J_r}{\ell_r} \frac{f_{r-1}}{R_{r-1}} - \left(\frac{J_r}{\ell_r} + \frac{J_{r+1}}{\ell_{r+1}} \right) \frac{f_r}{R_r} + \frac{J_{r+1}}{\ell_{r+1}} \frac{f_{r+1}}{R_{r+1}} \right] + M_{Tr} = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

この(17)が曲率半径が任意に変化する変断面曲線桁の分割点に集中振りモーメント荷重を受けたときのトルクの釣合い式である。

3-2 セン断力の釣合い式

(5)の M_y , (12)の H を(3)に代入して, $r \sim r+1$ 区間の格間せん断力を求めると

$$Q_{r,r+1} = Q_{r+1,r} = \frac{M_{r+1} - M_r}{\ell_{r+1}} + \frac{B_{r+1} - B_r}{R_{r+1} \ell_{r+1}} + \frac{GJ_{r+1}}{R_{r+1} \ell_{r+1}} \left\{ (\theta_{r+1} - \theta_r) + \left(\frac{f_{r+1}}{R_{r+1}} - \frac{f_r}{R_r} \right) \right\} \quad (18)$$

尚 $Q_{r,r+1}$ は Q_z の意味で z 方向のせん断力であるが、まぎらわしいので z を省いた。

$$\text{図-3 のせん断力の釣合い } Q_{r,r+1} - Q_{r-1,r} + P_{zr} = 0 \quad (19)$$

に(18)を代入し整理すると

$$\begin{aligned} & \frac{M_{r-1}}{\ell_r} - \left(\frac{1}{\ell_r} + \frac{1}{\ell_{r+1}} \right) M_r + \frac{M_{r+1}}{\ell_{r+1}} + \frac{B_{r-1}}{R_r \ell_r} - \left(\frac{1}{R_r \ell_r} + \frac{1}{R_{r+1} \ell_{r+1}} \right) B_r + \frac{B_{r+1}}{R_{r+1} \ell_{r+1}} \\ & + G \left[\frac{J_r}{R_r \ell_r} \theta_{r-1} - \left(\frac{J_r}{R_r \ell_r} + \frac{J_{r+1}}{R_{r+1} \ell_{r+1}} \right) \theta_r + \frac{J_{r+1}}{R_{r+1} \ell_{r+1}} \theta_{r+1} \right] \\ & + G \left[\frac{J_r}{R_r \ell_r} \frac{f_{r-1}}{R_{r-1}} - \left(\frac{J_r}{R_r \ell_r} + \frac{J_{r+1}}{R_{r+1} \ell_{r+1}} \right) \frac{f_r}{R_r} + \frac{J_{r+1}}{R_{r+1} \ell_{r+1}} \frac{f_{r+1}}{R_{r+1}} \right] + P_{zr} = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

3-3 捩れ角の連続条件

今迄と同様に $r \sim r+1$ 区間について求めれば充分である。

(9)に $GJ_{r+1}\ddot{\varphi} = -k_{r+1}^2 B/R_{r+1}^2$ と(5)の M_y を代入して

$$\ddot{B} - \frac{k_{r+1}^2}{R_{r+1}^2} B = \frac{\sin \frac{\ell_{r+1} - x}{R_{r+1}}}{\sin \frac{\ell_{r+1}}{R_{r+1}}} \frac{M_r}{R_{r+1}} + \frac{\sin \frac{x}{R_{r+1}}}{\sin \frac{\ell_{r+1}}{R_{r+1}}} \frac{M_{r+1}}{R_{r+1}} \quad (21)$$

これを境界条件 ($x=0$ で $B=B_r$, $x=\ell_{r+1}$ で $B=B_{r+1}$) のもとに解くと

$$\begin{aligned} B = & \frac{\sinh \frac{k_{r+1}x}{R_{r+1}}}{\sinh \frac{k_{r+1}\ell_{r+1}}{R_{r+1}}} B_{r+1} + \frac{\sinh \frac{k_{r+1}(\ell_{r+1}-x)}{R_{r+1}}}{\sinh \frac{k_{r+1}\ell_{r+1}}{R_{r+1}}} B_r + \frac{R_{r+1}}{\eta_{r+1}} \left\{ \frac{\sinh \frac{k_{r+1}x}{R_{r+1}}}{\sinh \frac{k_{r+1}\ell_{r+1}}{R_{r+1}}} - \frac{\sin \frac{x}{R_{r+1}}}{\sin \frac{\ell_{r+1}}{R_{r+1}}} \right\} M_{r+1} \\ & + \frac{R_{r+1}}{\eta_{r+1}} \left\{ \frac{\sinh \frac{k_{r+1}(\ell_{r+1}-x)}{R_{r+1}}}{\sinh \frac{k_{r+1}\ell_{r+1}}{R_{r+1}}} - \frac{\sin \frac{\ell_{r+1}-x}{R_{r+1}}}{\sin \frac{\ell_{r+1}}{R_{r+1}}} \right\} M_r \end{aligned} \quad (22)$$

(10)に(22)を代入し φ を求めると

$$\begin{aligned} \varphi = & -\frac{1}{GJ_{r+1} \rho_{r+1}} \left[\frac{\phi_{r+1}(x) - w_{r+1}(x)}{\eta_{r+1}} + w_{r+1}(x) \right] M_{r+1} \\ & - \frac{1}{GJ_{r+1} \rho_{r+1}} \left[\frac{\phi_{r+1}(\ell_{r+1}-x) - w_{r+1}(\ell_{r+1}-x)}{\eta_{r+1}} + w_{r+1}(\ell_{r+1}-x) \right] M_r \\ & - \frac{\phi_{r+1}(x) B_{r+1}}{GJ_{r+1} \ell_{r+1}} - \frac{\phi_{r+1}(\ell_{r+1}-x) B_r}{GJ_{r+1} \ell_{r+1}} + \frac{x \phi_{r+1}}{\ell_{r+1}} + \frac{(\ell_{r+1}-x) \phi_r}{\ell_{r+1}} \end{aligned} \quad (23)$$

これより $d\varphi/dx|_{r,r+1} = d\varphi/dx|_{x=0}$ 及び $r-1 \sim r$ 区間の φ を微分して $d\varphi/dx|_{r,r-1} = d\varphi/dx|_{x=\ell_r}$ を求め、捩れ角が微分的に連続しているという条件 $d\varphi/dx|_{r,r+1} = d\varphi/dx|_{r,r-1}$ を計算し整理して (φ は捩れ角ではないが、 $\varphi = \theta + f/R$ の線形関係があり次の3-4で捩み角の連続条件を求めているから捩れ角 θ の連続条件を φ で置き換えている)

$$\begin{aligned} & \frac{\beta_r(0)}{GJ_{r\rho_r}} M_{r-1} - \left(\frac{\beta_r(\ell_r)}{GJ_{r\rho_r}} + \frac{\beta_{r+1}(\ell_{r+1})}{GJ_{r+1} \rho_{r+1}} \right) M_r + \frac{\beta_{r+1}(0)}{GJ_{r+1} \rho_{r+1}} M_{r+1} \\ & - \frac{\phi'_r(0)}{GJ_r \ell_r} B_{r-1} + \left(\frac{\phi'_r(\ell_r)}{GJ_r \ell_r} + \frac{\phi'_{r+1}(\ell_{r+1})}{GJ_{r+1} \ell_{r+1}} \right) B_r - \frac{\phi'_{r+1}(0)}{GJ_{r+1} \ell_{r+1}} B_{r+1} \\ & + \frac{\theta_{r-1}}{\ell_r} - \left(\frac{1}{\ell_r} + \frac{1}{\ell_{r+1}} \right) \theta_r + \frac{\theta_{r+1}}{\ell_{r+1}} + \frac{f_{r-1}}{\ell_r R_{r-1}} - \left(\frac{1}{\ell_r} + \frac{1}{\ell_{r+1}} \right) \frac{f_r}{R_r} + \frac{f_{r+1}}{\ell_{r+1} R_{r+1}} = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

$\beta_r(0)$, $\beta_r(\ell_r)$, $\phi'_r(0)$, $\phi'_r(\ell_r)$ をテーラー展開し微少項 (ρ^3 以下) を無視すると

$$\begin{aligned} \beta_r(0) & \approx -\frac{7}{360} k_r^2 \rho_r^4 = 0 & \beta_r(\ell_r) & \approx \frac{1}{45} k_r^2 \rho_r^4 = 0 \\ \phi'_r(0) & = -\frac{k_r^2 \rho_r^2}{6} + \frac{7}{360} k_r^4 \rho_r^4 = -\frac{k_r^2 \rho_r^2}{6} & \phi'_r(\ell_r) & = \frac{k_r^2 \rho_r^2}{3} - \frac{k_r^4 \rho_r^4}{45} = \frac{k_r^2 \rho_r^2}{3} \end{aligned}$$

よって(24)は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6} G \left[\frac{k_r^2 \ell_r}{J_r R_r^2} B_{r-1} + 2 \left(\frac{k_r^2 \ell_r}{J_r R_r^2} + \frac{k_{r+1}^2 \ell_{r+1}}{J_{r+1} R_{r+1}^2} \right) B_r + \frac{k_{r+1}^2 \ell_{r+1}}{J_{r+1} R_{r+1}^2} B_{r+1} \right] + \frac{\theta_{r-1}}{\ell_r} - \left(\frac{1}{\ell_r} + \frac{1}{\ell_{r+1}} \right) \theta_r + \frac{\theta_{r+1}}{\ell_{r+1}} \\ & + \frac{1}{\ell_r} \frac{f_{r-1}}{R_{r-1}} - \left(\frac{1}{\ell_r} + \frac{1}{\ell_{r+1}} \right) \frac{f_r}{R_r} + \frac{1}{\ell_{r+1}} \frac{f_{r+1}}{R_{r+1}} = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

これが曲率半径が任意に変化する変断面曲線桁の曲げ振れに対する3連モーメント式である。

3-4 撓み角の連続条件

$r \sim r+1$ 区間の M_y は f , θ を用いて次式で表わされる。

$$M_y = -EI_{yr+1}(\ddot{f} - \theta/R_{r+1}) \quad (26)$$

(26)の式の導き方は文献4参照)

(26)の θ を (5) に代入して

$$\ddot{f} + f/R_{r+1}^2 - \varphi/R_{r+1} + M_y/EI_{yr+1} = 0 \quad (27)$$

(27)の φ , (5)の M_y を代入して、境界条件 ($x=0$ で $f=f_r$, $x=\ell_{r+1}$ で $f=f_{r+1}$) のもとに解くと

$$\begin{aligned} f = & \frac{R_{r+1}}{GJ_{r+1}} \left\{ \left(\frac{GJ_{r+1}}{EI_{yr+1}} + 1 - \frac{1}{\eta_{r+1}} \right) \Psi_{r+1}(\ell_{r+1} - x) - \frac{w_{r+1}(\ell_{r+1} - x)}{\rho_{r+1}} + \frac{w_{r+1}(\ell_{r+1} - x) - \phi_{r+1}(\ell_{r+1} - x)}{\eta_{r+1} \rho_{r+1}} \right\} M_r \\ & + \frac{R_{r+1}}{GJ_{r+1}} \left\{ \left(\frac{GJ_{r+1}}{EI_{yr+1}} + 1 - \frac{1}{\eta_{r+1}} \right) \Psi_{r+1}(x) - \frac{w_{r+1}(x)}{\rho_{r+1}} + \frac{w_{r+1}(x) - \phi_{r+1}(x)}{\eta_{r+1} \rho_{r+1}} \right\} M_{r+1} \\ & + \frac{1}{GJ_{r+1} \rho_{r+1}} \left\{ \frac{w_{r+1}(\ell_{r+1} - x) - \phi_{r+1}(\ell_{r+1} - x)}{\eta_{r+1}} - w_{r+1}(\ell_{r+1} - x) \right\} B_r \\ & + \frac{1}{GJ_{r+1} \rho_{r+1}} \left\{ \frac{w_{r+1}(x) - \phi_{r+1}(x)}{\eta_{r+1}} - w_{r+1}(x) \right\} B_{r+1} - \frac{w_{r+1}(\ell_{r+1} - x)}{\rho_{r+1}} \varphi_r \\ & - \frac{w_{r+1}(x)}{\rho_{r+1}} \varphi_{r+1} + \frac{w_{r+1}(\ell_{r+1} - x) + \ell_{r+1} - x}{\ell_{r+1}} f_r + \frac{w_{r+1}(x) + x}{\ell_{r+1}} f_{r+1} \end{aligned} \quad (28)$$

撓み角の連続条件: $df/dx|_{r,r+1} = df/dx|_{r,r-1}$ を計算し整理して

$$\begin{aligned} & -\frac{R_r \alpha_r(0)}{GJ_r} M_{r-1} + \left\{ \frac{R_r \alpha_r(\ell_r)}{GJ_r} + \frac{R_{r+1} \alpha_{r+1}(\ell_{r+1})}{GJ_{r+1}} \right\} M_r - \frac{R_{r+1} \alpha_{r+1}(0)}{GJ_{r+1}} M_{r+1} \\ & - \frac{\beta_r(0)}{GJ_r \rho_r} B_{r-1} + \left\{ \frac{\beta_r(\ell_r)}{GJ_r \rho_r} + \frac{\beta_{r+1}(\ell_{r+1})}{GJ_{r+1} \rho_{r+1}} \right\} B_r - \frac{\beta_{r+1}(0)}{GJ_{r+1} \rho_{r+1}} B_{r+1} \\ & + \frac{w'_r(0)}{\rho_r} \varphi_{r-1} - \left\{ \frac{w'_r(\ell_r)}{\rho_r} + \frac{w'_{r+1}(\ell_{r+1})}{\rho_{r+1}} \right\} \varphi_r + \frac{w'_{r+1}(0)}{\rho_{r+1}} \varphi_{r+1} \\ & - \frac{(w'_r(0) + 1)}{\ell_r} f_{r-1} + \left\{ \frac{w'_r(\ell_r) + 1}{\ell_r} + \frac{w'_{r+1}(\ell_{r+1}) + 1}{\ell_{r+1}} \right\} f_r - \frac{(w'_{r+1}(0) + 1)}{\ell_{r+1}} f_{r+1} = 0 \quad (29) \\ & \alpha_r(0) \doteq \frac{GJ_r \rho_r}{6EI_r} \left(1 + \frac{7}{30} \rho_r^2 \right) \doteq \frac{GJ_r}{6EI_r} \rho_r \\ & \alpha_r(\ell_r) \doteq -\frac{GJ_r \rho_r}{3EI_r} \left(1 + \frac{2}{15} \rho_r^2 \right) \doteq -\frac{GJ_r}{3EI_r} \rho_r \end{aligned}$$

よって(29)は

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{6E} \left\{ \frac{\ell_r}{I_r} M_{r-1} + 2 \left(\frac{\ell_r}{I_r} + \frac{\ell_{r+1}}{I_{r+1}} \right) M_r + \frac{\ell_{r+1}}{I_{r+1}} M_{r+1} \right\} \\ & + \frac{1}{6} \left\{ \frac{\ell_r}{R_r} \theta_{r-1} + 2 \left(\frac{\ell_r}{R_r} + \frac{\ell_{r+1}}{R_{r+1}} \right) \theta_r + \frac{\ell_{r+1}}{R_{r+1}} \theta_{r+1} \right\} \\ & + \frac{1}{6} \left\{ \frac{\ell_r}{R_r} \frac{f_{r-1}}{R_{r-1}} + 2 \left(\frac{\ell_r}{R_r} + \frac{\ell_{r+1}}{R_{r+1}} \right) \frac{f_r}{R_r} + \frac{\ell_{r+1}}{R_{r+1}} \frac{f_{r+1}}{R_{r+1}} \right\} \\ & - \left(\frac{\ell_r}{6R_r^2} + \frac{1}{\ell_r} \right) f_{r-1} - \left\{ \frac{\ell_r}{3R_r^2} + \frac{\ell_{r+1}}{3R_{r+1}^2} - \left(\frac{1}{\ell_r} + \frac{1}{\ell_{r+1}} \right) \right\} f_r - \left(\frac{\ell_{r+1}}{6R_{r+1}^2} + \frac{1}{\ell_{r+1}} \right) f_{r+1} = 0 \quad (30) \end{aligned}$$

これが曲率半径が任意に変化する

変断面曲線桁の曲げに対する3連モーメント式である。

4. 曲げ及び曲げ振れの連成振動に対する振動数方程式

4-1 R が任意に変化する変断面曲線桁の場合

$d\varphi/dx|_{r,r+1} = d\varphi/dx|_{r,r-1}$ の条件式(29)をマトリックス表示して

$$(1/6G) \mathbf{A}\{\mathbf{B}\} + \mathbf{B}\{\boldsymbol{\theta}\} + \mathbf{C}\{\mathbf{f}\} = 0 \quad (31)$$

ダランベルの原理により振れの慣性トルクを静荷重に置き換え

$$M_{Tr} = -\frac{rI_p}{g} \left(\frac{\ell_r + \ell_{r+1}}{2} \right) \ddot{\theta} - \frac{rA_{er}}{g} \left(\frac{\ell_r + \ell_{r+1}}{2} \right) e_r \ddot{\theta} \quad (32)$$

記号++は時間 t についての2回微分である。

正弦振動を仮定して

$$\begin{aligned}\theta(x, t) &= \theta(x) \sin pt & B(x, t) &= B(x) \sin pt \\ f(x, t) &= f(x) \sin pt & M(x, t) &= M(x) \sin pt\end{aligned}\quad (33)$$

(32)をトルクの釣合い式(17)に代入し(33)の関係を用いると

$$\begin{aligned}& -\frac{1}{6} \left[2 \frac{\ell_r}{R_r} M_{r-1} + \left(\frac{\ell_r}{R_r} + \frac{\ell_{r+1}}{R_{r+1}} \right) M_r + 2 \frac{\ell_{r+1}}{R_{r+1}} M_{r+1} \right] \\& + \frac{1}{\ell_r} B_{r-1} - \left(\frac{1}{\ell_r} + \frac{1}{\ell_{r+1}} \right) B_r + \frac{1}{\ell_{r+1}} B_{r+1} \\& + G \left[\frac{J_r}{\ell_r} \theta_{r-1} - \left(\frac{J_r}{\ell_r} + \frac{J_{r+1}}{\ell_{r+1}} \right) \theta_r + \frac{J_{r+1}}{\ell_{r+1}} \theta_{r+1} \right] \\& + G \left[\frac{J_r}{\ell_r R_{r-1}} f_{r-1} - \left(\frac{J_r}{\ell_r} + \frac{J_{r+1}}{\ell_{r+1}} \right) \frac{f_r}{R_r} + \frac{J_{r+1}}{\ell_{r+1} R_{r+1}} f_{r+1} \right] \\& + \frac{\gamma p^2}{2g} (\ell_r + \ell_{r+1}) (e_r^2 A_r + I_{pr}) \theta_r = 0\end{aligned}\quad (34)$$

これをマトリックス表示して

$$-\frac{1}{6} \mathbf{D}\{M\} + \mathbf{B}\{B\} + \mathbf{G}\mathbf{F}\{\theta\} + \mathbf{G}\mathbf{G}\{f\} + \frac{\gamma p^2}{g} \mathbf{H}\{\theta\} = 0 \quad (35)$$

スロープの連続条件式(30)をマトリックス表示して

$$(-1/E)\mathbf{J}\{M\} + \mathbf{K}\{\theta\} + 6\mathbf{L}\{f\} = 0 \quad (36)$$

慣性力を集中荷重に置き換えて

$$P_{zr} = -\frac{\gamma A_r}{2g} (\ell_r + \ell_{r+1}) f_r^+ \quad (37)$$

(37)をせん断力の釣合い式(20)に代入し、(32)の関係を用いて

$$\begin{aligned}& -\frac{M_{r-1}}{\ell_r} - \left(\frac{1}{\ell_r} + \frac{1}{\ell_{r+1}} \right) M_r + \frac{M_{r+1}}{\ell_{r+1}} + \frac{B_{r-1}}{R_r \ell_r} - \left(\frac{1}{R_r \ell_r} + \frac{1}{R_{r+1} \ell_{r+1}} \right) B_r + \frac{B_{r+1}}{R_{r+1} \ell_{r+1}} \\& + G \left[\frac{J_r}{R_r \ell_r} \theta_{r-1} - \left(\frac{J_r}{R_r \ell_r} + \frac{J_{r+1}}{R_{r+1} \ell_{r+1}} \right) \theta_r + \frac{J_{r+1}}{R_{r+1} \ell_{r+1}} \theta_{r+1} \right] \\& + G \left[\frac{J_r}{R_r \ell_r} \frac{f_{r-1}}{R_{r-1}} - \left(\frac{J_r}{R_r \ell_r} + \frac{J_{r+1}}{R_{r+1} \ell_{r+1}} \right) \frac{f_r}{R_r} + \frac{J_{r+1}}{R_{r+1} \ell_{r+1}} \frac{f_{r+1}}{R_{r+1}} \right] \\& + \frac{\gamma p^2}{2g} A_r (\ell_r + \ell_{r+1}) f_r = 0\end{aligned}\quad (38)$$

マトリックス表示して

$$\mathbf{B}\{M\} + \mathbf{M}\{B\} + \mathbf{G}\mathbf{N}\{\theta\} + \mathbf{G}\mathbf{P}\{f\} + \frac{\gamma p^2}{g} \mathbf{Q}\{f\} = 0 \quad (39)$$

$$(31)より\{B\} = -6\mathbf{G}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\{\theta\} - 6\mathbf{G}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}\{f\} \quad (40)$$

$$(36)より\{M\} = \mathbf{E}\mathbf{J}^{-1}\mathbf{K}\{\theta\} + 6\mathbf{E}\mathbf{J}^{-1}\mathbf{L}\{f\} \quad (41)$$

(40), (41)を(35), (39)に代入して

$$(\mathbf{E}\mathbf{D}\mathbf{J}^{-1}\mathbf{L} - 6\mathbf{G}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C} + \mathbf{G}\mathbf{G})\{f\} + \left(-\frac{1}{6}\mathbf{E}\mathbf{D}\mathbf{J}^{-1}\mathbf{K} - 6\mathbf{G}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{G}\mathbf{F} + \frac{\gamma p^2}{g}\mathbf{H} \right)\{\theta\} = 0 \quad (42)$$

$$(6\mathbf{E}\mathbf{B}\mathbf{J}^{-1}\mathbf{L} - 6\mathbf{G}\mathbf{M}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C} + \mathbf{G}\mathbf{P} + \frac{\gamma p^2}{g}\mathbf{Q})\{f\} + (\mathbf{E}\mathbf{B}\mathbf{J}^{-1}\mathbf{K} - 6\mathbf{G}\mathbf{M}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{G}\mathbf{N})\{\theta\} = 0 \quad (43)$$

(42), (43)を改めて夫々(44), (45)のように表わす。

$$\mathbf{U}\{f\} + \mathbf{V}\{\theta\} = 0 \quad (44) \qquad \mathbf{X}\{f\} + \mathbf{Y}\{\theta\} = 0 \quad (45)$$

$$\left. \begin{aligned}\mathbf{U} &= \mathbf{E}\mathbf{D}\mathbf{J}^{-1}\mathbf{L} - 6\mathbf{G}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C} + \mathbf{G}\mathbf{G} \\ \mathbf{V} &= -\frac{1}{6}\mathbf{E}\mathbf{D}\mathbf{J}^{-1}\mathbf{K} - 6\mathbf{G}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{G}\mathbf{F} + \frac{\gamma p^2}{g}\mathbf{H} \\ \mathbf{X} &= 6\mathbf{E}\mathbf{B}\mathbf{J}^{-1}\mathbf{L} - 6\mathbf{G}\mathbf{M}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C} + \mathbf{G}\mathbf{P} + \frac{\gamma p^2}{g}\mathbf{Q} \\ \mathbf{Y} &= \mathbf{E}\mathbf{B}\mathbf{J}^{-1}\mathbf{K} - 6\mathbf{G}\mathbf{M}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{G}\mathbf{N}\end{aligned} \right\} \quad (46)$$

$$(44), (45)より\{f\}を消去して \quad (\mathbf{X}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{V} - \mathbf{Y})\{\theta\} = 0 \quad (47)$$

$$\{\theta\} \neq 0 \text{ であるから } \quad \text{Det}(\mathbf{X}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{V} - \mathbf{Y}) = 0 \quad (48)$$

(48)が振動数方程式であり、 θ の振動モードは(47)より求まる。又 $\{f\}$ の振動モードは(44), (45)より $\{\theta\}$ を消去し

た次の(49)より求まる。

$$(\mathbf{Y}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{U}-\mathbf{X})\{f\}=0 \quad (49)$$

4-2 R —一定即ち変断面円弧曲線桁の場合

振れ角の連続条件式(25)より

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6GR^2} \left[\frac{k_r^2 \ell_r}{J_r} B_{r-1} + 2 \left(\frac{k_r^2 \ell_r}{J_r} + \frac{k_{r+1}^2 \ell_{r+1}}{J_{r+1}} \right) B_r + \frac{k_{r+1}^2 \ell_{r+1}}{J_{r+1}} B_{r+1} \right] \\ & + \frac{\theta_{r-1}}{\ell_r} - \left(\frac{1}{\ell_r} + \frac{1}{\ell_{r+1}} \right) \theta_r + \frac{\theta_{r+1}}{\ell_{r+1}} + \frac{1}{R} \left[\frac{f_{r-1}}{\ell_r} - \left(\frac{1}{\ell_r} + \frac{1}{\ell_{r+1}} \right) f_r + \frac{f_{r+1}}{\ell_{r+1}} \right] = 0 \end{aligned} \quad (50)$$

マトリックス表示して

$$\text{トルクの釣合(34)より} \quad \frac{1}{6GR^2} \mathbf{A}\{B\} + \mathbf{B}\{\theta\} + \frac{1}{R} \mathbf{B}\{f\} = 0 \quad (51)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6R} \left[2\ell_r M_{r-1} + (\ell_r + \ell_{r+1}) M_r + 2\ell_{r+1} M_{r+1} \right] + \frac{B_{r-1}}{\ell_r} - \left(\frac{1}{\ell_r} + \frac{1}{\ell_{r+1}} \right) B_r + \frac{B_{r+1}}{\ell_{r+1}} \\ & + G \left[\frac{J_r}{\ell_r} \theta_{r-1} - \left(\frac{J_r}{\ell_r} + \frac{J_{r+1}}{\ell_{r+1}} \right) \theta_r + \frac{J_{r+1}}{\ell_{r+1}} \theta_{r+1} \right] \\ & + \frac{G}{R} \left[\frac{J_r}{\ell_r} f_{r-1} - \left(\frac{J_r}{\ell_r} + \frac{J_{r+1}}{\ell_{r+1}} \right) f_r + \frac{J_{r+1}}{\ell_{r+1}} f_{r+1} \right] \\ & + \frac{\gamma p^2}{2g} (\ell_r + \ell_{r+1}) (e_r^2 A + I p_r) \theta_r = 0 \end{aligned} \quad (52)$$

マトリックス表示して

$$\frac{1}{6R} \mathbf{C}\{M\} + \mathbf{B}\{B\} + G\mathbf{D}\{\theta\} + \frac{G}{R} \mathbf{D}\{f\} + \frac{\gamma p^2}{g} \mathbf{F}\{\theta\} = 0 \quad (53)$$

スロープの連続条件(30)より

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{6E} \left[\frac{\ell_r}{I_r} M_{r-1} + 2 \left(\frac{\ell_r}{I_r} + \frac{\ell_{r+1}}{I_{r+1}} \right) M_r + \frac{\ell_{r+1}}{I_{r+1}} M_{r+1} \right] \\ & + \frac{1}{6R} \left[\ell_r \theta_{r-1} + 2(\ell_r + \ell_{r+1}) \theta_r + \ell_{r+1} \theta_{r+1} \right] - \left[\frac{f_{r-1}}{\ell_r} - \left(\frac{1}{\ell_r} + \frac{1}{\ell_{r+1}} \right) f_r + \frac{f_{r+1}}{\ell_{r+1}} \right] = 0 \end{aligned} \quad (54)$$

マトリックス表示して

$$(-1/E) \mathbf{H}\{M\} + (1/R) \mathbf{I}\{\theta\} - 6\mathbf{B}\{f\} = 0 \quad (55)$$

せん断力の釣合い式(38)より

$$\begin{aligned} & \frac{M_{r-1}}{\ell_r} - \left(\frac{1}{\ell_r} + \frac{1}{\ell_{r+1}} \right) M_r + \frac{M_{r+1}}{\ell_{r+1}} + \frac{1}{R} \left[\frac{B_{r-1}}{\ell_r} - \left(\frac{1}{\ell_r} + \frac{1}{\ell_{r+1}} \right) B_r + \frac{B_{r+1}}{\ell_{r+1}} \right] \\ & + \frac{G}{R} \left[\frac{J_r}{\ell_r} \theta_{r-1} - \left(\frac{J_r}{\ell_r} + \frac{J_{r+1}}{\ell_{r+1}} \right) \theta_r + \frac{J_{r+1}}{\ell_{r+1}} \theta_{r+1} \right] \\ & + \frac{G}{R^2} \left[\frac{J_r}{\ell_r} f_{r-1} - \left(\frac{J_r}{\ell_r} + \frac{J_{r+1}}{\ell_{r+1}} \right) f_r + \frac{J_{r+1}}{\ell_{r+1}} f_{r+1} \right] \\ & + \frac{\gamma p^2}{2g} A_r (\ell_r + \ell_{r+1}) f_r = 0 \end{aligned} \quad (56)$$

マトリックス表示して

$$\mathbf{B}\{M\} + \frac{1}{R} \mathbf{B}\{B\} + \frac{G}{R} \mathbf{D}\{\theta\} + \frac{G}{R^2} \mathbf{D}\{f\} + \frac{\gamma p^2}{g} \mathbf{J}\{f\} = 0 \quad (57)$$

(51), (55)より $\{B\}$, $\{M\}$ を求め(53), (57)に代入し整理すると

$$\begin{aligned} & \left(\frac{E}{R} \mathbf{CH}^{-1} \mathbf{B} + 6GR\mathbf{BA}^{-1} \mathbf{B} - \frac{G}{R} \mathbf{D} \right) \{f\} \\ & - \left(\frac{E}{6R^2} \mathbf{CH}^{-1} \mathbf{I} - 6GR^2 \mathbf{BA}^{-1} \mathbf{B} + G\mathbf{D} + \frac{\gamma p^2}{g} \mathbf{F} \right) \{\theta\} = 0 \end{aligned} \quad (58)$$

$$\begin{aligned} & \left(6EB\mathbf{H}^{-1} \mathbf{B} + 6GB\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} - \frac{G}{R^2} \mathbf{D} - \frac{\gamma p^2}{g} \mathbf{J} \right) \{f\} \\ & - \left(\frac{E}{R} \mathbf{BH}^{-1} \mathbf{I} - 6GR\mathbf{BA}^{-1} \mathbf{B} + \frac{G}{R} \mathbf{D} \right) \{\theta\} = 0 \end{aligned} \quad (59)$$

よって R —一定な変断面円弧曲線桁の場合 $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ を次式(60)のように取り, 4-1と同様振動数方程式は(48)より, 振動モードは(47), (49)より求まる

$$\left. \begin{aligned} U &= -\frac{E}{R} \mathbf{C} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{B} + 6 \mathbf{G} \mathbf{R} \mathbf{B} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} - \frac{G}{R} \mathbf{D} \\ V &= -\frac{E}{6R^2} \mathbf{C} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{I} + 6 \mathbf{G} \mathbf{R}^2 \mathbf{B} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} - \mathbf{G} \mathbf{D} - \frac{\gamma p^2}{g} \mathbf{F} \\ X &= 6 \mathbf{E} \mathbf{B} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{B} + 6 \mathbf{G} \mathbf{B} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} - \frac{G}{R^2} \mathbf{D} - \frac{\gamma p^2}{g} \mathbf{J} \\ Y &= -\frac{E}{R} \mathbf{B} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{I} + 6 \mathbf{G} \mathbf{R} \mathbf{B} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} - \frac{G}{R} \mathbf{D} \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

4-3 $R = \infty$ 即ち変断面直線梁の場合

捩れ角の連続条件式(50)に $R = \infty$ を代入して、次の記号を使用すると

λ_{r+1} : 分割点 r と $r+1$ との距離

$$y_r : r \text{ 点の撓み} \quad k_{r+1}^2 = \frac{GJ_{r+1}}{EC_{wr+1}}$$

$$\begin{aligned} \varphi_r(0) &= \frac{1}{\tanh k_{r+1} \lambda_{r+1}} - \frac{1}{k_{r+1} \lambda_{r+1}} - \frac{k_{r+1} \lambda_{r+1}}{3} \\ \varphi_r(1) &= \frac{1}{\sinh k_{r+1} \lambda_{r+1}} - \frac{1}{k_{r+1} \lambda_{r+1}} - \frac{k_{r+1} \lambda_{r+1}}{6} \\ &- \frac{k_r \varphi_{r-1}(1)}{GJ_r} B_{r-1} + \left(\frac{k_r \varphi_{r-1}(0)}{GJ_r} + \frac{k_{r+1} \varphi_r(0)}{GJ_{r+1}} \right) B_r - \frac{k_{r+1} \varphi_r(1)}{GJ_{r+1}} B_{r+1} \\ &- \frac{1}{\lambda_r} \theta_{r-1} - \left(\frac{1}{\lambda_r} + \frac{1}{\lambda_{r+1}} \right) \theta_r + \frac{1}{\lambda_{r+1}} \theta_{r+1} = 0 \end{aligned} \quad (62)$$

$$\text{マトリックス表示して} \quad \mathbf{A}\{B\} + \mathbf{GB}\{\theta\} = 0 \quad (63)$$

トルクの釣合いは(52)より

$$\begin{aligned} & \frac{2g}{r(\lambda_r + \lambda_{r+1})(e_r A_r + I_{pr})} \left\{ \frac{B_{r-1}}{\lambda_r} - \left(\frac{1}{\lambda_r} + \frac{1}{\lambda_{r+1}} \right) B_r + \frac{B_{r+1}}{\lambda_{r+1}} + \frac{GJ_r}{\lambda_r} \theta_{r-1} \right. \\ & \left. - \left(\frac{GJ_r}{\lambda_r} + \frac{GJ_{r+1}}{\lambda_{r+1}} \right) \theta_r + \frac{GJ_{r+1}}{\lambda_{r+1}} \theta_{r+1} \right\} + p^2 \theta_r = 0 \end{aligned} \quad (64)$$

$$\text{マトリックス表示して} \quad \mathbf{C}\{B\} + \mathbf{D}\{\theta\} + p^2 \mathbf{F}\{\theta\} = 0 \quad (65)$$

スロープの連続条件は(54)より

$$-\frac{1}{6E} \left\{ \frac{\lambda_r}{I_r} M_{r-1} + 2 \left(\frac{\lambda_r}{I_r} + \frac{\lambda_{r+1}}{I_{r+1}} \right) M_r + \frac{\lambda_{r+1}}{I_{r+1}} M_{r+1} \right\} + \frac{y_{r-1}}{\lambda_r} - \left(\frac{1}{\lambda_r} + \frac{1}{\lambda_{r+1}} \right) y_r + \frac{y_{r+1}}{\lambda_{r+1}} = 0 \quad (66)$$

$$\text{マトリックス表示して} \quad \mathbf{G}\{M\} + 6 \mathbf{E} \mathbf{B}\{y\} = 0 \quad (67)$$

せん断力の釣合いは(56)より

$$\frac{2g}{r A_r (\lambda_r + \lambda_{r+1})} \left\{ \frac{M_{r-1}}{\lambda_r} - \left(\frac{1}{\lambda_r} + \frac{1}{\lambda_{r+1}} \right) M_r + \frac{M_{r+1}}{\lambda_{r+1}} \right\} + p^2 y_r = 0 \quad (68)$$

$$\text{マトリックス表示して} \quad \mathbf{H}\{M\} + p^2 \mathbf{E}\{y\} = 0 \quad (69)$$

(63), (67)より $\{B\}$, $\{M\}$ を求め(65), (69)に代入して

$$(\mathbf{G} \mathbf{C} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} - \mathbf{D} - p^2 \mathbf{E})\{\theta\} = 0 \quad (70)$$

$$(6 \mathbf{E} \mathbf{H} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{B} - p^2 \mathbf{E})\{y\} = 0 \quad (71)$$

この場合は、曲げ振動、曲げ捩れ振動が夫々独立に生じ曲げ振動の振動数方程式は、

$$\text{Det}(6 \mathbf{E} \mathbf{H} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{B} - p^2 \mathbf{E}) = 0 \quad (72)$$

y , θ の振動モードは夫々(71), (70)より求まる。

これは当然ながら、文献(4)に一致する。

5. 境界条件

5-1 単純支持梁

$$f_0 = f_n = 0 \quad M_0 = M_n = 0 \quad (73)$$

$$\theta_0 = \theta_n = 0 \quad B_0 = B_n = 0 \quad (74)$$

5-2 固定梁

$$f_0 = f_n = 0 \quad \theta_0 = \theta_n = 0 \quad (75)$$

$$\dot{f}_0 = \dot{f}_n = 0 \quad \dot{\theta}_0 = \dot{\theta}_n = 0 \quad (76)$$

$\dot{f}_0 = 0$ は (28) より $df/dx)_{r,r+1}$ を求め $\dot{f}_0 = df/dx)_{0,1} = 0$ より

$$M_0 = -\frac{1}{2}M_1 + \frac{EI_1}{2R_1}\theta_1 - \frac{3EI_1}{\ell_1^2}f_1 \quad (77)$$

$\dot{f}_n = 0$ は $\dot{f}_n = df/dx)_{n,n-1} = 0$ より

$$M_n = -\frac{1}{2}M_{n-1} + \frac{EI_n}{2R_n}\theta_{n-1} + \frac{3EI_n}{\ell_n}\left\{\frac{\ell_n}{6R_n}\left(\frac{1}{R_{n-1}} - \frac{1}{R_n}\right) - \frac{1}{\ell_n}\right\}f_{n-1} \quad (78)$$

$\dot{\theta}_0 = 0$ は (23) より $d\varphi/dx)_{r,r+1}$ を求め $\dot{\theta}_0 = d\varphi/dx)_{0,1} - df/R_1 dx)_{0,1} = d\varphi/dx)_{0,1} = 0$ より

$$B_0 = -\frac{1}{2}B_1 - \frac{3EC_{w1}}{\ell_1^2}\theta_1 - \frac{3EC_{w1}}{\ell_1^2 R_1}f_1 \quad (79)$$

$\dot{\theta}_n = 0$ は $\dot{\theta}_n = d\varphi/dx)_{n,n-1} - df/R_n dx)_{n,n-1} = d\varphi/dx)_{n,n-1} = 0$ より

$$B_n = -\frac{1}{2}B_{n-1} - \frac{3EC_{wn}}{\ell_n^2}\theta_{n-1} - \frac{3EC_{wn}}{\ell_n^2 R_{n-1}}f_{n-1} \quad (80)$$

5-3 $r = 0$ が自由端

$$M_0 = B_0 = 0 \quad Q_0 = H_0 = 0 \quad (81)$$

$Q_0 = 0$ は (18) より, $H_0 = 0$ は (13) より計算して夫々

$$\begin{aligned} \frac{R_1 M_1}{\ell_1} + \frac{B_1}{\ell_1} + \frac{GJ_1}{\ell_1}(\theta_1 - \theta_0) + \frac{GJ_1}{R_1 \ell_1}(f_1 - f_0) &= 0 \\ -\frac{\ell_1}{6R_1}M_1 + \frac{B_1}{\ell_1} + \frac{GJ_1}{\ell_1}(\theta_1 - \theta_0) + \frac{GJ_1}{R_1 \ell_1}(f_1 - f_0) &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{上の式より} \quad M_1 = 0 \quad (82)$$

$$-\frac{B_1}{GJ_1} + (\theta_1 - \theta_0) + \frac{f_1 - f_0}{R_1} = 0 \quad (83)$$

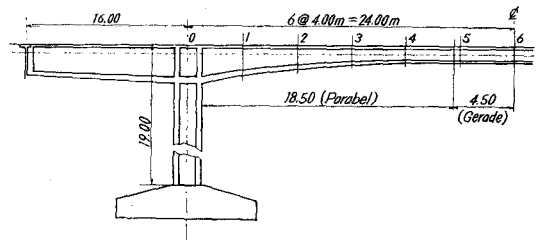
6. 数値計算例

図一4に示した上姫川橋 (PRCラーメン箱桁一3径間一変断面円弧曲線橋) の中央径間を例にとって試算してみる。

中央径間を12等分して, 断面諸元を表一1に示す。

実橋の曲率半径は $R = 400$ m であるが $R = 20 \sim 1000$ m 迄20mきざみで固有振動数を計算してみた。

中央径間両端を固定支持とした場合の曲げ振動優先と曲げ捩れ振動優先の振動数を夫々図一5, 6に示す。



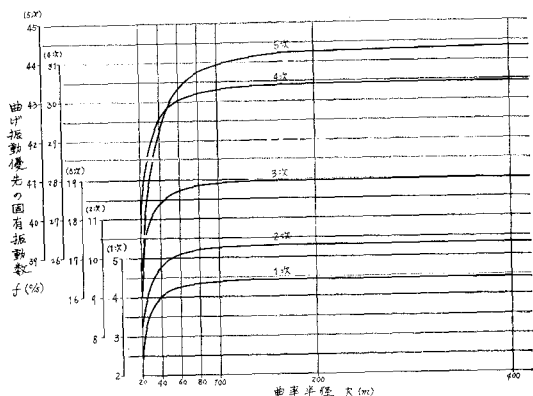
図一4 上姫川橋縦断面図 ($R = 400$ m)

表一1

分割点	0	1	2	3	4
$A_r(m^2)$		5.5730	4.8520	4.1799	3.7813
$e_r(m)$		0.3524	0.2043	0.0556	0.0981
$I_{pr}(m^4)$		25.751	21.066	18.041	16.400
$I_r(m^4)$		5.7627	3.3516	1.7871	1.0394
$J_r(m^4)$		10.822	6.9744	4.1360	2.6058
$C_{wr}(m^6)$		3.0305	2.3442	1.6586	1.1905

分割点	5	6
$A_r(m^2)$	3.4594	3.4594
$e_r(m)$	0.1425	0.1425
$I_{pr}(m^4)$	15.592	15.592
$I_r(m^4)$	0.7371	0.6577
$J_r(m^4)$	1.9220	1.7306
$C_{wr}(m^6)$	0.9866	0.9546

$$\begin{aligned} E &= 324 \times 10^4 t/m^2 \\ G &= 141 \times 10^4 t/m^2 \\ r &= 2.5 t/m^3 \\ \ell &= 4 m \end{aligned}$$



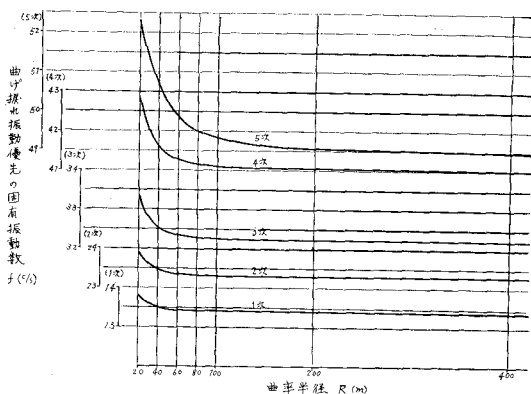
図—5

7. あとがき

以上曲率半径が任意に変化する変断面曲線桁の振動数方程式及び撓み及び捩れ角の振動モードの計算式を求め、計算例として上姫川橋の各諸元を用い曲率半径を変化させて解析した。

図—5より曲率半径が増加するにつれ曲げ振動優先の固有振動数は増加し、曲げ捩れ振動優先の固有振動数は逆に減少してくる。そしてある R 以上では一定値となる。

(47), (49)に捩れ角及び撓みの振動モードの算式を導いておいたが各振動次数に於てこの両者の振動モード図の縦距には深い興味があるので連成振動の各振動次数に於て曲げ振動成分と曲げ捩れ振動成分の内どちらがいかに影響しているかによりその連成の程度が分かるが、こ



図—6

れについては今後の課題としたい。 S 字形とかクロソイド曲線桁についても本解析方法は有効である。

最後に連続梁の場合について少しふれてみる。この場合未知量として中間支点での B , M が入ってくるがここでは f , θ がなくなるので B , M に対する連続条件式を用いて振動数方程式を求めれば良い。

参 考 文 献

1. 工業振動学：S, チモシェンコ
2. 上姫川橋設計計算：函館開発建設部
3. 曲線桁の理論と計算：渡辺 昇
4. 3連モーメントをフレキシビリティとするデイスクリートな振動モデルについて：能町, 松岡, 佐渡, 土木学会第25年次学術講演会講演集第1部 I-194.