

有限要素法による弾塑性解析法とその応用について

正員 渡 辺 昇*
 正員 大 島 久**
 学生員 ○川 上 洵***

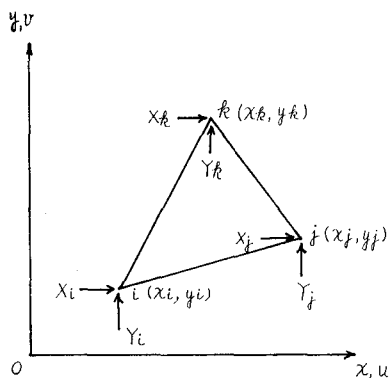
1. ま え が き

大型電子計算機の普及にともないマトリックスを用いた変位法による応力解析が行なわれるようになってきた。この解析方法の1つである有限要素法も世に出てから10年近くになる。

この有限要素法を用いて弾性解を弾塑性解を求める方向へと拡張し、塑性域の成長過程を計算したものを此所に報告する。尚、応用例として対象としたものは、近年使用される様になって来ている頭部拡大鋼管杭で、解析値と実験値の比較も行なった。扱っている材料は、完全塑性体である。

2. 有限要素法

図一1のように、対象物を三角形要素に分割した場合、水平変位及び垂直変位は、次式のような変位関数によりあらわされる。



図一1

$$\begin{cases} u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ v = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \end{cases} \quad (2.1. a. b)$$

三角形 i, j, k についてマトリックス表示すると

$$\{d\} = \begin{pmatrix} 1 & a_i b_i & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_j b_j & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_k b_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_i b_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_j b_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_k b_k \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} = [A] \{ \alpha \} \quad (2.2)$$

弾性学から

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha_2, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \alpha_6, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \alpha_3 + \alpha_5 \quad (2.3)$$

ここで ϵ_x ; x 方向の歪, ϵ_y ; y 方向の歪, γ_{xy} ; せん断ひずみを表わす。式 (2・3) をマトリックス表示すると

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} = [B] \{ \alpha \} \quad (2.4)$$

弾性の応力一ひずみ関係式は

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [D] \{\epsilon\} \quad (2.5)$$

式 (2・2) ~ (2・5) を整理すると

$$\{\sigma\} = [D] \{\epsilon\} = [D] [B] \{ \alpha \} = [D] [B] [A]^{-1} \{ d \} \quad (2.6)$$

図一1のような外力が作用するとき、外力による仮想仕事 A_{al} は

* 北海道大学教授 工博
 ** 北海道開発局土木試験所 構造研究室長 工修
 *** 北海道大学大学院

$$A_a = [X_i X_j X_k Y_i Y_j Y_k] \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \\ v_i \\ v_j \\ v_k \end{Bmatrix} = [P]^T \{d\} \quad (2.7)$$

三角形要素の面積を F とすれば、内部応力による仮想仕事 A_i は

$$A_i = \int_F \{e\}^T \{\sigma\} dF = \int_F ([B][A]^{-1} \{d\})^T [D] ([B][A]^{-1} \{d\}) dF = \int_F \{d\}^T [A]^{-1T} [B]^T [D] [B] [A]^{-1} \{d\} dF \quad (2.8)$$

$A_a = A_i$ でなければならないから式 (2.7) と式 (2.8) を等しいとおき変形すると

$$\{P\} = \int_F [A]^{-1T} [B]^T [D] [B] [A]^{-1} \{d\} dF \quad (2.9)$$

いま

$$[K] = \int_F [A]^{-1T} [B]^T [D] [B] [A]^{-1} dF \quad (2.10)$$

とおくと

$$\begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_{11} \dot{\epsilon}_{12} \dot{\epsilon}_{13} \\ \dot{\epsilon}_{21} \dot{\epsilon}_{22} \dot{\epsilon}_{23} \\ \dot{\epsilon}_{31} \dot{\epsilon}_{32} \dot{\epsilon}_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_{11} - \frac{\dot{\epsilon}_{11} + \dot{\epsilon}_{22} + \dot{\epsilon}_{33}}{3} & \dot{\epsilon}_{12} & \dot{\epsilon}_{13} \\ \dot{\epsilon}_{21} & \dot{\epsilon}_{22} - \frac{\dot{\epsilon}_{11} + \dot{\epsilon}_{22} + \dot{\epsilon}_{33}}{3} & \dot{\epsilon}_{23} \\ \dot{\epsilon}_{31} & \dot{\epsilon}_{32} & \dot{\epsilon}_{33} - \frac{\dot{\epsilon}_{11} + \dot{\epsilon}_{22} + \dot{\epsilon}_{33}}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\dot{\epsilon}_{11} + \dot{\epsilon}_{22} + \dot{\epsilon}_{33}}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\dot{\epsilon}_{11} + \dot{\epsilon}_{22} + \dot{\epsilon}_{33}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\dot{\epsilon}_{11} + \dot{\epsilon}_{22} + \dot{\epsilon}_{33}}{3} \end{pmatrix}$$

簡単に表わすと

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{e}_{ij} + \delta_{ij} \frac{\dot{\epsilon}_{kk}}{3} \quad (3.1)$$

ここで δ_{ij} は Kronecker's delta で $i = j$ のとき 1 の値、 $i \neq j$ のとき 0 の値をとる。またドット ($\dot{\cdot}$) は時間の変化率を表わす。

i, j には、1, 2, 3 のいずれかの適当な数字を与える。

$\epsilon_{kk} = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$ でひずみテンソルの主対角要素の総和を表わす。

$$\{P\} = [K] \{d\} \quad (2.11)$$

式 (2.11) における $[K]$ が剛性マトリックスである。又式 (2.10) を簡単に書くと

$$[K] = t \cdot F \cdot [N]^T [D] [N] \quad (2.12)$$

ここで t : 三角要素の厚さ

F : 三角形要素の面積

以上のように対象物を三角形要素に分割し、各々の三角要素の剛性マトリックスを求め、その剛性マトリックスを重ね合わせることができる。

弾塑性解析の場合、式 (2.12) のうち応力—ひずみ関係式の $[D]$ が異なる。従って全要素に関し、弾性域にあるか又は塑性域に入ったものかを判別し、それに応じて剛性マトリックスをつくり、重ね合せて構造物全体の剛性マトリックスとする。

3. 応力—ひずみ関係式

3.1 弾性の応力—ひずみ関係式

弾性の応力—ひずみ関係式は、既に式 (2.5) によって表わされている。

3.2 塑性の応力—ひずみ関係式

ひずみ速度は偏差ひずみと等方ひずみの和によって表わされるから

Pranadtl-Reuss の式より

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{\dot{S}_{ij}}{2G} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3.2)$$

ここで

$\dot{\epsilon}_{ij}$: 偏差ひずみ変化率

σ_{ij} : 応力

S_{ij} : 偏差応力

f : 塑性ポテンシャル

λ : 比例定数

偏差応力と応力の間には、次の関係がある。

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{\sigma_{kk}}{3} \quad (3.3)$$

ここで

$$\sigma_{kk} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

塑性流れ中、体積変化はないから

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij} &= \dot{\epsilon}_{ij} + \delta_{ij} \frac{\dot{\epsilon}_{kk}}{3} = \frac{1}{2G} \dot{S}_{ij} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} + \delta_{ij} \frac{\dot{\epsilon}_{kk}}{3} = \frac{1}{2G} \left(\dot{\sigma}_{ij} - \delta_{ij} \frac{\dot{\sigma}_{kk}}{3} \right) + \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} + \delta_{ij} \frac{\dot{\sigma}_{kk}}{9K} \\ &= \frac{\dot{\sigma}_{ij}}{2G} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} + \delta_{ij} \dot{\sigma}_{kk} \left(\frac{1}{9K} - \frac{1}{6G} \right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

式 (3.5) より

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_1 &= \frac{\dot{\sigma}_1}{2G} + (\dot{\sigma}_1 + \dot{\sigma}_2) \left(\frac{1}{9K} - \frac{1}{6G} \right) + \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_1} \\ \dot{\epsilon}_2 &= \frac{\dot{\sigma}_2}{2G} + (\dot{\sigma}_1 + \dot{\sigma}_2) \left(\frac{1}{9K} - \frac{1}{6G} \right) + \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_2} \end{aligned} \quad (3.6. a, b)$$

式 (3.6. a, b) を $\dot{\sigma}_1, \dot{\sigma}_2$ について解くと

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_1 &= \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ (\dot{\epsilon}_1 + \nu \dot{\epsilon}_2) - \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_1} + \nu \frac{\partial f}{\partial \sigma_2} \right) \right\} \\ \dot{\sigma}_2 &= \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ (\nu \dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2) - \lambda \left(\nu \frac{\partial f}{\partial \sigma_1} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.7)$$

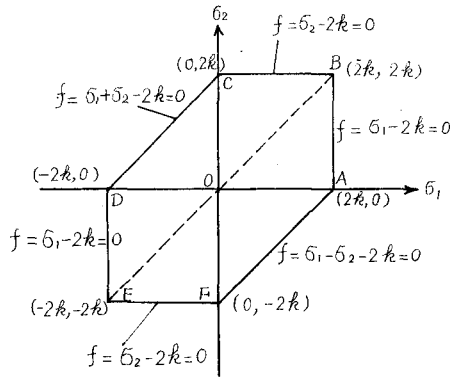
ここで $G = E/[2(1+\nu)]$

3.3 Tresca の降伏条件

Tresca の降伏条件は、最大せん断応力がその材料によって定まる一定値に達したときに、塑性変形がはじまるという条件である。これを式であらわすと

$$\tau_{max} = k \quad (3.8)$$

ここで k : 材料試験を行なったときの降伏応力の $\frac{1}{2}$ の値



図—2

$$\begin{pmatrix} \dot{\sigma}_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad (3.12)$$

式 (3.12) までは、主応力の方向で論じてきたが、これを xy 座標に変換する。その際、主応力の方向 θ を用いる。 θ の符号は、 x 軸から反時計方向に $+$ をとるものとする。

式 (3.12) は、以下のように変換される。

$$[T]^T \begin{pmatrix} \dot{\sigma}_x & \dot{\tau}_{xy} \\ \dot{\tau}_{xy} & \dot{\sigma}_y \end{pmatrix} [T] = \frac{E}{1-\nu^2} \left([T]^T \begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_x & \dot{\gamma}_{xy} \\ \dot{\gamma}_{xy} & \dot{\epsilon}_y \end{pmatrix} [T] + \nu [T]^T \begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_y & -\dot{\gamma}_{xy} \\ -\dot{\gamma}_{xy} & \dot{\epsilon}_x \end{pmatrix} [T] - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \nu \end{pmatrix} \right) \quad (3.13)$$

$$\epsilon_{kk} = \frac{\sigma_{kk}}{3K} \quad (3.4)$$

ここで $K = E/3(1-\nu)$: 体積弾性係数

式 (3.1) から式 (3.4) により

式 (3.8) は又次のようにもあらわされる。

$$f = \text{Max}(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|) = 2k \quad (3.9)$$

ここで $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$: 主応力

式 (3.9) で二次元の場合を図示すると図—2 となる。

図—2 で六角形の内部では、 $f < 0$ であり弾性である。又六角形の周上では、 $f = 0$ であり塑性をあらわす。

モールの円を描くとわかるように $\sigma_1 > \sigma_2$ であるから六角形のうち、 $ABOEF$ を考えれば良い。

3.4 線上の塑性応力—ひずみ関係式

3.4.1 AB 線上の塑性応力ひずみ関係式

図—2 からわかるように AB 線上において塑性ポテンシャルは、 $f = \sigma_1 - 2k = 0$ である。従って

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_1} = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_2} = 0 \quad (3.10)$$

式 (3.10) を式 (3.7) へ代入すると

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_1 &= \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ (\dot{\epsilon}_1 + \nu \dot{\epsilon}_2) - \lambda \right\} \\ \dot{\sigma}_2 &= \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ (\nu \dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2) - \lambda \nu \right\} \end{aligned} \quad (3.11)$$

式 (3.11) をマトリックス表示すると

ここで

$$[T] = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

式 (3.13) に左から $[T]$ 、右から $[T]^T$ をかけると

$$\begin{pmatrix} \dot{\sigma}_x & \dot{\tau}_{xy} \\ \dot{\tau}_{xy} & \dot{\sigma}_y \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_x & \dot{\gamma}_{xy} \\ \dot{\gamma}_{xy} & \dot{\epsilon}_y \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_y & \dot{\gamma}_{xy} \\ \dot{\gamma}_{xy} & \dot{\epsilon}_x \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} c^2 + \nu s^2 & cs(1-\nu) \\ cs(1-\nu) & s^2 + \nu c^2 \end{pmatrix} \right) \quad (3.15)$$

式 (3.15) は、次の三式を示している。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} \{ (\dot{\epsilon}_x + \nu \dot{\epsilon}_y) - \lambda(c^2 + \nu s^2) \} \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} \{ (\dot{\epsilon}_y + \nu \dot{\epsilon}_x) - \lambda(s^2 + \nu c^2) \} \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{1+\nu} (\dot{\gamma}_{xy} - \lambda cs) \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

ここで λ は降伏条件 $\dot{f} = 0$ からひずみ速度によって定まるものである。

AB 線上では、 $\dot{f} = 0$ 即ち $\dot{\sigma}_1 = 0$ である。これを式 (3.11) へ代入すると、

$$\lambda = (\dot{\epsilon}_1 + \nu \dot{\epsilon}_2) \quad (3.17)$$

$\dot{\epsilon}_1, \dot{\epsilon}_2$ を $\dot{\epsilon}_x, \dot{\epsilon}_y, \dot{\gamma}_{xy}, \theta$ で表わすと

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_1 &= c^2 \dot{\epsilon}_x + 2cs \dot{\gamma}_{xy} + s^2 \dot{\epsilon}_y \\ \dot{\epsilon}_2 &= s^2 \dot{\epsilon}_x - 2cs \dot{\gamma}_{xy} + c^2 \dot{\epsilon}_y \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

式 (3.18) を式 (3.17) へ代入すると

$$\lambda = (c^2 + \nu s^2) \dot{\epsilon}_x + 2cs(1-\nu) \dot{\gamma}_{xy} + (s^2 + \nu c^2) \dot{\epsilon}_y \quad (3.19)$$

式 (3.19) を式 (3.16) へ代入すると

$$\{\dot{\sigma}\} = [D_1] \{\dot{\epsilon}\} \quad (3.20)$$

ここで

$$\{\dot{\sigma}\} = \begin{pmatrix} \dot{\sigma}_x \\ \dot{\sigma}_y \\ \dot{\tau}_{xy} \end{pmatrix} \quad \{\dot{\epsilon}\} = \begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_x \\ \dot{\epsilon}_y \\ \dot{\gamma}_{xy} \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

$[D_1]$ は 3×3 の対称マトリックスであり、次のように表わされる。

$$[D_1] = \frac{E}{1+\nu} \begin{pmatrix} 2s^2 - s^4(1-\nu) & -c^2 s^2(1-\nu) & -cs(c^2 + \nu s^2) \\ & 2c^2 - c^4(1-\nu) & -cs(s^2 + \nu c^2) \\ \text{Sym.} & & -\frac{1}{2} - c^2 s^2(1-\nu) \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

3.4.2 EF 線上の塑性応力—ひずみ関係式

EF 線上では、

$$\{\dot{\sigma}\} = [D_2] \{\dot{\epsilon}\} \quad (3.23)$$

ここで $\{\dot{\sigma}\}$ と $\{\dot{\epsilon}\}$ は式 (3.21) で定義されている。

$$[D_2] = \frac{E}{1+\nu} \begin{pmatrix} 2c^2 - c^4(1-\nu) & -c^2 s^2(1-\nu) & cs(s^2 + \nu c^2) \\ & 2s^2 - s^4(1-\nu) & cs(c^2 + \nu s^2) \\ \text{Sym.} & & -\frac{1}{2} - c^2 s^2(1-\nu) \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

3.4.3 FA 線上の塑性応力—ひずみ関係式

FA 線上では

$$\{\dot{\sigma}\} = [D_3] \{\dot{\epsilon}\} \quad (3.25)$$

ここで

$$[D_3] = \frac{E}{1+\nu} \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\nu} - \frac{1}{2}(c^2-s^2)^2 & \frac{\nu}{1+\nu} + \frac{1}{2}(c^2-s^2)^2 & -cs(c^2-s^2) \\ \frac{1}{1-\nu} - \frac{1}{2}(c^2-s^2)^2 & \frac{\nu}{1+\nu} + \frac{1}{2}(c^2-s^2)^2 & cs(c^2-s^2) \\ \text{Sym.} & & \frac{1}{2}(c^2-s^2)^2 \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

3.5 角の塑性応力—ひずみ関係式

角の点の塑性応力—ひずみ関係式は、線上の塑性応力—ひずみ関係式を求めたのと同様な方法で求められる。但し線と線の交点であるから、両方の線上の塑性応力—ひずみ関係式を満足していかなければならない。従って式(3.11)より

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_1 = \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ (\dot{\epsilon}_1 + \nu \dot{\epsilon}_2) - \lambda_1 \left(\nu \frac{\partial f^{(1)}}{\partial \sigma_1} + \frac{\partial f^{(1)}}{\partial \sigma_2} \right) - \lambda_2 \left(\frac{\partial f^{(2)}}{\partial \sigma_1} + \nu \frac{\partial f^{(2)}}{\partial \sigma_2} \right) \right\} \\ \dot{\sigma}_2 = \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ (\nu \dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2) - \lambda_1 \left(\nu \frac{\partial f^{(1)}}{\partial \sigma_1} + \frac{\partial f^{(1)}}{\partial \sigma_2} \right) - \lambda_2 \left(\nu \frac{\partial f^{(2)}}{\partial \sigma_1} + \frac{\partial f^{(2)}}{\partial \sigma_2} \right) \right\} \end{cases} \quad (3.27)$$

ここで $f^{(1)}$ と $f^{(2)}$ は角で交わる2つの線の降伏条件であり、 λ_1 と λ_2 は正のスカラー量である。

3.5.1 角A点の塑性応力—ひずみ関係式

図—2よりAB, FA線上の降伏条件は、

$$f^{(1)} = \sigma_1 - 2k = 0, \quad f^{(2)} = \sigma_1 - \sigma_2 - k = 0 \quad (3.28)$$

式(3.28)より

$$\frac{\partial f^{(1)}}{\partial \sigma_1} = 1, \quad \frac{\partial f^{(1)}}{\partial \sigma_2} = 0, \quad \frac{\partial f^{(2)}}{\partial \sigma_1} = 1, \quad \frac{\partial f^{(2)}}{\partial \sigma_2} = -1 \quad (3.29)$$

式(3.29)を式(3.27)へ代入して

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_1 = \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ (\dot{\epsilon}_1 + \nu \dot{\epsilon}_2) - \lambda_1 - \lambda_2 (1-\nu) \right\} \\ \dot{\sigma}_2 = \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ (\nu \dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2) - \nu \lambda_1 + \lambda_2 (1-\nu) \right\} \end{cases} \quad (3.30)$$

式(3.30)を x, y 座標に変換すると

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_x = \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ (\dot{\epsilon}_x + \nu \dot{\epsilon}_y) - \lambda_1(c^2 + \nu s^2) + \lambda_2(1-\nu)(s^2 - c^2) \right\} \\ \dot{\sigma}_y = \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ (\dot{\epsilon}_y + \nu \dot{\epsilon}_x) - \lambda_1(s^2 + \nu c^2) - \lambda_2(1-\nu)(s^2 - c^2) \right\} \\ \dot{\tau}_{xy} = \frac{E}{1+\nu} (\dot{\gamma}_{xy} - \lambda_1 cs - 2\lambda_2 cs) \end{cases} \quad (3.31)$$

角A点では、 $\dot{f}^{(1)} = 0, \dot{f}^{(2)} = 0$ 即ち $\dot{\sigma}_1 = \dot{\sigma}_2 = 0$ であるから式(3.30)を連立して解くと

$$\lambda_1 = (\dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2), \quad \lambda_2 = -\dot{\epsilon}_2 \quad (3.32)$$

式(3.32)を x, y 方向のひずみ変化成分に変換すると

$$\lambda_1 = (\dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y), \quad \lambda_2 = -(s^2 \dot{\epsilon}_x - 2cs \dot{\gamma}_{xy} + c^2 \dot{\epsilon}_y) \quad (3.33)$$

式(3.33)を式(3.31)へ代入すると

$$\{\dot{\sigma}\} = [D_4] \{\dot{\epsilon}\} \quad (3.34)$$

$$[D_4] = \frac{E}{1+\nu} \begin{pmatrix} 2c^2 s^2 & -2c^2 s^2 & -cs(c^2-s^2) \\ & 2c^2 s^2 & cs(c^2-s^2) \\ \text{Sym.} & & -\frac{1}{2}(c^2-s^2)^2 \end{pmatrix} \quad (35)$$

3.5.2 角BFF各点の塑性応力—ひずみ関係式

式(3.34), (3.35)はB, E, F点においても同様

4. 計算例

4.1 鋼管杭の計算値と実験値の比較

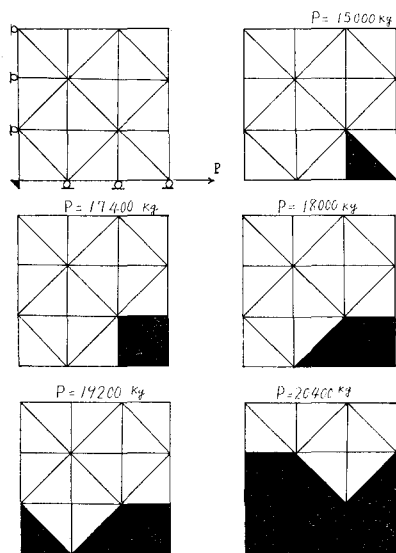
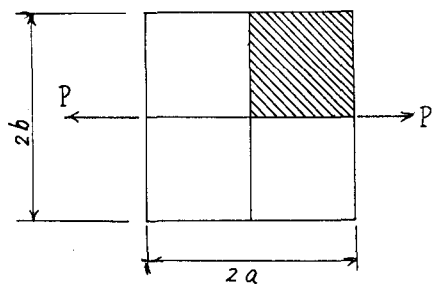
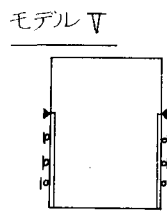
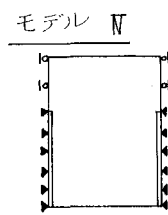
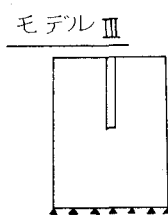
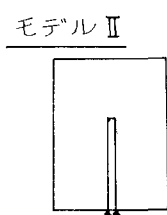
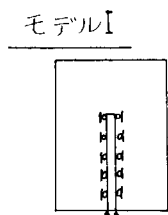
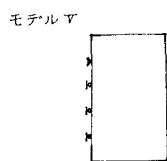
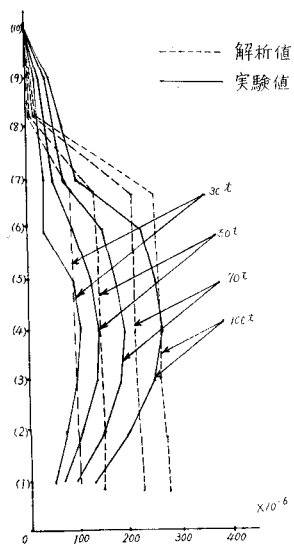
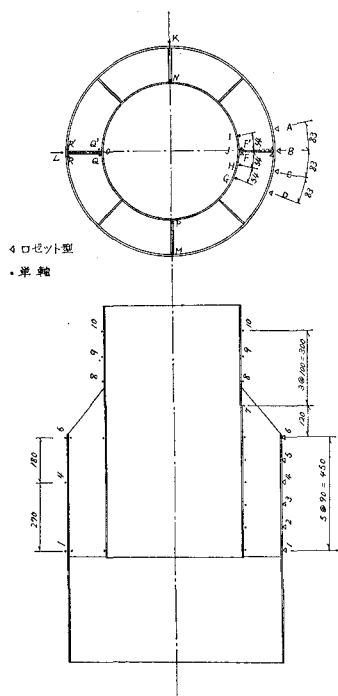
図—3のような、頭部拡大鋼管杭の解析を先ず弾性域について比較する。

モデル化に際し、種々な拘束条件のものが考えられた(図—4), モデルⅣ, モデルⅤが、実験値と近いものとなる。

図—5は、図—3の小径管のH点の垂直方向のひずみを比較したものである。

4.2 塑性域の計算法

4.1で行なった弾性解析を塑性まで拡張すると4.4以後のような結果となる。電子計算機で計算する場合には



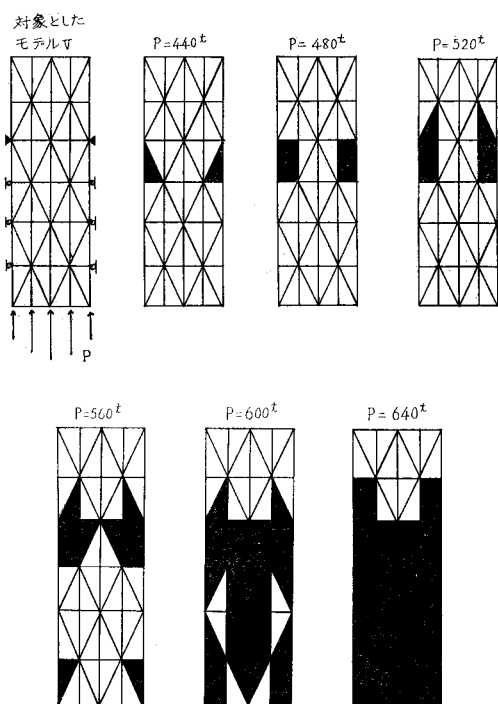
- 全ての要素が弾性であるような荷重を与える。
- 徐々に荷重を増加し、その都度、全要素に関してその要素が、弾性であるか、塑性に入ったかを判定する。
- 塑性域に入った要素は $[D_1] \sim [D_4]$ のうちの $[D]$ を使うかを決定し、全体の剛性マトリックスをつくる。
- b を繰返す。

4.3 矩形シャイベの弾塑性解

図—6 のような矩形シャイベを引っ張ったときの弾塑性解析では、図—7 のような結果を得る。ここでシャイベの厚さは、単位厚さとした。

4.4 鋼管杭の弾塑性解

図—8 は、4.1 で求めた弾性解を塑性まで拡張したものである。



図—8

5. あとがき

本発表では、降伏条件に Tresca の降伏条件を用いたが、Von. Mises の降伏条件を用いた場合もほぼ同じ結果を得ている。弾性域においては、解析及び実験の結果をみると、満足できるものと考えられる。尚、塑性域に達する迄荷重をかける実験を目下計画中である。

今後の研究としては、三次元塑性論まで拡張するとより厳密解に近づくものと考えられる。

最後に、実験に際し、北海道開発局 構造研究室 中村敏明技官、そして日本鋼管株式会社、鋼管基礎工業株式会社の御助力を得たことに深甚の謝意を呈する次第である。

参 考 文 献

- 1) O.C.Zienkiewicz & Y.K. Cheung ; The finite element method in structural and continuum mechanics ; McGraw-Hill.
- 2) 竹山壽夫：初等塑性力学：丸善
- 3) S.C. Anand, S.L. Lee & E.C.Rossow ; Finite element Analysis of elastic-plastic Stress Problems based upon Tresen yield condition ; Ingenieur-Archiv 1970.