土木学会北海道支部　研究発表論文集　昭和45年度

多径間連続桁の弾塑性解析法と計算

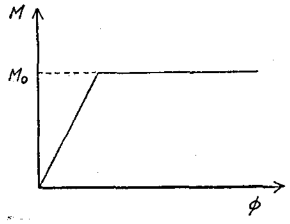
正　員　渡　辺　　昇*
学生員　○川　瀬　健　夫**

1. まえがき

機構法，モーメント分配法，仮想変形法等による塑性解析法は，それ自体ほぼ確立されたものである。しかしながら上のいずれの方法も，崩壊機構を決定するのに有効であるが，崩壊機構を形成する過程を追跡するのには，不向きである。構造物が複雑になるとその傾向は，増々強くなる。そこで本報告は，マトリックス法（変位法）を用いることによって，組織的に崩壊機構を形成する過程を追跡しようとするものである。

2. 多径間連続桁の弾塑性解析における仮定

(1) 曲げモーメント―曲率の関係は，図―1とする。
(2) 塑性関節（全塑性モーメントを伝えながら回転する関節）以外の部分では，弾性である。
(3) 塑性関節で梁は，任意の角度だけ回転できる。すなわち横倒れ座屈をしない。
(4) 崩壊に寄与する断面力は，曲げモーメントだけとする。
(5) 荷重は，比例的に増加するものとする。



図―1

3. マトリックス法の概念

弾性体力学では，外力の作用のもとにおいて構造物がつり合いを保つためには，次の3つの条件が満足されなければならない。

1) 変位と変形の関係（適合条件）
2) 変形と断面力との関係（フックの法則）
3) 断面力と外力の関係（つり合いの条件）

すなわち

$$[v] = [A]\,[d] \tag{3.1}$$
$$[P] = [k]\,[v] \tag{3.2}$$
$$[R] = [A]^T\,[P] \tag{3.3}$$

ここで

$[R]$：各節点に作用する外力を表わす列マトリックス
$[A]$：変位変換マトリックス
$[A]^T$：変位変換マトリックスの転置マトリックス
$[P]$：各節点における部材の断面力を表わす列マトリックス
$[k]$：各部材の剛性を表わすマトリックス
$[v]$：各節点における部材の変形を表わす列マトリックス
$[d]$：各節点の変位を表わす列マトリックス

ここで，$[A]$ の i 列は，$d_i=1$ で他の変位 $d_j=0$（$j=1, 2, \cdots, r$）$j \neq i$ としたときの変形である。仮想仕事の原理より次式が，成立する。

$$[d]_d^T\,[R] = [v]_d^T\,[P] \tag{3.4}$$

(3.1) を転置すると

$$[v]^T = [d]^T\,[A]^T \tag{3.5}$$

よって仮想の変位と仮想の変形との関係は

$$[v]_d^T = [d]_d^T\,[A]^T \tag{3.6}$$

(3.6) を (3.4) に代入することによって

$$[R] = [A]^T\,[P] \tag{3.7}$$

(3.7) に (3.2) を代入すると

$$[R] = [A]^T\,[k]\,[v] \tag{3.8}$$

(3.8) に (3.1) を代入すると

$$[R] = [A]^T\,[k]\,[A]\,[d] \tag{3.9}$$

ここで

$[K] = [A]^T\,[k]\,[A]$ を置く

$[K]$：構造物全体の剛性マトリックス

* 北大工学部教授　工博
** 北大工学部大学院

4. 解析に用いる剛性マトリックス

式の上で構造物が，崩壊に達したかどうかをチェックするために，構造物全体の剛性マトリックスの行列式を計算する。もしdet｜K｜＝0ならば，その構造物は，運動をすることになる。

荷重の作用方向によって構造物の崩壊形式が変わる。たとえば，簡単なトラス構造を考えるとよくわかる。ある荷重下では，構造物が崩壊していないのに det｜K｜＝0となる場合があるので，実際に作用する外力とゼロ外力とを区別して，もう一度，実作用外力に対応する構造物全体の剛性マトリックスを組む。本報告では，実作用外力として集中荷重，ゼロ作用外力としてモーメントをとった。

構造物全体に対する外力と変位の関係は，

$$\begin{array}{c} m \\ n \end{array}\begin{bmatrix} F_m \\ \hline M_n \end{bmatrix} = \begin{array}{c} m \\ n \end{array}\overset{\begin{array}{cc} m & n \end{array}}{\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}}\begin{array}{c} m \\ n \end{array}\begin{bmatrix} d_m \\ \hline \theta_n \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

(4.1) より

$$F_m = K_{11}d_m + K_{12}\theta_n \tag{4.2}$$

$$M_n = K_{21}d_m + K_{22}\theta_n \tag{4.3}$$

今，仮りにM_n＝0とすると

$$\theta_n = -K_{22}^{-1}K_{21}d_m \tag{4.4}$$

(4.4) を (4.2) に代入すると

$$F_m = K_{11}d_m - K_{12}K_{22}^{-1}K_{21}d_m$$

$$= (K_{11} - K_{12}K_{22}^{-1}K_{21})\ d_m \tag{4.5}$$

$K_{21}=K_{12}^{T}$ より (4.5) は，次のようになる。

$$F_m = (K_{11} - K_{12}K_{22}^{-1}K_{12}^{T})\ d_m$$

ここで　$K_f = K_{11} - K_{12}K_{22}^{-1}K_{12}^{T}$とする

〔K_f〕：弾塑性解析に使用する構造全体の剛性マトリックス

表―1を参照してK_{11}，K_{12}，K_{22}を〔A〕で表示する。

〔C_{00}〕＝〔A_0〕^{T}〔k〕〔A_0〕

〔C_{01}〕＝〔A_0〕^{T}〔k〕〔A_1〕＝〔C_{10}〕^{T}

〔C_{11}〕＝〔A_1〕^{T}〔k〕〔A_1〕

ここで〔K_{11}〕＝〔C_{01}〕,〔K_{12}〕＝〔C_{01}〕,〔K_{22}〕＝〔C_{11}〕とする。

〔A_0〕：実外力に対応する変位によって作られる変位変換マトリックス

〔A_1〕：ゼロ外力に対応する変位によって作られる変位変換マトリックス

以上により〔K_f〕は

〔K_f〕＝〔C_{00}〕－〔C_{01}〕〔C_{11}〕$^{-1}$〔C_{01}〕^{T}

となる。もしdet｜K_f｜＝0，すなわち〔K_f〕が特異マトリックスになった時，構造物は崩壊する。

表―1

$$\begin{array}{c} l \end{array}\overset{\begin{array}{cc} m & n \end{array}}{\begin{pmatrix} A_0 & \vdots & A_1 \end{pmatrix}}$$

$$l\overset{l}{\begin{pmatrix} \ddots & & \\ & k & \\ & & \ddots \end{pmatrix}} \quad l\overset{\begin{array}{cc} m & n \end{array}}{\begin{pmatrix} kA_0 & \vdots & kA_1 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{array}{c} m \\ n \end{array}\overset{l}{\begin{pmatrix} A_0{}^T \\ \hline A_1{}^T \end{pmatrix}} \quad \begin{array}{c} m \\ n \end{array}\overset{\begin{array}{cc} m & n \end{array}}{\begin{pmatrix} C_{00} & \vdots & C_{01} \\ \hline C_{10} & \vdots & C_{11} \end{pmatrix}}$$

5. 解析方法

弾塑性解析に使用する剛性マトリックスが，4.で求った。塑性関節理論による梁構造物の弾塑性解析を行なう場合問題になるのは，塑性関節が発生するごとに，その点で撓み角が，連続から不連続に変ることである。そこで考えられるのは，要素剛性マトリックスや変位変換マトリックスを塑性関節が発生する毎に，変化させることである。本報告は，弾塑性解析に用いる剛性マトリックスを求めたときの〔A_1〕だけを変化させ，〔A_0〕及び要素剛性マトリックスを変化させずに塑性関節によって生ずる梁の不連続性を解決した。

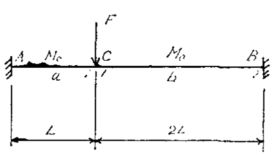
連続桁の場合，一般に〔A_1〕は，(5.1) のように表わされる。

$$[A_1] = m\overset{n}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 1 & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & & 0 & 1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & & & 0 & 1 & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & & & \vdots & 0 & 1 \end{pmatrix}} \tag{5.1}$$

2列目から (n－1) 列目までは，中間節点部分に関するものである。1列とn列は，端支持状態を表現している。端の支持が単純である場合は，(5.1) で表わされる〔A_1〕である。端の支持が固定の場合は，1列目やn列目は省略される。塑性関節の発生による新しい〔A_1〕の作り方は，仮りに中間節点部分に塑性関節がK個発生した場合は，〔A_1〕の列数を$n+K$にし，塑性関節が発生した点に対応する列を2つに分離する。たとえばL番目の点にだけ塑性関節が発生したとする，L行目に1の部分がある列をJ列目とする。新しい〔A_1〕は，(5.2) のようになる。

$$
\begin{array}{c}
\\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ \textcircled{L} \\ \vdots \\ \\ \\ \\ m
\end{array}
\begin{array}{c}
1\ 2\ \textcircled{J} \cdots\cdots n \\
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\
0 & 1 & \vdots & & \vdots \\
\vdots & \vdots & 1 & 0 & \vdots \\
\vdots & \vdots & 0 & 1 & \vdots \\
\vdots & \vdots & & 1 & \vdots \\
\vdots & \vdots & & 0 & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & 0 & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & 1 & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{c}
\\ \\ \\ \\ \textcircled{L} \\ \\ \\ \\ \\ m
\end{array}
\begin{array}{c}
12\cdots J-1\ \ J\ J+1\ \cdots n+1 \\
\begin{pmatrix}
1 & & 0 & 0 & & 0 \\
0 & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\vdots & & 0 & \vdots & & \vdots \\
\vdots & & 1 & 0 & & \vdots \\
\vdots & \longrightarrow & 0 & 1 & & \vdots \\
\vdots & & \vdots & 0 & & \vdots \\
\vdots & & \vdots & \vdots & 0 & \vdots \\
\vdots & & \vdots & \vdots & 1 & \vdots \\
\vdots & & \vdots & \vdots & 1 & 0 \\
0 & & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
\tag{5.2}
$$

端支持が固定の場合にその点に塑性関節が発生したときは，(5.1) の1列目やn列目の如き列が増えるだけである。以下図―2のような両端固定梁を例にとって，計算順序の概略を述べる。



図―2

$[F_0]=F_c$, $[F_1]=M_c\equiv 0$, $[d_0]=d_c$, $[d_1]=\theta_c$

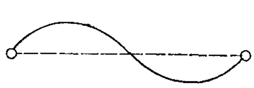
$[P]^T=[m_a^1,\ m_a^2,\ m_b^1,\ m_b^2]^T$

断面力 $[P]$ としては，曲げモーメントを使用する。

$[v]^T=[\varphi_a^1,\ \varphi_a^2,\ \varphi_b^1,\ \varphi_b^2]^T$

等断面とすると

$$[k]=\frac{EI}{L}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$



図―3　正の変形状態

$[A_0]^T=[1/L,\ 1/L,\ -1/2L,\ -1/2L]^T$

$[A_1]^T=[0,\ 1,\ 1,\ 0]^T$

$K_f=C_{00}-C_{01}C_{11}^{-1}C_{01}^T$

より

$$K_f=\frac{81EI}{8L^3}$$

よって

$$d_c=\frac{8FL^3}{81EI},\quad \theta_c=-\frac{2FL^2}{27EI}$$

$[P]=[k][A_0][d_0]+[k][A_1][d_1]$ より

$$[P]^T=\left[\frac{4FL}{9},\ \frac{8FL}{27},\ -\frac{8FL}{27}\ -\frac{6FL}{27}\right]^T$$

m_a^1が，最大より $4FL/9\equiv M_0$とする（M_0は，全塑性モーメント）と，$m_a^1=M_0$, $m_a^2=2M_0/3$, $m_b^1=-2M_0/3$, $m_b^2=-M_0/2$, $F_1=9M_0/4L$となる。このことは，部材aの1点に塑性関節が発生したことを意味する。新しい $[A_1]$ は，次のようになる。

$$[A_1]=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

以後前回と同様にしてK_fを求める。

$K_f=\dfrac{81EI}{20L^3}$（このK_fは，第1塑性関節発生以後から次の塑性関節発生までの荷重の増分に対する構造全体の剛性マトリックスである。）

$$\varDelta d_c=\frac{20\varDelta FL^3}{81EI},\quad \varDelta\theta_c=-\frac{6\varDelta FL^2}{81EI},\quad \varDelta\theta_A=-\frac{\varDelta FL^3}{3EI}$$

$[\varDelta P]^T=[0,\ 14\varDelta FL/27,\ -14\varDelta FL/27,\ -4\varDelta FL/9]^T$

ここで$F_2\equiv F_1+\varDelta F$とし，$\varDelta F$の形になおして上の$[\varDelta P]$に代入すると

$$[\varDelta P]^T=\left[0,\ \frac{14}{27}\left(F_2-\frac{9M_0}{4L}\right)L,\ -\frac{14}{27}\left(F_2-\frac{9M_0}{4L}\right)L,\ -\frac{4}{27}\left(F_2-\frac{9M_0}{4L}\right)L\right]^T$$

絶対値の最大は，$\varDelta m_a^2$と$\varDelta m_b^1$ であるので，$[P]+[\varDelta P]$ として，$|m_a^2|=|m_b^1|\equiv M_0$とすると

$$[P]^T=[M_0,\ M_0,\ -M_0,\ -11M_0/14]^T$$

ここで，内部モーメントは，いずれも各部材の全塑性モーメントを超えていない（塑性条件を満足している）ので，$|m_a^2|=|m_b^1|\equiv M_0$の仮定は，正しい。この時，$F_2=81M_0/28L$である。以上のことは，$C$点に第2塑性関節が発生したことを意味している。次の段階の $[A_1]$ は，

$$[A^1]=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

以後前回と同様である。

$$K_f=\frac{3EI}{8L^3},\quad \varDelta d=\frac{8\varDelta FL^3}{3EI}$$

$$\begin{pmatrix} \varDelta\theta_A \\ \varDelta\theta_C\text{左} \\ \varDelta\theta_C\text{右} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -8\varDelta FL^2/3EI \\ -8\varDelta FL^2/3EI \\ 2\varDelta FL^2/EI \end{pmatrix}$$

$$[\Delta P]^T=[0,\ 0,\ 0,\ -2\Delta FL]^T$$

$|m_b{}^2|=M_0$とすると

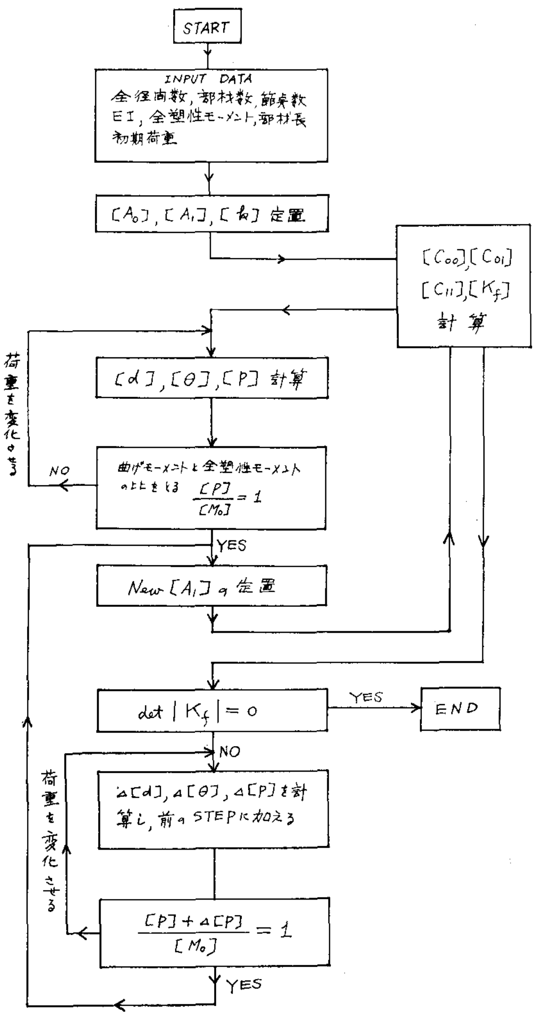
$$[P]^T=[M_0,\ M_0,\ -M_0,\ -M_0]^T$$

このとき，$F_3=3M_0/L$

次の段階の〔A_1〕は，

$$[A_1]=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

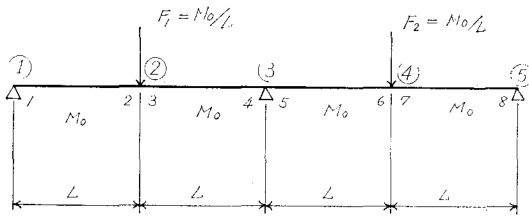
表—2



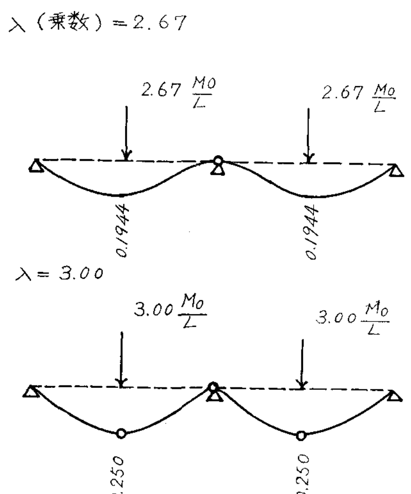
この〔A_1〕を使ってK_fを計算すると，$K_f=0$となり崩壊を意味する。一般には，K_fはマトリックスであるので，崩壊したかどうかを検討する場合は，det$|K_f|$で調べる。構造物が，複雑になってくると計算の労力が大変なので，以上の計算を電子計算機で実行する。表—2は，多径間連続桁の弾塑性解析の電算プロのフローチャートである。

6. 計　算　例

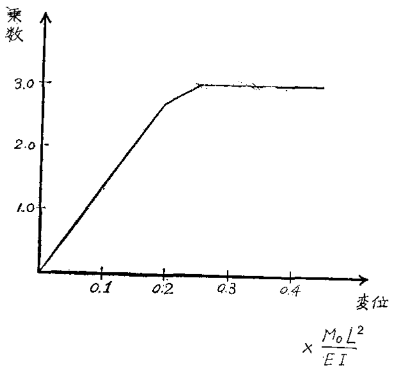
表—2のプログラムを使用すると，多径間変断面連続桁の弾塑性解析が可能である。図—4は，2径間連続等断面桁の諸元である。図—5は，塑性関節の発生個所及び発生順序を示したものであり，図—6は，乗数—変位関係を示したものである。図—7は，3径間連続変断面桁の諸元である。図—8は，塑性関節の発生個所及び発生順序を示したものであり，図—9は，乗数—変位関係を示したものである。



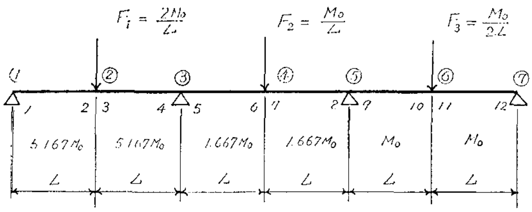
図—4



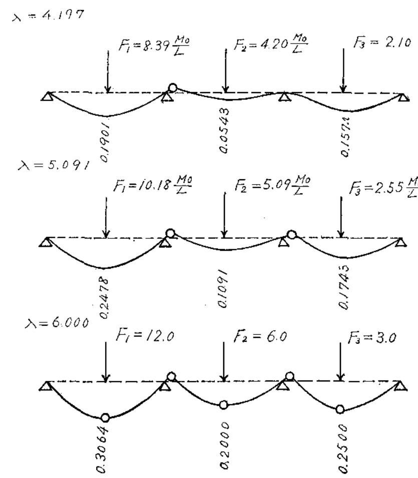
図—5



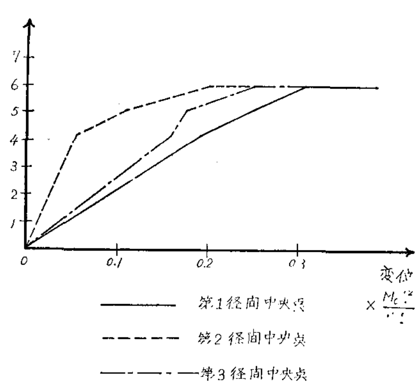
図—6



図—7



図—8



図—9

7. あとがき

マトリックス法（変位法）によって，多径間連続桁の弾塑性解析を行なってきたが，マトリックス法の使用によって，組織的に崩壊に到る過程を追跡することができた。すなわち各塑性関節発生段階における荷重，撓み，撓み角，断面力等を組織的に求めることが，可能になった。これからの問題点として，分布荷重が作用した場合の解析，また崩壊時には，変形がかなり大きくなると予想されるので，有限変形理論を考慮した解析などが必要であろうと思われる。

参考文献

1) 山田嘉昭：はり及びフレーム構造のマトリックス弾塑性解析，生産研究，1968.
2) 田中　尚：骨組の塑性力学，コロナ社.
3) 藤田　譲ほか2名：塑性設計法，森北出版.
4) Pestel, E.C., & Leckie, F.A. : Matrix Method in Elastomechanics, Mc Graw-Hill.