

線荷重を担う扇形平板の曲げ応力特性について

正員 芳村 仁*

正員 ○本 多 祐 也**

1. はしがき

土木・建築等多くの分野で用いられている平板構造のうち、扇形平板について、考察したものである、本研究は、曲線橋等の床版設計の資料として、放射方向の線荷重について、種々のパラメーターの変化によって、曲げがどのように変化するかを明らかにしようとしたものである。

本論文の基本的解法についてはすでに発表した¹⁾が、今回は、主として、その計算例をあげ、このような場合の応力特性を調べてみた。

2. 解 法

平板の曲げの微分方程式は極座標を採用すると次のようになる。

$$\Delta \Delta w(r, \theta) = \frac{q(r, \theta)}{D}$$

ただし

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

D = 板の曲げ剛性

$$= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

ν = ポアソン比

E = 弾性係数

w = たわみ

$q(r, \theta)$ = 分布している荷重強度

方程式(1)の特異解 (Green 関数の主要解) は

$$\frac{1}{8\pi D} R^2 \log R \quad (2)$$

であたえられるので、特解 w_p は次式のようにになる。

$$w_p = \frac{1}{8\pi} \iint_{(A)} R^2 \log R \frac{q(r', \theta')}{D} dA$$

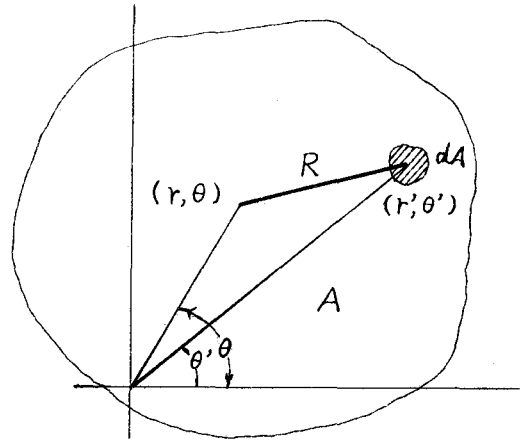
ただし

$(r', \theta') = dA$ の座標

$R = (r, \theta)$ と (r', θ') の距離

$$= [r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta')]^{\frac{1}{2}}$$

A = 平板の領域



図—1

この特解と方程式(1)の同次方程式の解 $w_c(r, \theta)$ を重ね合わせて扇形平板の曲げの解を求めると次のようになる。

$$w_c(r, \theta) = \sum_m (A_m r^m + B_m r^{-m} + C_m r^{m+2} + D_m r^{-m+2}) \cos m\theta \quad (4)$$

次に(3)式の w_p の積分を行なうのであるが図—2のような線荷重の場合、 $\theta = 0$ (載荷点) でのみ p なる荷重強度で、他の領域では 0 であるので、この積分に当っては Dirac の δ 関数を用いる。

図—2 の場合の特解は線荷重の大きさを $p(r)$ とすると

$$q(r, \theta) = p(r) \cdot \delta(\theta) \quad (5)$$

ここに $\delta(\theta)$ は Dirac の δ 関数である。

$$R = [r'^2 + r^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta')]^{\frac{1}{2}}$$

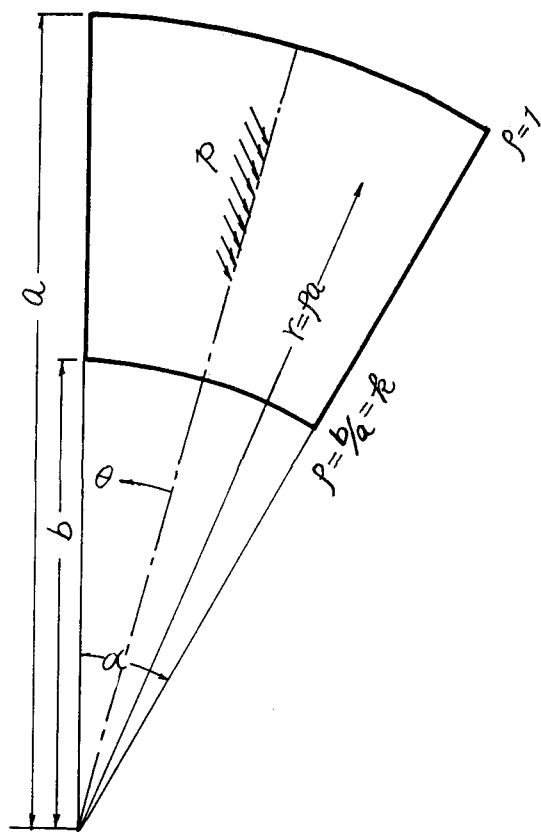
であるので特解 w_p は

$$w_p = \frac{1}{8\pi D} \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \int_b^a \{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta')\} \cdot \log \{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta')\}^{\frac{1}{2}} \cdot p(r') \cdot \delta(\theta') \cdot dr' \cdot d\theta'$$

$$= \frac{1}{16\pi D} \int_b^a p(r') (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta) \times \log (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta) dr'$$

* 北海道大学工学部 教授

** 北海学園大学工学部 助教授



図—2

$$= \frac{1}{16\pi D} \int_b^a f(r', \theta') dr' \quad (6)$$

となる、ここに

$$f(r', \theta') = p(r') (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta) \times \log (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta)$$

次にこの $f(r', \theta')$ を θ についてフーリエ級数に展開する $b < r' < r$ の場合 $r'/r = \xi < 1$ であり

$$r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta = r^2 (1 - \xi \cdot e^{i\theta}) \cdot (1 - \xi \cdot e^{-i\theta}) = r^2 \{ (1 + \xi^2) - 2\xi \cos \theta \}$$

$$\log (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta) = 2 \left(\log r - \sum_m \frac{\xi^m}{m} \cos m \theta \right)$$

故に

$$(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta) \cdot \log (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta) = 2r^2 \{ (1 - \xi^2) \log r - (1 + \xi^2) \xi \cos \theta - 2\xi \cdot$$

$$\log r \cos \theta + 2\xi^2 \cos^2 \theta - \frac{\xi^2}{2} (1 + \xi^2) \cos 2\theta$$

$$+ \xi^3 \cos \theta \cdot \cos 2\theta$$

$$- \frac{\xi^3}{3} (1 + \xi^2) \cos 3\theta + \frac{2}{3} \xi^4 \cos \theta \cdot \cos 3\theta$$

$$- \frac{\xi^4}{4} (1 + \xi^2) \cos 4\theta + \frac{1}{2} \xi^5 \cos \theta \cdot \cos 4\theta$$

$$- \frac{\xi^5}{5} (1 + \xi^2) \cos 5\theta + \frac{2}{5} \xi^6 \cos \theta \cdot \cos 5\theta \quad (7)$$

となり次のように書ける。

$$f(r', \theta) = 2r^2 p(r') \{ K_0 + \sum_m K_m \cos m \theta \} \quad (8)$$

また $r < r' < a$ の場合すなわち $r/r' = \frac{1}{\xi} = \xi' < 1$ の場合

$$f(r', \theta) = 2r'^2 p(r') \{ L_0 + \sum_m L_m \cos m \theta \} \quad (9)$$

ここで無次元化した量を用いるため、 $r = \rho a$, $r' = \rho' a'$ とおきかえると $m \geq 2$ に対しては、

$$\left. \begin{aligned} K_m &= \frac{1}{m(m^2 - 1)} \cdot \frac{\rho'^m}{\rho^m} \\ &\quad \left\{ m + 1 - (m - 1) \frac{\rho'^2}{\rho^2} \right\} \\ L_m &= \frac{1}{m(m^2 - 1)} \cdot \frac{\rho^m}{\rho'^m} \\ &\quad \left\{ m + 1 - (m - 1) \frac{\rho^2}{\rho'^2} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

である。(8), (9)式を(6)式に代入し、

$$\int_b^a f(r', \theta') dr' \rightarrow \int_{\beta}^1 f(\rho', \theta') d\rho'$$

を $p(r) = p = \text{const}$ すなわち等分布線荷重の場合について計算し、扇形平板の中心角 α を半周期とするフーリエ級数展開を次のような形で表わす

$$\left. \begin{aligned} w_p &= \frac{2}{\alpha} \sum_{\beta} \frac{p}{8D} \cdot r_{\beta}(\rho) \cdot \cos \beta \cdot \theta \\ \text{ここで } \beta &= \frac{n\pi}{\alpha}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \\ \alpha &= \text{中心角} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

この式中の $r_{\beta}(\rho)$ の値は $\beta \geq 4$ に対しては

$$r_{\beta}(\rho) = \frac{a^3}{\beta(\beta^2 - 1)} \left\{ \frac{8\beta}{(\beta^2 - 9)} \rho^3 - \rho^3 \left(\frac{\beta + 1}{\beta - 3} - \rho^2 \right) - k^{\beta+1} \cdot \rho^{-\beta} \left(\rho^2 - \frac{\beta - 1}{\beta + 3} k^2 \right) \right\}$$

である。なお $\beta < 4$ に対しては、例えば

$$r_{\beta=2}(\rho) = \frac{a^3}{30} \left\{ \rho^2 (5\rho^2 - 16\rho + 15) + k^3 (k^2 \rho^{-2} - 5) \right\}$$

$$r_{\beta=3}(\rho) = \frac{a^3}{72} \left\{ \rho^3 (3\rho^2 - 1) - 12\rho^3 \log \rho + k^4 \rho^{-1} (k^2 \rho^{-2} - 3) \right\}$$

である。

このようにして求めた w_p と w_c を重ね(4)式の w_c に含まれる未定係数を境界条件、連続条件から決定すれば、種々の支持条件および載荷条件について所要の解が得られる。

3. 数値計算例

数値計算は次の場合について行なった。

中心角 $\alpha = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{36}$

辺比 $L/B = 1.0, 1.5, 2.0$

ポアソン比 $\nu = 0.0, 0.167, 0.3$

支持条件: 4 辺単純支持, 2 円孤辺単純支持

上の条件各々について, 線荷重の載荷状態を図-3 の 5 種について計算した。

次に結果のいくつかを示す。

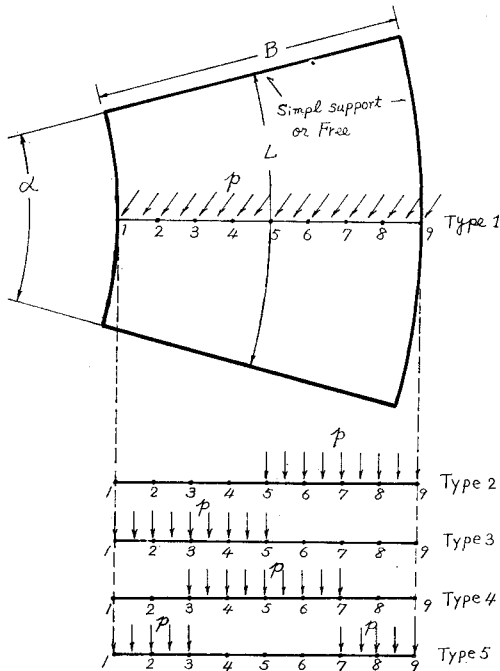


図-3

4. あとがき

以上, 参考になりそうな例をいくつか示したが, 今後, 部分分布荷重についても発表する予定である。

5. 文 献

- 1) Saito, Kawakami and Saito : Proceeding of the Japan National Congress for App. Mech. 1955, 1956.
- 2) R.Courant u. D.Hilbert : Methoden der Mathematischen Physik I., Kap. V.
- 3) R.Courant u. D.Hilbert : Method of Mathematical Physics., Chap. V.
- 4) Timoshenko and Woinowsky-Krieger : Teory of Plates and Shells., chapt. 10.
- 5) K.Girkmann : Flächentragwerke S. 260.
- 6) 寺沢寛一 : 自然科学者のための数学概論, 応用編第 3 章
- 7) 大井鉄郎 : 偏微分方程式とその応用, p. 312.

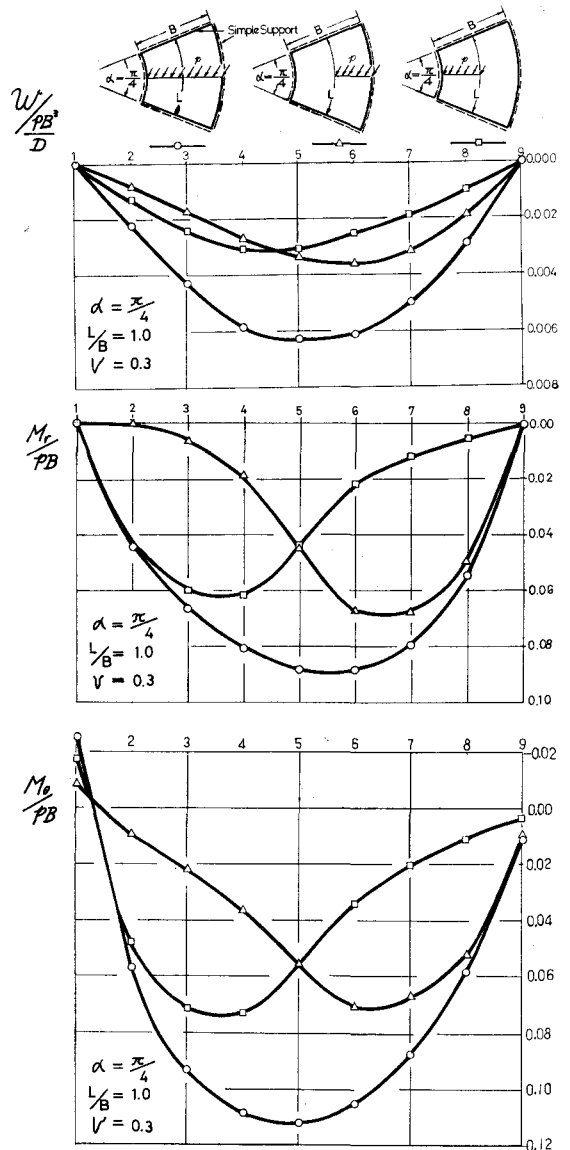
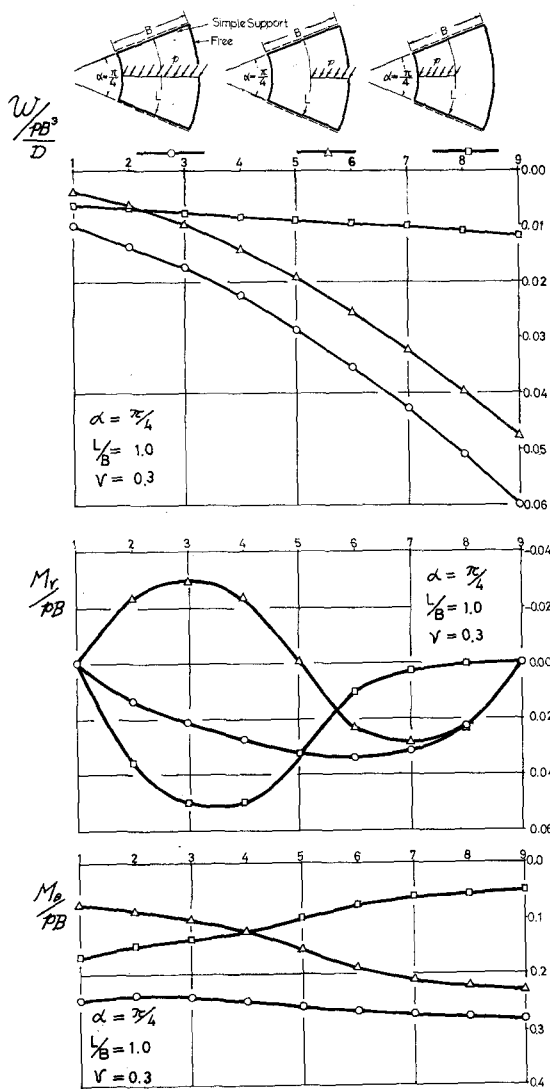
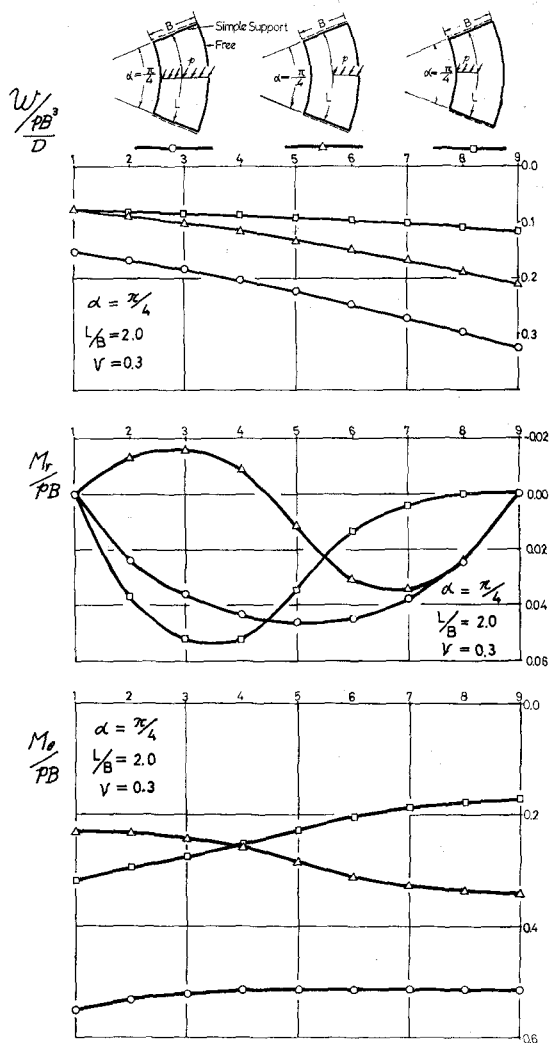


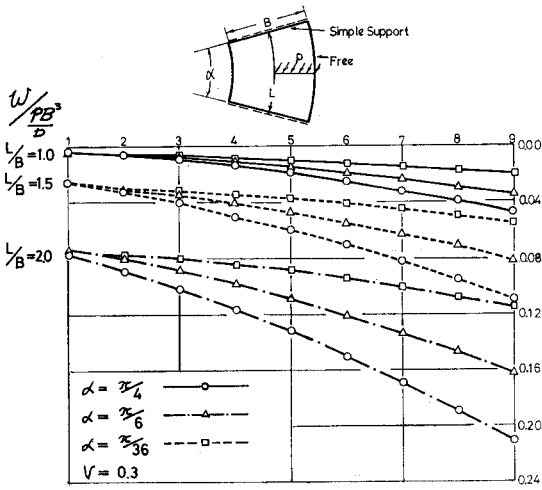
図-4



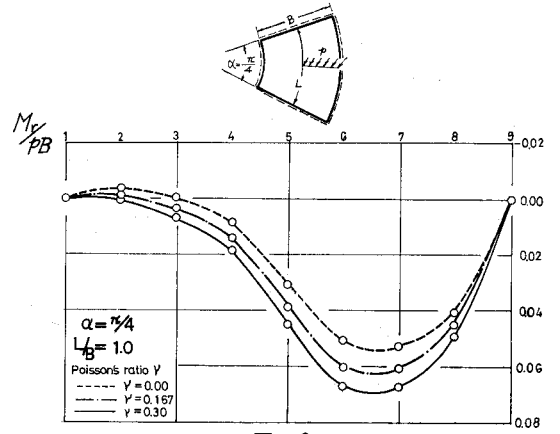
图—5



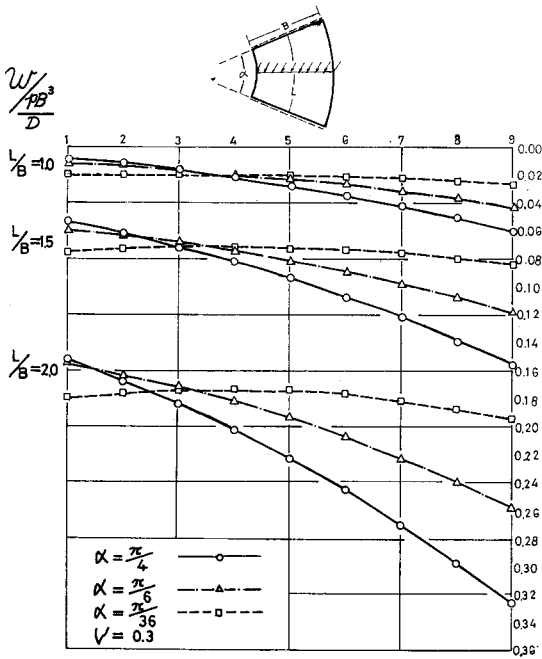
图—6



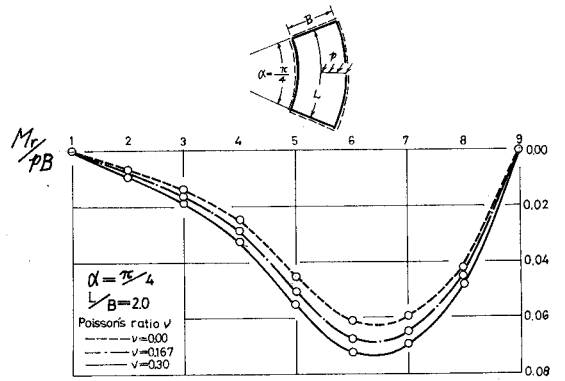
图—7



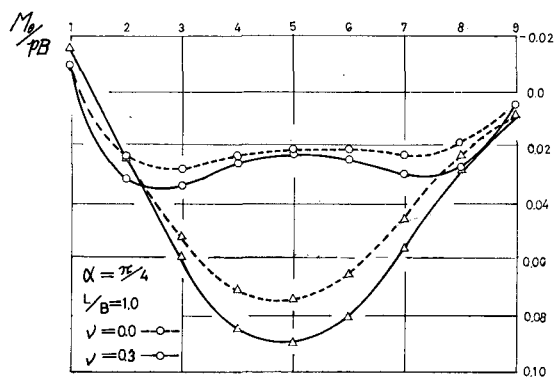
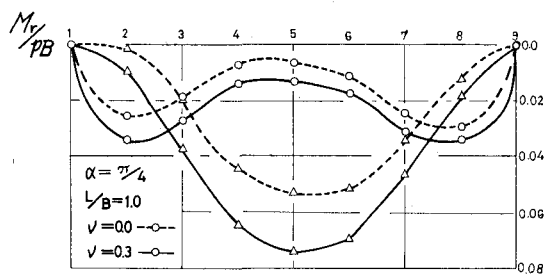
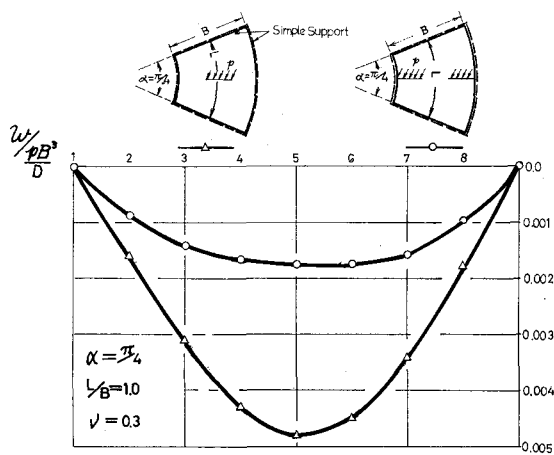
图—9



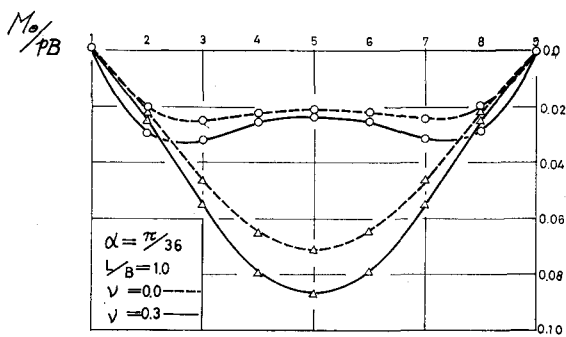
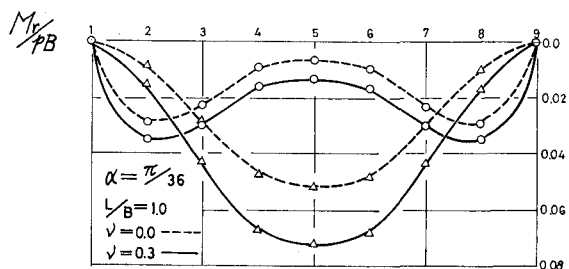
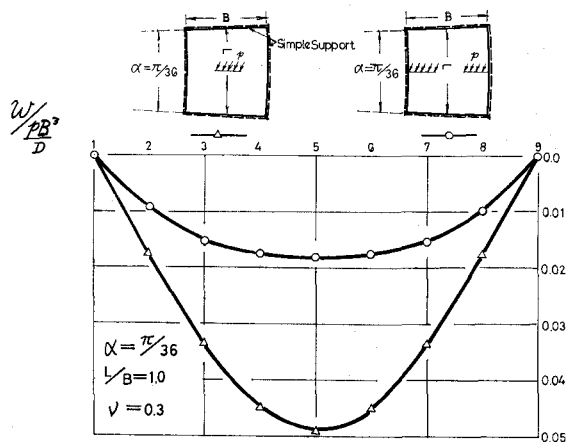
图—8



图—10



图—11



图—12

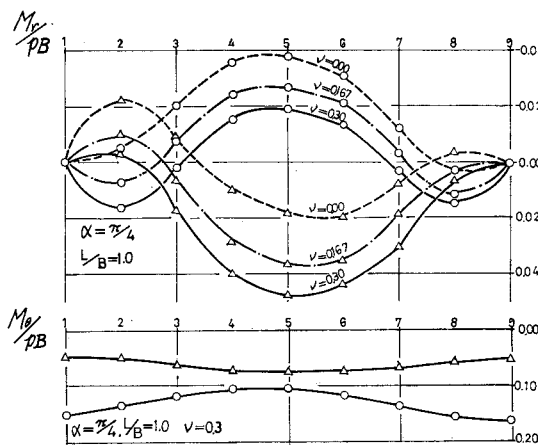
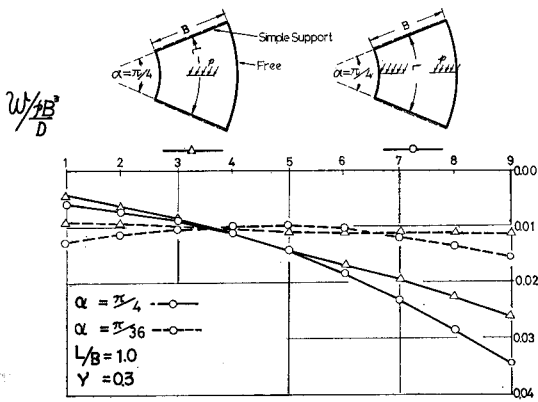


图-13

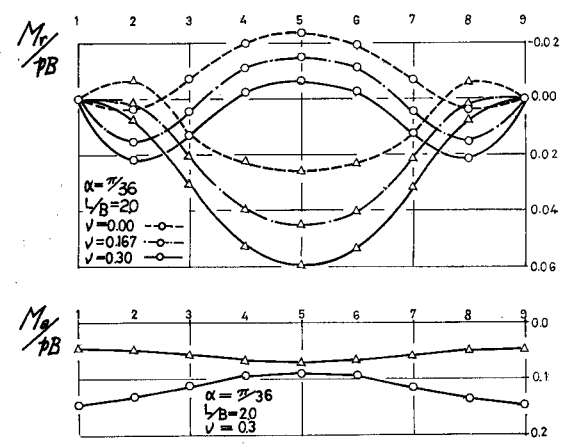
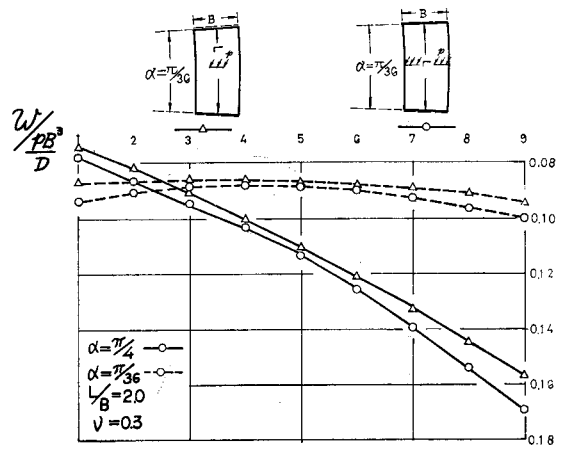


图-14