

等角写像法による平板の解析と計算

正 員 渡 辺 昇*
 学生員 ○杉 本 博 之**

1. は し が き

平板構造物は、土木、建築、機械をはじめ、多くの分野で使用される構造要素であり、その研究例も数多い。本論文は、複素関数理論の弾性問題への応用については古典的名著である Muskhelishvili の "Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity" よりその方法を平板問題に適用したものである。理論の概要は、重調和偏微分方程式を解くことに集約されるわけで、ある解析的 (analytic) 関数を級数展開し、それを境界条件式に代入して、両辺の係数を比較して、その関数を決定するということである。また、5. に数値計算の結果の図、表を書き、他の論文の結果と比較した。

複素関数理論、あるいはその二次元問題への応用については、文献(3)、(11)、(12)等を参照されたい。

2. 記号の定義

$w(x, y)$ = 板のたわみ

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (\text{ラプラスの演算子})$$

$q(x, y)$ = 単位面積当たりの荷重 (q_0 = 等分布荷重)

$D = Eh^3/12(1-\nu^2)$, 板の曲げ剛性

ν = ポアソン比

S = 板の領域 (z -平面)

L = S の境界

n = L の法線方向

s = L の接線方向

$Z = x + iy$, 複素変数

$\bar{Z} = x - iy$, 共役複素変数

$\zeta = u + iv$, 複素変数 (写像領域)

$\omega(\zeta)$ = 領域 S を ζ 平面の単位円に写像する関数

3. 解 法

3-1 固定周辺の場合

* 北海道大学教授 工博

** 北海道大学大学院

薄い等方等質性板のたわみ $w(x, y)$ は次の偏微分方程式を満足しなければならない。

$$\Delta^2 w(x, y) = q(x, y)/D. \quad (3-1)$$

固定周辺の場合の境界条件は、

$$w = \frac{\partial w}{\partial n} = 0. \quad (3-2)$$

方程式 (3-1) の特解 w_1 がわかったとすると、

$$\Delta^2 w_1(x, y) = q(x, y)/D, \quad (3-3)$$

そうすると、(3-1) 式の解は、

$$w(x, y) = w_1(x, y) + U(x, y). \quad (3-4)$$

ここで、 $U(x, y)$ は調和関数である。

文献(1)により、 $q(x, y)$ が解析的関数であれば

$$w_1(x, y) = \frac{1}{16D} \int_{z_0}^z (x-t) dt \int_{\bar{z}_0}^{\bar{z}} (\bar{z}-\bar{t}) q \left(\frac{t+\bar{t}}{2}, \frac{t-\bar{t}}{2i} \right) dt \quad (3-5)$$

等分布荷重 q_0 の場合は、

$$w_1(x, y) = q_0(x^2 + y^2)^2 / 64D = \frac{q_0}{12D} \frac{z^2 \bar{z}^2}{4}. \quad (3-6)$$

原点に作用する集中荷重 P の場合は²⁾

$$w_1(x, y) = \frac{P}{16\pi D} \bar{z} z \log \bar{z} z \quad (3-7)$$

(3-2)、(3-4) 式より境界条件はまた次のようにも表示することができる。

$$\left. \begin{aligned} U(x, y) &= -w_1(x, y) \\ \frac{\partial U(x, y)}{\partial n} &= -\frac{\partial w_1(x, y)}{\partial n} \end{aligned} \right\} \quad (3-8)$$

従って、問題は L 上で境界条件 (3-8) を満足する S 内の調和関数を求めることになる。

領域 S 内の調和関数は次の形をもつ、

$$U(x, y) = \operatorname{Re}[\bar{z}\varphi(z) + \kappa(z)] \quad (3-9)$$

ここで $\varphi(z)$, $\kappa(z)$ は領域 S で解析的な関数である

さて、

$$z = \omega(\zeta) \quad (3-10)$$

を領域 S を単位円

$$1 \leq 1 \quad (3-11)$$

に写像する関数とする。

$$\psi(z) = dx(z)/dz \quad (3-12)$$

とし、 $\varphi(z)$, $\psi(z)$ にテイラー展開をおこなうと、

$$\varphi(\omega(\zeta)) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \zeta^k \quad (3-13)$$

$$\psi(\omega(\zeta)) = \sum_{k=0}^{\infty} a'_k \zeta^k \quad (3-14)$$

さらに、単位円 $\sigma = \exp(i\theta)$ 上での次のフーリエ展開をおこなっておく、

$$\begin{aligned} \omega(\sigma)/\overline{\omega'(\sigma)} &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k \exp(ik\theta) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k \sigma^k \end{aligned} \quad (3-15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial U}{\partial y} &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k \exp(ik\theta) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k \sigma^k \end{aligned} \quad (3-16)$$

写像領域での境界条件の一般表示は²⁾、(3-9)式を x , y で偏微して、

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial U}{\partial x} &= \varphi(z) + \overline{z\varphi'(z)} + \overline{\varphi(z)} + z\overline{\varphi'(z)} \\ &\quad + x'(z) + \overline{x'(z)} \\ 2 \frac{\partial U}{\partial y} &= i \left\{ -\varphi(z) + \overline{z\varphi'(z)} + \overline{\varphi(z)} - z\overline{\varphi'(z)} \right. \\ &\quad \left. + x'(z) - \overline{x'(z)} \right\} \end{aligned}$$

両式を加えて

$$\varphi(z) + \overline{z\varphi'(z)} + \psi(z) = \frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial U}{\partial y}$$

ここで、右辺は (3-8) 式より、

$$\frac{\partial U}{\partial n} = -\frac{\partial w_1}{\partial n}, \quad \frac{\partial U}{\partial s} = -\frac{\partial w_1}{\partial s}$$

であるから

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial U}{\partial y} &= \left(\frac{\partial U}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial x} \right) \\ &\quad + i \left(\frac{\partial U}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial y} \right) \\ &= - \left\{ \left(\frac{\partial w_1}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial x} \right) \right. \\ &\quad \left. + i \left(\frac{\partial w_1}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial y} \right) \right\} \\ &= - \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} + i \frac{\partial w_1}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

である。

結局、写像領域での境界条件は、

$$\varphi(\sigma) + \frac{w(\sigma)}{w'(\sigma)} \overline{\varphi'(\sigma)} + \overline{\varphi(\sigma)} = \frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial U}{\partial y} \quad (3-17)$$

となる。

(3-17) 式に (3-13) ~ (3-16) 式を代入すると、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sigma^k + \sum_{l=-\infty}^{\infty} b_l \sigma^l \sum_{k=1}^{\infty} k \overline{a_k} \sigma^{-k+l} + \sum_{k=0}^{\infty} \overline{a_k} \sigma^{-k} \\ = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \sigma^k \end{aligned} \quad (3-18)$$

両辺の σ^m の係数を較べて、

$$a_m + \sum_{k=1}^{\infty} k \overline{a_k} b_{m+k-1} = A_m \quad (m=1, 2, \dots) \quad (3-19)$$

$$a'_m + \sum_{k=1}^{\infty} k \overline{a_k} b_{-m+k-1} = A_{-m} \quad (m=0, 1, 2, \dots) \quad (3-20)$$

(3-15), (3-16) 式より、 b_k , A_k は実数であるから
上式の a_k , $\overline{a_k}$ は実数である、つまり、

$$a_k = \overline{a_k}, \quad \overline{a_k} = a_k$$

よって (3-19) 式をマトリクス表示すると、 m が 1 ~ 7 の場合、

$$\begin{pmatrix} 1+b_1 & 2b_2 & 3b_3 & 4b_4 & 5b_5 & 6b_6 & 7b_7 \\ b_2 & 1+2b_3 & 3b_4 & 4b_5 & 5b_6 & 6b_7 & 0 \\ b_3 & 2b_4 & 1+3b_5 & 4b_6 & 5b_7 & 0 & 0 \\ b_4 & 2b_5 & 3b_6 & 1+4b_7 & 0 & 0 & 0 \\ b_5 & 2b_6 & 3b_7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ b_6 & 2b_7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ b_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \\ A_7 \end{pmatrix}^T \quad (3-19')$$

(3-19') を解くことにより a_k が求まり、 a_k の値を (3-20) 式に代入して $\overline{a_k}$ が求まる。

次に、 $x(\zeta)$ は (3-12) 式により、

$$\psi(\omega(\zeta)) = \frac{dx(\omega(\zeta))}{d\omega(\zeta)} = \frac{dx(\omega(\zeta))}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{d\omega(\zeta)}$$

となり、従って、

$$x(\zeta) = \int \psi(\omega(\zeta)) \times \frac{d\omega(\zeta)}{d\zeta} d\zeta \quad (3-21)$$

ここで、写像関数を、

$$\omega(\zeta) = B \sum_{i=1}^n d_i \zeta^i \quad (3-22)$$

$$\omega'(\zeta) = B \sum_{i=1}^n d_i' \zeta^{i-1} \quad (3-23)$$

とする、ここで B は後述するが、領域間の対応関係で求まる実常数である。

そうすると、(3-14) 式、(3-23) 式より、

$$\psi(\zeta) \omega'(\zeta) = B \sum_{j=1}^{2n} \left[\sum_{i=1}^j a_i d_{j-i+1}' \right] \zeta^{i-1}$$

となる。ゆえに、

$$x(\zeta) = B \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} \left[\sum_{i=1}^k a_i d_{k-i+1}' \right] \right) \zeta^k - C \quad (3-24)$$

ここで、 C は積分常数であり、実数である。

$$\omega_1(\zeta) = \omega(\zeta)/B \quad (3-22')$$

とおくと、求めるたわみ曲面、例えば等分布荷重載荷の場合は、

$$\begin{aligned} w(x, y) &= w_1(x, y) + (U(x, y)) \\ &= \frac{q_0}{16D} B^4 \cdot \frac{1}{4} \frac{(\omega_1(\zeta) \times \overline{\omega_1(\zeta)})^2}{4} + \operatorname{Re} \left\{ \overline{\omega_1(\zeta)} \times \right. \\ &\quad \left. \times \varphi(\omega_1(\zeta)) + \int_0^5 \phi(\omega_1(\zeta)) \times \omega_1(\zeta) d\zeta \right\} - \\ &\quad C_1 \} \end{aligned} \quad (3-25)$$

C_1 は(3-2)式より、 $\omega(\sigma) = 0$ であるから、

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{(\omega_1(\sigma) \times \overline{\omega_1(\sigma)})^2}{4} + \operatorname{Re} \left\{ \overline{\omega_1(\sigma)} \times \varphi(\sigma) \right. \\ &\quad \left. + \int \phi(\sigma) \times \omega_1(\sigma) d\sigma \right\} \end{aligned} \quad (3-26)$$

となる。

(3-25)式を、(3-13)、(3-22)、(3-24)、(3-22')式を用いて級数表示すると、

$$\begin{aligned} w(x, y) &= \frac{q_0}{16D} B^4 \times \left\{ \frac{1}{4} \left(\sum_{i=1}^n d_i \zeta^i \right)^2 \times \left(\sum_{i=1}^n \overline{d_i \zeta^i} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{Re} \left\{ \left(\sum_{i=1}^n d_i \zeta^i \right) \times \sum_{k=1}^n a_k \zeta^k + \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^k a_i' d_{k-i+1} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \zeta^k \right\} - C_1 \right\} \end{aligned} \quad (3-27)$$

と表わすことができる。

3-2 単純支持周辺の場合

単純支持周辺の場合の境界条件は、文献(4)、(5)より、

$$w = \Delta w = 0 \quad (3-28)$$

(3-1)の特解を w_1 とすると、前と同様に、

$$\Delta^2 w_1(x, y) = q(x, y)/D \quad (3-3)$$

$$w(x, y) = w_1(x, y) + U(x, y) \quad (3-4)$$

(3-28)、(3-4)式より、また境界条件は、

$$\begin{aligned} U(x, y) &= -w_1(x, y) \\ \Delta U(x, y) &= -\Delta w_1(x, y) \end{aligned} \quad (3-29)$$

結局、問題は次のように置換れる。

$$\Delta^2 U = 0 \quad (3-30)$$

の解であり、境界条件(3-29)を満足する解を求めることである。

(3-30)の解は一般に、(3-9)で表わされる。また(3-10)～(3-14)式は、ここでも有効である。

さて、単純支持の場合の写像領域での境界条件を考える(3-9)式より、

$$2U = \overline{z\varphi(z)} + x(z) + \overline{z\varphi(\overline{z})} + \overline{x(\overline{z})}$$

x, y でそれぞれ2回偏微分すると、

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= 2\varphi'(z) + 2\overline{\varphi'(\overline{z})} + \overline{z\varphi''(\overline{z})} + \overline{z\varphi''(z)} \\ &\quad + \overline{x''(z)} + \overline{x''(\overline{z})} \end{aligned} \quad (3-31)$$

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} &= 2\varphi'(z) + 2\overline{\varphi'(\overline{z})} - \overline{z\varphi''(\overline{z})} - \overline{z\varphi''(z)} \\ &\quad - \overline{x''(z)} - \overline{x''(\overline{z})} \end{aligned} \quad (3-32)$$

(3-31)式と(3-32)式を加えて、

$$\varphi'(z) + \overline{\varphi'(\overline{z})} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \quad (3-34)$$

あるいは、

$$\begin{aligned} \overline{\omega'(\sigma)} \cdot \varphi'(\sigma) + \omega'(\sigma) \cdot \overline{\varphi'(\overline{\sigma})} &= \omega'(\sigma) \times \overline{\omega'(\overline{\sigma})} \\ &\quad \times \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (3-34')$$

(3-34')式の右辺を、

$$\omega'(\sigma) \times \overline{\omega'(\overline{\sigma})} \times -\frac{1}{2} \left(\frac{\sigma^2 U}{\sigma x^2} + \frac{\sigma^2 U}{\sigma y^2} \right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k \sigma^k \quad (3-35)$$

とし、(3-13)、(3-14)、(3-22)、(3-35)式を(3-34')式に代入すると、

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{k=1}^{\infty} k d_k \sigma^{-k+1} \right) \times \left(\sum_{k=1}^{\infty} k a_k \sigma^{k-1} \right) + \left(\sum_{k=1}^{\infty} k d_k \sigma^{k-1} \right) \times \\ &\quad \times \left(\sum_{k=1}^{\infty} k a_k \sigma^{-k+1} \right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k \sigma^k \end{aligned}$$

左辺は、

$$\begin{aligned} &\sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} k a_k (m+k) d_{m+k} \right) \sigma^{-m} \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} k a_k (k-m) d_{k-m} \right) \sigma^m + \\ &+ \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} k a_k (k-m) d_{k-m} \right) \sigma^{-m} \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} k a_k (m+k) d_{m+k} \right) \sigma^m \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (m+k) d_{m+k} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=m+1}^{\infty} k a_k (k-m) d_{k-m} \right\} \sigma^{-m} \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (m+k) d_{m+k} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=m+1}^{\infty} k a_k (k-m) d_{k-m} \right\} \sigma^m \end{aligned}$$

よって、(3-34')式は、

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} k(m+k) a_k d_{m+k} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=m+1}^{\infty} k(k-m) a_k d_{k-m} \right\} \sigma^m \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \text{同 上} \right\} \sigma^{-m} = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \sigma^m + \sum_{m=1}^{\infty} A_{-m} \sigma^{-m} \end{aligned}$$

両辺の σ^m の係数を比較して、

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(m+k) a_k d_{m+k} + \sum_{k=m+1}^{\infty} k(k-m) a_k d_{k-m} = A_m$$

あるいは、

$$\sum_{k=1}^m k(k+m) d_{k+m} a_k + \sum_{k=m+1}^{\infty} k \left\{ (k+m) d_{k+m} + \right.$$

$$+(k-m)d_{k-m}\} a_k = A_m \quad (m=0, 1, 2, \dots)$$

(3-36)

(3-36) 式は例えば, $m=0 \sim 4$ の場合は,

$$d_i = i d_1$$

において, 次のようにマトリクス表示できる。

(3-36) 式が, $\varphi(\zeta)$ を決定する連立一次方程式であ

る。

$$\begin{pmatrix} (d_1+d_1) & 2(d_2+d_2) & 3(d_3+d_3) & 4(d_4+d_4) & 5(d_5+d_5) \\ d_2 & 2(d_3+d_1) & 3(d_4+d_2) & 4(d_5+d_3) & 5d_4 \\ d_3 & 2d_4 & 3(d_5+d_1) & 4d_2 & 5d_3 \\ d_4 & 2d_5 & 0 & 4d_1 & 5d_2 \\ d_5 & 0 & 0 & 0 & 5d_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_5 \end{pmatrix} \quad (3-37)$$

つまり,

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} d_1 & 2d_2 & 3d_3 & 4d_4 & 5d_5 \\ d_2 & 2d_3 & 3d_4 & 4d_5 & 0 \\ d_3 & 2d_4 & 3d_5 & 0 & 0 \\ d_4 & 2d_5 & 0 & 0 & 0 \\ d_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 & 2d_2 & 3d_3 & 4d_4 & 5d_5 \\ 0 & 2d_1 & 3d_2 & 4d_3 & 4d_5 \\ 0 & 0 & 3d_1 & 4d_2 & 5d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 4d_1 & 5d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5d_1 \end{pmatrix} \right\} \times \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix}$$

あるいは,

$$[\mathbf{a}] = ([\mathbf{d}_1] + [\mathbf{d}_2])^{-1} \times [\mathbf{A}] \quad (3-38)$$

(3-38)式より a_k が求まると, (3-29), (3-9) 式より,

$$\omega(\sigma)\varphi(\sigma) + \bar{\omega}(\sigma)\varphi(\sigma) + \kappa(\sigma) + \bar{\kappa}(\sigma) = -2w_1 \quad (3-39)$$

ここで,

$$-2w_1 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} D_k \sigma^k \quad (3-40)$$

$$\kappa(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \zeta^k \quad (3-41)$$

とおき, (3-39) 式に (3-13), (3-41), (3-22) 式を代入すると,

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \sigma^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k \sigma^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k \sigma^k - \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} d_k \sigma^k \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sigma^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} d_k \sigma^{-k} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sigma^k \right\}.$$

上式を変形して,

$$2c_0 + \sum_{m=1}^{\infty} c_m \sigma^m + \sum_{m=1}^{\infty} c_m \sigma^{-m} = D_0 + \sum_{m=1}^{\infty} D_m \sigma^m$$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_2 & (a_1+a_3) & (a_2+a_4) & (a_3+a_5) & a_1 \\ a_3 & a_4 & a_1+a_5 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & 0 & a_1 & a_2 \\ a_5 & 0 & 0 & 0 & a_1 \\ a_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} & + \sum_{m=1}^{\infty} D_m \sigma^{-m} - \left[\sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} d_k a_{k-m} \right) \times \sigma^m \right. \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} d_k a_{k+m} \right) \sigma^{-m} + \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} d_k a_{k+m} \right) \sigma^m \\ & \left. + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} d_k a_{k-m} \right) \sigma^{-m} \right] \end{aligned} \quad (3-42)$$

(3-42) 式において両辺の σ^m の係数を比較して,

$$\left. \begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2} D_0 - \sum_{k=1}^{\infty} d_k a_k \\ c_m &= D_m - \sum_{k=m+1}^{\infty} d_k a_{k-m} - \sum_{k=1}^{\infty} d_k a_{k+m} \\ &= D_m - \sum_{k=1}^{\infty} d_k a_{k+m} - \sum_{k=m+1}^{\infty} (a_{k-m} + a_{k+m}) d_k \end{aligned} \right\} \quad (3-43)$$

(3-43) 式より, c_m が求まる。

または, $m=1 \sim 5$ の場合 (3-43) 式をマトリクス表示すると,

あるいは,

$$[\mathbf{c}] = [\mathbf{D}] - [\mathbf{A}_2] \times [\mathbf{d}] \quad (3-43')$$

結局求めるたわみ曲面は,

$$\begin{aligned} w(x, y) &= w_1(x, y) + U(x, y) \\ &= w_1(\zeta) + \operatorname{Re}(\overline{\omega(\zeta)} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \zeta^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k \zeta^k) \end{aligned}$$

となる。

3-3 モーメント・せん断力

$$\begin{aligned} M_x + M_y &= -D(1+\nu) \Delta w \\ &= -4D(1+\nu) \left\{ \operatorname{Re}(\varphi'(z)) + \frac{\partial^2 w_1}{\partial z \partial \bar{z}} \right\} \\ &= -4D(1+\nu) \left\{ \operatorname{Re}(\varphi_i(\zeta)) + M_x^0 + M_y^0 \right\} \\ M_y - M_x + 2iM_{xy} &= D(1-\nu) \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 w \right. \\ &= 4D(1-\nu) \left\{ \frac{1}{2} (z \bar{\varphi}''(z) + \varphi''(z)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} \right\} \\ &= 4D(1-\nu) \left\{ \frac{1}{2} (\overline{\omega(\zeta)} \varphi_i'(\zeta) + \chi_i'(\zeta)) \right. \\ &\quad \left. + M_y^0 - M_x^0 + 2iM_{xy}^0 \right\} \\ Q_x - iQ_y &= -D \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \Delta^2 w \\ &= -8D \left\{ \frac{1}{2} \varphi''(z) + \frac{\partial^3 w_1}{\partial^2 z \partial \bar{z}} \right\} \\ &= -8D \left\{ \frac{1}{2} \varphi_i'(\zeta) + Q_x^0 - iQ_y^0 \right\} \end{aligned} \quad (3-45)$$

ここで, $\varphi_i(\zeta) = \varphi'(z)/\omega'(\zeta)$

$$\varphi_i'(\zeta) = (\varphi''(z) \times \omega'(\zeta) - \varphi'(z) \cdot \omega''(\zeta)) / \omega'(\zeta)^3$$

$$\chi_i'(\zeta) = (\omega''(z) \times \omega'(\zeta) - \omega'(z) \cdot \omega''(\zeta)) / \omega'(\zeta)^3$$

(3-46)

$M_x^0, M_y^0, M_{xy}^0, Q_x^0, Q_y^0$ は ζ 平面の各成分である。

4. 等角写像

いままでの記述で明らかのように, Muskhelishvili の方法の応用においては, 写像関数が大きな比重を占めている。ここで, 以下に写像関数の例を, 2, 3 紹介しよう。

写像関数は, z —平面の原点と ζ —平面の原点とを対応させることにする, つまり,

$$\omega(0) = 0. \quad (4-1)$$

i) 正方形板の写像関数

z —平面で各頂点が $(a, a), (a, -a), (-a, a), (-a, -a)$ である正方形板を ζ —平面の単位円内部に写像する関数は, 文献(6), (7)より次のように級数表示できる。

$$\begin{aligned} \omega(\zeta) &= B \left[\zeta - \left(\frac{1}{2} \right) (\zeta^5 / 5 \cdot 1.) + (1 \cdot 3 / 2^2) \right. \\ &\quad \left. (\zeta^9 / 9 \cdot 2.) \dots \right] \end{aligned} \quad (4-2)$$

ここで, B は両座標間の点の対応で決定される実定数で,

$$\omega(1) = a$$

表—1 項数 m と B の関係

m	3	5	7	9	10
B	1.061947	1.070993	1.074094	1.075563	1.076392

という条件より求めた。上に (4-2) 式の項数と B の値の関係の表を示す。

また, 図—1 は正方形板の写像の結果を描いたものである。

ii) 正三角形板の写像関数

z —平面で各頂点が $(\frac{\sqrt{3}}{6}a, \frac{a}{2}), (-\frac{\sqrt{3}}{6}a, \frac{a}{2}), (\frac{\sqrt{3}}{6}a, -\frac{a}{2})$ である正三角形板を ζ —平面の単位円内部に写像する関数は, 文献(6)より次のように級数表示できる。

$$\begin{aligned} \omega(\zeta) &= B \left[\zeta - \left(\frac{1}{3} \right) (\zeta^4 / 4 \cdot 1.) + (2 \cdot 5 / 3^2) \right. \\ &\quad \left. (\zeta^7 / 7 \cdot 2.) - \dots \right] \end{aligned} \quad (4-4)$$

ここで, B は前と同様に両座標間の点の対応で求まる実

定数で,

$$\omega(1) = \frac{\sqrt{3}}{6} a \quad (4-5)$$

という条件より求めた。例えば, (4-4) 式で5項までとったとき, 次の様な値をとる,

$$B = 0.321416 \times a \quad (4-6)$$

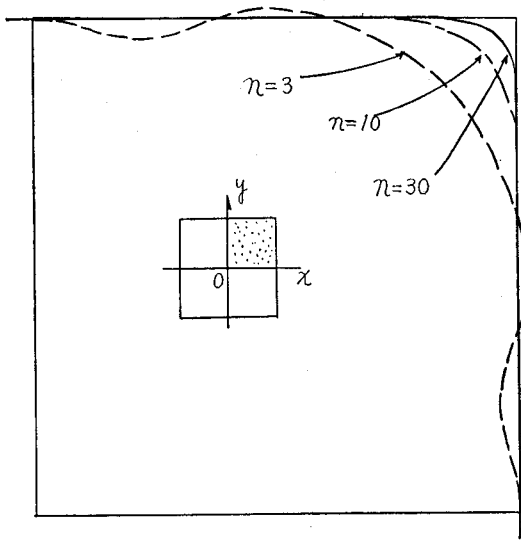
また, 図—2 は正三角形板の写像の結果を描いたものである。

iii) 菱形板の写像関数

図—3 のように, z —平面の頂角が $k\pi, (k-1)\pi$ であり, かつ一辺が a である菱形板を ζ —平面の単位円内部に写像する関数は, Schwarz-Christoffel の公式より,

$$z = \omega(\zeta) = B \int (1 + \zeta^2)^{-k} (1 - \zeta^2)^{k-1} d\zeta \quad (4-7)$$

である。



図—1 正方形板の写像

$$(1-\zeta^2)^{k-1} = 1 - \frac{k-1}{1!} \zeta^2 + \frac{(k-1)(k-2)}{2!} \zeta^4 - \frac{(k-1)(k-2)(k-3)}{3!} \zeta^6 + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} a_{2,i} \zeta^{i-1} \quad (4-9)$$

ただし,

$$a_{1,i} = a_{2,i} = 0 \quad (i=2, 4, 6, \dots)$$

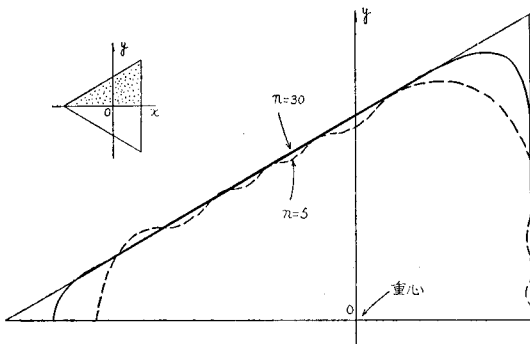
次に, (4-8), (4-9) 式を (4-7) 式に代入すると, 結局写像関数は

$$z = w(\zeta) B \left(\sum_{i=1}^{2n-1} \frac{1}{i} \left[\sum_{j=1}^i a_{1,j} a_{2,i-j+1} \right] \zeta^i \right) \quad (4-10)$$

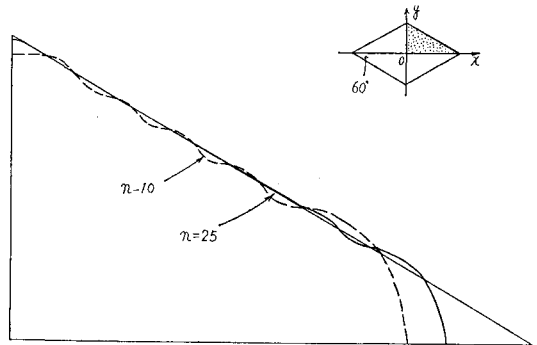
Bの定義は前と同様であるが, 例えば $a=2.0$, $k=0.5$ で (4-8), (4-9) 式でそれぞれ3項ずつとった場合は, 次のような値をとる,

$$B=0.896359$$

図—4は菱形板(頂角が 120° と 60°)の写像結果を描いたものである。



図—2 正三角形板の写像



図—4 菱形板 (60° , 120°) の写像

iv) 長方形板の写像関数

長方形板の写像関数の場合は, 長方形を単位円に写像する関数の級数展開が困難であるので, 単位円を長方形に写像する関数を利用する。つまり, 長方形を単位円に写像する関数は,⁶⁾

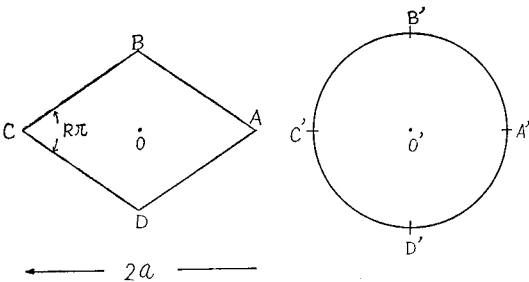
$$\begin{aligned} \zeta &= sn(k, z) \cdot dn(k, z) / cn(k, z) \\ &= sn(k, z) \cdot dn(k', iz) \end{aligned} \quad (4-11)$$

ここで, k, k' はそれぞれ母数で,

$$k^2 + k'^2 = 1. \quad (4-12)$$

(4-11) 式は,

$$\begin{aligned} sn(k, u) &= u - \frac{1+k^2}{3!} u^3 + \frac{1+14k^2+k^4}{5!} u^5 \\ &\quad - \frac{1+135k^2+135k^4+k^6}{7!} u^7 \\ &\quad + \frac{1+1228k^2+5478k^4+1228k^6+k^8}{9!} u^9 \end{aligned} \quad (4-13)$$



図—3

ここで, 積分内の式をテイラー展開すると,

$$\begin{aligned} (1+\zeta^2)^{-k} &= 1 - k\zeta^2 + \frac{k(k+1)}{2!} \zeta^4 \\ &\quad - \frac{k(k+1)(k+2)}{3!} \zeta^6 + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} a_{1,i} \zeta^{i-1} \end{aligned} \quad (4-8)$$

$$dn(k, u) = 1 - \frac{k^2}{2} u^2 + \frac{k^2(k^2+4)}{4} u^4 - \frac{k^2(k^4+44k^2+16)}{6} u^6 + \dots + \frac{k^2(k^6+408k^4+912k^2+64)}{8} u^8 + \dots \quad (4-14)$$

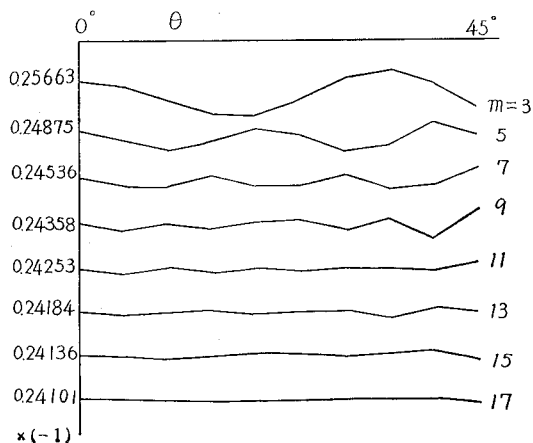
により級数表示でき、文献(8)により、その逆級数をとって、長方形を単位円に写像する関数を求める。なお、snあるいはdn関数の詳細は文献(9)を参照されたい。

5. 数値計算例

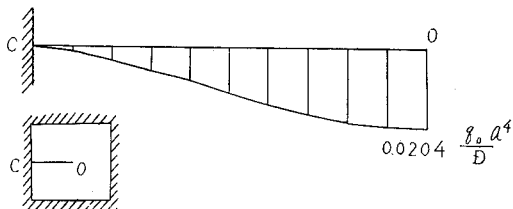
数値計算例として、固定周辺の正方形板（図—5～7）単純支持周辺の正方形板（図—8～9），固定周辺の菱形板（表—2），単純支持周辺の菱形板（表—3）を示す。また、荷重条件はすべて等分布荷重 q_0 が作用した場合である。

i) 固定周辺の場合

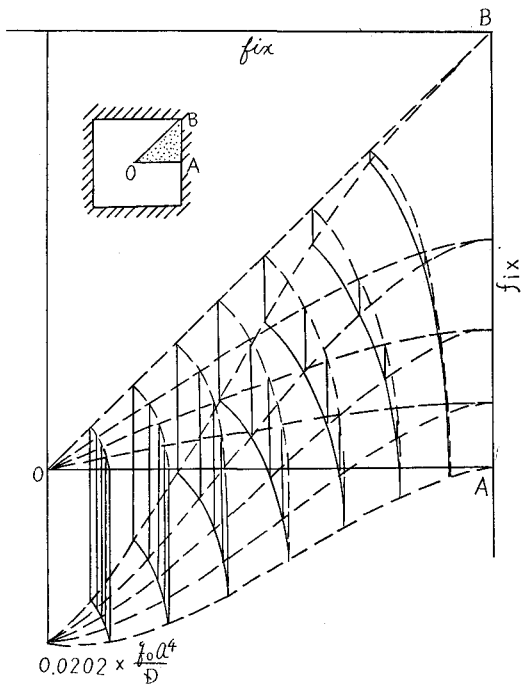
固定周辺の場合、(3—24) あるいは (3—25) 式のように積分常数がはいってくるが、その収束の状況を示したのが図—5 である。ここでは、一例として、正方形板の場合の結果を描いてあるが、項数が増えてくるにつれて、常数の値の振幅が小さくなるのがわかる。横軸の θ は、 ζ —平面の単位円において、 u 軸より反時計方向に測った角度という意味である。図—6 は (4—2) 式の写



図—5 m と C_1 の変化の関係



図—6 $m = 3$ の場合の $\theta = 0$ に沿ったたわみ曲線



図—7 $m = 20$ の場合のたわみ曲面と等角写像

表—2 固定支持菱形板の等分布荷重 q_0 が载荷したときの数値計算結果

($\nu = 0.3$)

角度	項数	$w(0,0) = \frac{k_1 q_0 \times a^4 / D}{k_1 (\times 10^{-3})}$	$M_x(0,0) = \frac{k_2 \times q_0 a^2}{k_2 (\times 10^{-2})}$	$M_y(0,0) = \frac{k_3 \times q_0 a^2}{k_3 (\times 10^{-2})}$
60°	9	0.729	1.510	1.933
	23	0.762	1.540	1.971
	*	0.769	1.544	1.979
70°	9	1.014	1.894	2.225
	23	1.024	1.896	2.227
	*	1.021	1.880	2.210
80°	9	1.187	2.140	2.318
	23	1.205	2.151	2.329
	*	1.200	2.139	2.316
90°	9	1.242	2.278	2.278
	23	1.269	2.298	2.298
	**	1.26	2.31	2.31

* MORLEY による値

** TIMOSHENKŌ による値

像関数において、3項までとったときの線分O—Aに沿ったたわみ曲線を描いたものである。たわみの最大値がTimoshenko⁹⁾による最大値 $(0.0202 \times q_0 a^4/D)$ と良く一致している。図—7は同様に写像関数を20項までとったときのたわみ曲面および等角写像の内部の様子を描いたものである。対称性から全体の $\frac{1}{2}$ だけ示してある。また、表—2は、菱形板の最大たわみ、原点0における M_x 、 M_y 等の値を各頂角($60^\circ \sim 90^\circ$)ごとに、写像関数の項数による変化、また、L. S. D. Morley¹⁰⁾による結果と比較したものである。

ii) 単純支持周辺の場合

3—2の理論を等分布荷重 q_0 が載荷した場合に応用するとお3—2に続いて以下の展開が必要となる。

写像関数は前と同様に、

$$\omega(\zeta) = B \sum_{i=1}^n d_i \zeta^i \quad (3-22)$$

あるいは、

$$\omega_1(\zeta) = \omega(\zeta)/B \quad (3-22')$$

とする。

等分布荷重 q_0 が載荷された場合は、(3—6)式より、

$$w_1(x, y) = \frac{q_0}{64D} z^2 \bar{z}^2 \quad (3-6)$$

であるから、

$$\begin{aligned} \Delta w_1(x, y) &= \frac{\partial^2 w_1(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_1(x, y)}{\partial y^2} \\ &= \frac{q_0}{4D} z \bar{z} \end{aligned} \quad (5-1)$$

(3—29), (3—35) 式より

$$\begin{aligned} \omega'(\sigma) \cdot \overline{\omega'(\sigma)} &\times \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \\ &= \omega'(\sigma) \cdot \overline{\omega'(\sigma)} \cdot \left\{ -\frac{1}{2} \Delta w_1(\sigma) \right\} \\ &= -\frac{q_0}{8D} B^4 \times \omega_1(\sigma) \cdot \overline{\omega_1(\sigma)} \cdot \omega_1(\sigma) \cdot \overline{\omega_1(\sigma)} \\ &= -\frac{q_0}{8D} B^4 \times \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \sigma^k \end{aligned} \quad (5-2)$$

従って、

$$\begin{aligned} \sum A_k \sigma^k &= - \left(\sum_{k=1}^n d_k \sigma^k \right) \left(\sum_{k=1}^n d_k \sigma^{-k} \right) \left(\sum_{k=1}^n k d_k \sigma^{k-1} \right) \\ &\quad \times \left(\sum_{k=1}^n k d_k \sigma^{-k+1} \right) \\ &= - \left(\sum_{k=-n+1}^{n-1} a'_{k+n} \sigma^k \right) \left(\sum_{k=-n+1}^{n-1} b'_{k+n} \sigma^k \right) \end{aligned} \quad (5-3)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=-n+1}^{n-1} a'_{k+n} \sigma^k &= \sum_{m=0}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^m d_k d_{n-m+k} \right) \sigma^{-m} \\ &\quad + \sum_{m=1}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{2n-m} d_k d_{k+m-n} \right) \sigma^m \\ \sum_{k=-n+1}^{n-1} b'_{k+n} \sigma^k &= \sum_{m=0}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^m d'_k d_{n-m+k} \right) \sigma^{-m} \\ &\quad + \sum_{m=1}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{2n-m} d'_k d'_{k+m-n} \right) \sigma^m \end{aligned} \right\} \quad (5-4)$$

となる。(5—3) 式の両辺を比較して結局、

$$A_{i-1} = - \sum_{k=i}^{2n-1} a'_k b'_{2n-1-k+i} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (5-5)$$

また、(3—40) 式より、

$$\begin{aligned} -2\tau w_1 &= -\frac{q_0}{32D} B^4 (\omega_1(\sigma) \cdot \overline{\omega_1(\sigma)})^2 \\ &= -\frac{q_0}{8D} B^4 \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k \sigma^k \end{aligned} \quad (5-6)$$

である。これに、(5—5) 式を応用して、

$$D_{i-1} = -\frac{1}{4} \sum_{k=i}^{2n-1} a'_k a'_{2n-1-k+i} \quad (i=1, 2, \dots, n+1) \quad (5-7)$$

となる。

(注)：3節の A_i 、 D_i と本節の A_i 、 D_i とは(5—2)

(5—6) 式の様子、 $q_0 B^4/8D$ を常数として、前にくり出しているのが若干性質を異にする。

(3—38) 式は、

$$[a] = \frac{q_0}{8D} B^4 \left\{ [d_1] + [d_2] \right\}^{-1} \times [A] \quad (5-8)$$

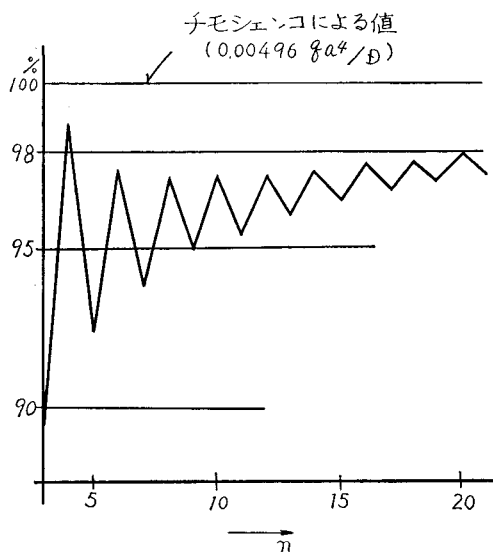
(3—43') 式は、

$$[C] = \frac{q_0}{8D} B^4 \left\{ [D] - [A_2] \times [d] \right\} \quad (5-9)$$

となり、結局求めるたわみ曲面(3—44) 式は、

$$\begin{aligned} w(x, y) &= \frac{q_0}{8D} B^4 \left\{ \frac{1}{8} \left(\sum_{i=1}^n d_i \zeta^i \right)^2 \times \left(\sum_{i=1}^n d_i \zeta^i \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + R \left\{ \left(\sum_{i=1}^n d_i \zeta^i \right) \times \sum_{k=1}^n a_k \zeta^k + \sum_{k=1}^n c_k \zeta^k \right\} \right. \\ &\quad \left. + c_0 \right\} \end{aligned} \quad (5-10)$$

となる。



図—8 項数によるたわみの収束状況

図一8は、単純支持周辺、正方形板の等分布荷重 q_0 が
 載荷した場合の最大たわみの写像関数 (4-2) 式の項数
 による収束の状況を示したもので、横軸に項数、縦軸に、
 Timoshenko²⁾ による値 ($0.00406 q_0 a^4 / D$) を 100%と
 した時のパーセントをとってある。項数を増加させるこ
 とにより漸次収束していく様子がわかる。図9-aは線
 O-Aに沿うたわみ曲線、図9-bは線分O-Bに沿う

たわみ曲線を描いたものである。図一10は菱形板の写像
 関数で正方形板 ((4-7) 式で $k=0.5$ に相当する。) の
 たわみを解いた結果で項数は30項の場合である。図-3
 と同様にたわみ曲面と内部の写像を描いたものである。
 また、表-3は、単純支持周辺の菱形板の最大たわみ、
 最大モーメント、 M_x 、 M_y の値を各頂角 ($160^\circ \sim 90^\circ$)
 ごとに示したものである。

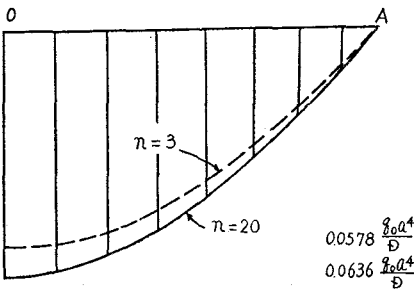


図-9 a

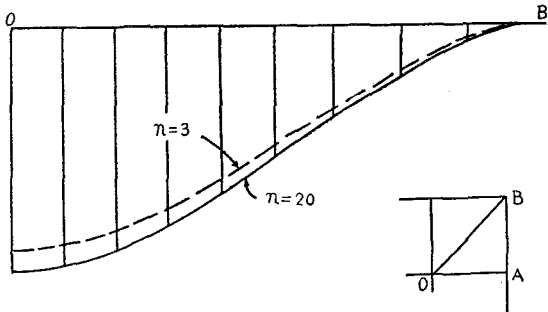
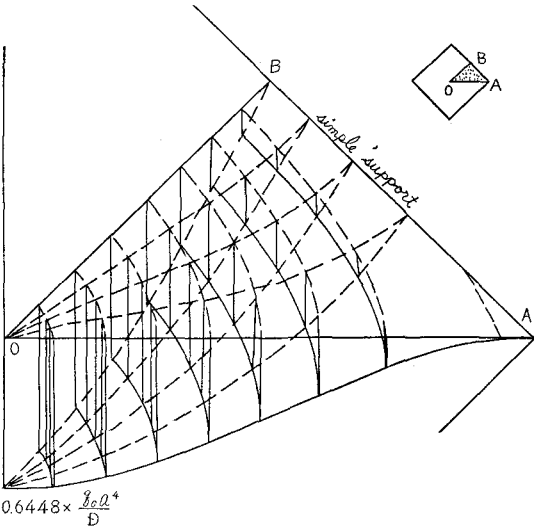


図-9 b



図一10 たわみ曲面と等角写像

表-3 単純支持菱形板の等分布荷重 q_0
 が載荷したときの数値計算結果

($\nu = 0.3$)

角 度	項 数	$w(0,0) = \frac{k_1 \times q_0 a^4 / D}{k_1 (\times 10^{-3})}$	$M_x(0,0) = \frac{k_2 \times q_0 a^2}{k_2 (\times 10^{-2})}$	$M_y(0,0) = \frac{k_3 \times q_0 a^2}{k_3 (\times 10^{-2})}$
60°	9	2.499	3.294	4.192
	25	2.543	3.320	4.236
70°	9	3.256	3.943	4.617
	25	3.312	3.975	4.661
80°	9	3.785	4.439	4.800
	25	3.850	4.477	4.843
90°	9	3.975	4.735	4.735
	25	4.043	4.777	4.777
	*	4.06	4.79	4.79

* TIMOSHENKO

9. 結 語
 複素関数理論による平板の曲げ問題を扱ったが、板の
 形状は写像関数さえみつければ任意の形のものを解くこ
 とができる。また、本文では等分布荷重のみを考えた
 が、多少複雑にはなるが、他の荷重条件にも拡張でき
 ることは当然である。

文 献

1) Z.I. Halivov : "Solution of the general problem

of the deflection of a simply supported elastic
 plate", Prikladnaya Matematika i Mehanika
 14, 405-414 (1950)
 2) Timoshenko and Woinowsky-Krieger :
 "Theory of Plates and Shells", McGraw-Hill
 Book Co. 1959.
 3) N.I. Muskhelishvili : "Some Basic Problems of
 the Mathematical Theory of Elasticity",
 (translated from fourth edition by J.R.M. Rad-
 ok,), P.Noordhoff Ltd., Gronigen, Holland, 1963

- 4) B.D. Aggarwala : "Singularly Loaded Rectilinear plates", Z. angew. Math. Mech. Bd. 34, Nr. 6, Juni, 1954
- 5) B.D. Aggarwala : "Bending of Rhombic Plates", Quart. Jour. Mech. Appl. Math., vol. 19, 1966
- 5) L.I. Deverall : "Solution of Some Problems in Bending of Thin Clamped Plates by Means of Muskhelishvili", Jour. Appl. Mech., June, 1957. pp. 295-298
- 7) C.A.M. Gray : "Polynomial Approximations in Plane Elastic Problems", Quart. Jour. Mech. Appl. Math., vol 4, part 4, 1951, pp. 444-448
- 8) C.E. Van Orstrand : "Reversion of Power Series", Philosophical Mag., vol. 19, 1910, pp. 355-375,
- 9) 犬井鉄郎, 柳原次郎 : "一般関数論", 朝倉書店, 1959, その他, 関数論関係の参考書.
- 10) L.S.D. Morley : "Bending of Clamped Rectilinear Plates", Quart. Jour. Mech. Appl. Math., vol 17, 1954. pp. 293-317
- 11) I.S. Sokolnikoff : "Mathematical Theory of Elasticity", Mc Graw-Hill Book Co., Inc., 1955
- 12) 岡本哲史 : "複素関数", ダイアモンド社, 1958