

伊 納 旬 流 量 の 時 系 列 解 析

学生員 ○長 谷 部 正 彦*

正会員 平 山 健 一**

正会員 岸 力***

記 号 表

- A_k : Fourier 解析の k 番目の高調波の係数
 a : 回帰線の定数項
 b : 回帰線の傾き
 a_i : Markov 過程の係数
 α : 信頼水準
 B_k : Fourier 解析の k 番目の高調波の係数
 ξ_t : 不規則変動成分
 K^2 : X_t の分散と $\eta(t)$ の分散の比
 $1-K^2$: 解析効果
 N, n : 資料の個数
 n_α : 信頼水準 α に定まる係数
 P_t : 周期成分
 Q_t : 任意時刻 t における河川流量
 $R(k)$: 自己相関関数
 r_R : k 次の系列相関係数
 $\bar{r}_k$: k 次の相関係数の信頼限界
 S_t : 標準偏差の周期成分
 S_t : 系列分散
 T_t : 傾向成分
 T : Z_t の周期成分
 X_t : Trend 成分を除いた系列
 $X(t)$: 定常な確率過程
 X' : $X_t - P_t$ の成分
 Y_t : $X_t - P_t / S_t$ によって得られる系列
 Y'_t : 規準化された確率過程
 Z_t : 規準化された確率過程
 Z'_t : $Z_t - T$ の系列
 $\eta(t)$: 純偶発成分

1. ま え が き

河川流量の予測も目的によって性質が異なっている。洪水防止のための出水予測であれば比較的短期の予測である

が、このように短期の予測ばかりでなく、月あるいは旬を単位とするような中期予測も重要である。

そこで河川流量を流量時系列と考へて、その変動の平均の様相あるいは、平均値からのちらばりを知れば、年間を通しての平均流量の把握、及び変動の周期的要因の有無などについての手がかりが得られる。さらに各地点の結果を総合すれば地域的な変動様相があきらかにされ解析の糸口を与えるものである。

本解析では石狩川中流部の伊納地点(流域面積 $A=3378.6 \text{ km}^2$)の旬流量系列の時系列解析の結果をのべてある。

2. 伊納流量の統計的特徴

2-1 長期傾向

時系列理論によれば、流量時系列は一般に傾向成分、周期成分、不規則変動成分に分解され (2-1) で表わされる。

$$Q_t = T_t + P_t + \xi_t \quad (2-1)$$

ここに

Q_t : 任意の時刻 t における河川流量

T_t : Trend 成分

P_t : 周期成分

ξ_t : 不規則変動成分

伊納旬流量について 1, 2 月に欠測のある昭和 36 年を除いた 13 年間の年総日流量を図-1 に示す。各年によって年総日流量に明らかな傾向が存在すれば、その傾向成分だけ

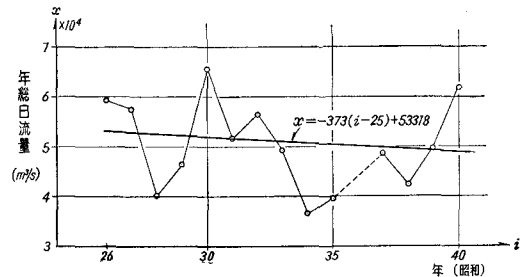


図-1

* 北海道大学大学院 修士課程 2 年 土木工学科河川
 ** 北海道大学工学部 助教授 土木工学科河川
 *** 北海道大学工学部 教授 土木工学科河川

とり出すのに加重移動平均が用いられる。伊納の年総日流量について図-1の如くやや右下りの長期傾向がみうけられるが、年数と総日流量の間の回帰直線は、年総日流量を x_t 、年数を i と、とると

$$x_t = b(i-i) + a$$

ただし

$$a = \bar{x} - b\bar{i}$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^N (i-i)(x_t - \bar{x})}{\sum_{i=1}^N (i-i)^2}$$

で与えられ、回帰係数 b について

$$t = (b - \beta) / S_b$$

ただし

$$S_b^2 = \frac{\sum_{i=1}^N \left\{ (x_t - \bar{x}) - b(i-i) \right\}^2}{(N-2) \sum_{i=1}^N (i-i)^2}$$

は自由度 $N-2$ の t -分布をすることから b の有意性を検定することが出来る。本例では、 $b = -373.7$ 自由度 $N-2=11$ 、 t -分布表より $t=2.18$ を得ると

$$-1573 < \beta < 825$$

となり $b=0$ という仮設は棄却できない。即ち統計的には長期傾向が認められないことになる。

2-2 周期変動

傾向成分を除いた旬流量の系列を X_t とかくと

$$X_t = Q_t - T_t = P_t + \xi_t$$

本例では2-1に示したように $T_t=0$ である。 X_t の系列より周期成分を抽出するためにコログラムを用いた。自己相関々数は(2-2)で計算された。

$$R(k) = \frac{\sum_{i=1}^{N-k} (x_t - \bar{x}_1)(x_{t+k} - \bar{x}_2) / (N-k)}{S_1 S_2} \quad (2-2)$$

ここに

$$\bar{x}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{N-k} x_t / (N-k)}{\sum_{i=k+1}^{N-k} x_t / (N-k)}$$

$$S_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N-k} (x_t - \bar{x}_1)^2 / (N-k)}{\sum_{i=k+1}^{N-k} (x_t - \bar{x}_2)^2 / (N-k)}$$

X_t のコログラムは図-2に示した。図によれば明瞭にみ

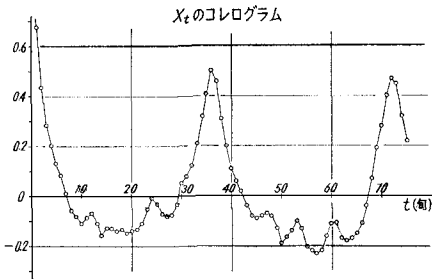


図-2

られる 36 旬 (1 年) 周期の他に谷が割合い扁平であるから高調波である 18 旬, 12 旬周期成分等が存在することが推察される。そこで周期成分 P_t を 36 旬を基本周期とする Fourier 級数であらわし (2-3) のようにおく。

$$P_t = \bar{x} + \sum_{k=1}^{36} A_k \cos \frac{2\pi k}{36} t + \sum_{k=1}^{36} B_k \sin \frac{2\pi k}{36} t \quad (2-3)$$

最小 2 乗法によれば係数 A_k, B_k は (2-4) によって計算される。 $\bar{x}$ は平均値である。

$$A_k = \frac{2}{n} \sum_{t=1}^n x_t \cos \frac{2\pi k}{36} t \quad B_k = \frac{2}{n} \sum_{t=1}^n x_t \sin \frac{2\pi k}{36} t \quad (2-4)$$

x_t の系列から 36 旬周期成分, 18 旬周期成分および 12 旬周期成分を順次分離した場合の, それぞれのコログラムを図 3-a, b, c に示した。図 3-c に (2-5) で与えられる 95% 信頼限界線が記入してあるが 12 旬周期成分の除去によって, 明らかな周期変動は存在しなくなったことがわかる。

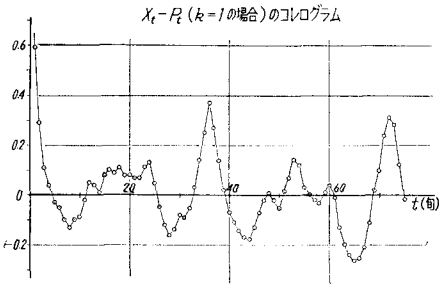


図 3-a

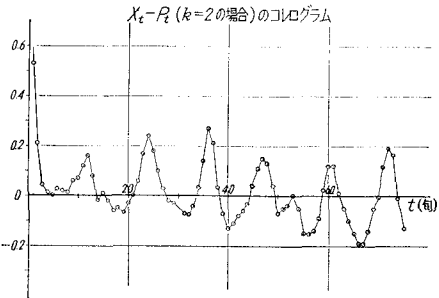


図 3-b

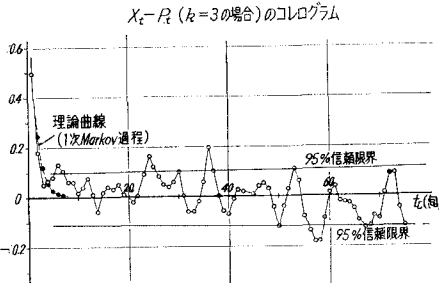


図 3-c

$$\bar{r}_k = \frac{-1 \pm n_\alpha \sqrt{N-K-2}}{N-K-1} \quad (2-5)$$

ここで n_α は信頼水準によって決まり

$$\alpha = 90\% \quad n_\alpha = 1.645 \quad \alpha = 95\% \quad n_\alpha = 1.960$$

この時の P_t は (2-6) で与えられた。

$$\begin{aligned} P_t = & 137.7 - 64.132 \cos \frac{2\pi t}{36} + 27.372 \sin \frac{2\pi t}{36} t \\ & + 21.714 \cos \frac{2\pi}{18} t - 43.264 \sin \frac{2\pi}{18} t \\ & + 33.573 \cos \frac{2\pi}{12} t + 10.991 \sin \frac{2\pi}{12} t \quad (2-6) \end{aligned}$$

実測の各旬の平均値と P_t を比較して図-4に示した。次に各旬の平均値のまわりのちらばりについて定常化を進めるために実測の平均値 m_t と標準偏差 S_t より変動係数を求め図-5に示した。図-5に示した変動係数は広い範囲に分布しており、平均流量との相関はそれほど明らかではない。

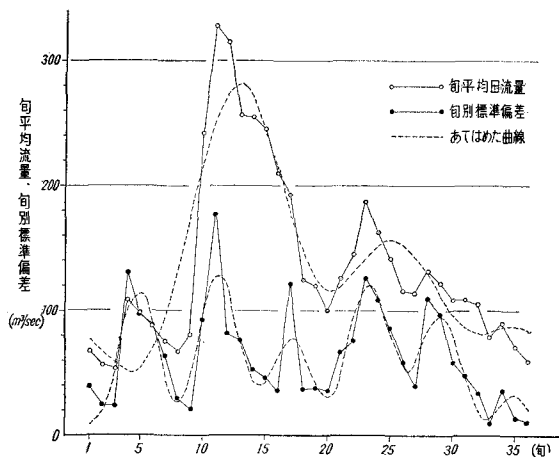


図-4

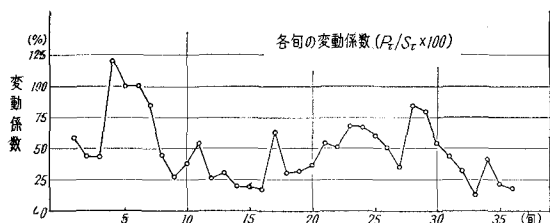


図-5

2-3 旬流量の分散の周期変動

次に X_t から各旬の平均 P_t をひけば、 $X'_t = X_t - P_t$ は平均値0の系列になり、さらにこれを $(X_t - P_t)/S_t$ のまわりの標準偏差 S_t でわれば、 $Y_t = (X_t - P_t)/S_t$ は、平均値0、分散1の系列になる。分散の実測値 S_t についても図-4に示されるように明らかに、周期変動がみられるのでフーリエ級数にあてはめ (2-7) を得た。

$$\begin{aligned} S_t = & 63.79 - 15.387 \cos \frac{2\pi t}{36} + 2.572 \sin \frac{2\pi t}{36} \\ & - 22.984 \cos \frac{2\pi t}{18} + 8.334 \sin \frac{2\pi t}{18} \\ & + 12.455 \cos \frac{2\pi t}{12} + 7.070 \sin \frac{2\pi t}{12} \\ & - 13.764 \cos \frac{2\pi t}{9} + 7.494 \sin \frac{2\pi t}{9} \\ & - 9.291 \cos \frac{10\pi t}{36} - 1.001 \sin \frac{10\pi t}{36} \\ & + 16.185 \cos \frac{2\pi t}{6} - 25.823 \sin \frac{2\pi t}{6} \quad (2-7) \end{aligned}$$

2-4 旬流量時系列の基準化

(2-6), (2-7) を用いて Y_t の系列を求めたところ、

$$\bar{Y} = -0.1810 \quad S_Y = 1.4013$$

となったが、これは実測値を Fourier 級数で近似したための誤差である。 Y_t の系列のコレログラムは図-6に示されるが、新たな周期変動が生じており、分散をも考えて周期変動を除去しなければ、完全に定常化が行なわれていないことを示している。

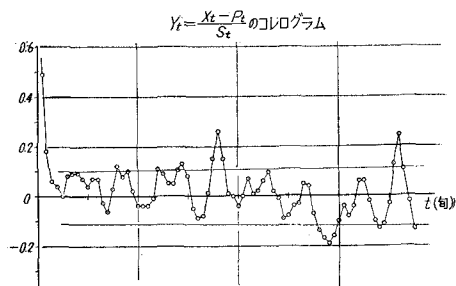


図-6

Y_t の系列を平均値0、分散1の系列におきかえて

$$Z_t = (Y_t - \bar{Y}) / S_Y$$

とおき Z_t より有意な周期成分を除去する。

図-6によれば、6旬程度の周期性がみられるが基本周期を36旬にして順次高調波を除去していった。Fourier 級数で示した周期変動 T の係数及び名高調波による分散の減少を表-1に示す。

$k=6$ で $Z-T$ の分散は急に小さくなっており、 T とし

表 3-1

k	A_k	B_k	$\frac{Z-T \text{ の分散}}{Z \text{ の分散}}$
1	-0.070	-0.138	0.9876
2	0.000	-0.087	0.9837
3	-0.088	0.029	0.9795
4	-0.384	0.084	0.9023
5	-0.229	-0.074	0.8744
6	0.092	-0.266	0.8332

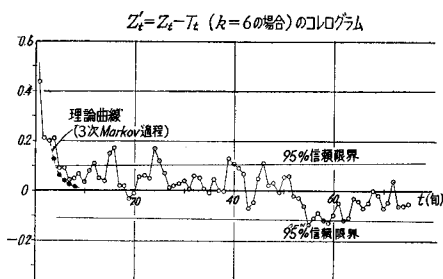


図-7

てこの頃まで含めることの妥当性を示している。

$Z-T$ のコログラムは 図-7 に示したが一部データの偏りによると思われる山を除いて有意な周期変動は完全に除去されている。

3. 時系列理論による解析

時系列理論を用いて前章により伊納川流量の系列は旬流量の平均値の大きさとそのまわりの分散の大きさが必ずしも比例しないことが示された。本章では $X'=X-P$ の分散が独立に分布していると考えた場合 (1) と、 Z_t-T_t の系列 (2) について時系列解析を試みた。

3-1 X'_t の時系列解析

$X'=X-P$ は平均値 0、分散 81.06 であるが、図 3-c にそのコログラムを示されている。時系列理論によればコログラムが、減衰振動の型又は減衰曲線の型をとる場合には時系列は (3-1) の定差方程式を満たすことが知られている。

$$X(t) + a_1 X(t-1) + \dots + a_h X(t-h) = \eta(t) \quad (3-1)$$

係数 $a_1, a_2, \dots, a_h$ は自己相関関数によって決定される。(3-1) を自己回帰型、又は h 次の Markov 過程という。 $\eta(t)$ は純偶発成分である。一次の Markov 過程の場合係数 a_1 は、 $r_1 = -a_1$ となり、 r_k は (3-2) で計算される。

$$r_k = (r_1)^k \quad (3-2)$$

実測のコログラムでは、 $r_1 = 0.497$ であるから、これによる r_k の計算値は 図 3-c の点線のようになる。1 次の Markov 過程を適用した事による原変動 X' の分散と $\eta(t)$ の分散の比を、 $K^2 = S^2(\eta(t))/S^2(X')$ とすると解析効果は (3-3) で示される。

$$1 - K^2 = r_1^2 \div 0.25$$

Y'_t に含まれる規則成分の分散は全分散の 25% で、純偶発成分の分散が 75% であることがわかる。更に 2 次の Markov 過程の適用により、予測精度を向上できるかを次に検討してみた。2 次の Markov 過程として $X(t) = a_1 X(t-1) + a_2 X(t-2) + \eta(t)$ をあてはめると係数は (3-3) で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= r_1(r_1 - 1)/(1 - r_1^2) \\ a_2 &= r_1^2 - r_2/1 - r_1^2 \end{aligned} \right\} \quad (3-3)$$

本文では $r_1 = 0.497$, $r_2 = 0.183$ として (3-3) より $a_1 = -0.5392$, $a_2 = 0.0850$ となる。この場合、 K^2 は (3-4) で与えられる。

$$K^2 = \frac{1 - a_2}{1 + a_2} \left\{ (1 + a_2)^2 - a_1^2 \right\}$$

(3-4) 式より、 $K^2 = 0.748$ になり、解析効果は、

$$1 - K^2 \div 0.252$$

となり、ほとんど一次の Markov 過程に比べてわずかながら解析効果が向上したが、これ以上次数をふやしても解析効果に急激な上昇はないことがあきらかになった。

3-2 Z_t の時系列解析

$Z'=Z-T$ のコログラムを 図-7 に示す。又このコログラムの型から 3 次の Markov 過程 (3-5) があてはめられた。

$$Z'(t) = a_1 Z'(t-1) + a_2 Z'(t-2) + a_3 Z'(t-3) + \eta(t) \quad (3-5)$$

この時の係数は

$$\begin{aligned} D &= (1 - r_2)(1 + r_2 - 2r_1^2) \\ a_1 &= r_1^2(r_1 - r_3) - r_1(r_2^2 - r_2 + 1) + r_2 r_3 / D \\ a_2 &= r_2^2 - r_2(r_1^2 + r_1 r_3 + 1) + r_1(r_1 + r_3) / D \\ a_3 &= r_3(r_1^2 - 1) + r_1(2r_2 - r_2^2 - r_1^2) / D \end{aligned}$$

であらわされる。

ここで $r_1 = 0.438$, $r_2 = 0.214$, $r_3 = 0.207$ を入れて a_1, a_2, a_3 を計算すると $a_1 = -0.4225$, $a_2 = 0.0824$, $a_3 = -0.1286$ となる。

次に (3-6) を用いて $r_4, r_5, r_6, \dots$ を順次計算する。

$$r_k + a_1 r_{k-1} + \dots + a_h r_{k-h} = 0 \quad (3-6)$$

$r_4 = -a_1 r_3 - a_2 r_2 - a_3 r_1 = -0.1262$, $r_5 = 0.0637$, $r_6 = 0.0431$, $r_7 = 0.0292$ となり、この計算値 図-7 に示してある。次に K^2 は (3-7) で与えられ

$$K^2 = 1 + a_1 r_1 + a_2 r_2 + a_3 r_3 = 0.806 \quad (3-7)$$

となる。同時に参考に 1 次、2 次 Markov 過程の時の係数と解析効果を表-2 に示す。

図-8 は 3 次の Markov 過程にあてはめた $\eta(t)$ のヒストグラムを示している。 $\eta(t)$ の分布は対数正規分布によくあてはまる。

表 3-2

h	a_1	a_2	a_3	$1 - K^2$
1	-0.438	—	—	0.808
2	-0.4260	-0.0275	—	0.807
3	-0.4225	0.0824	-0.1286	0.806

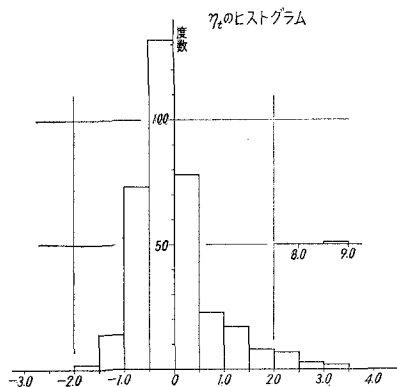


図-8

3-3 X'_t , Z' の解析効果の比較

X'_t の解析効果と $Z' = Z - T$ の解析効果を比較する場合に、各々の系列を原変動の系列に戻して比較しなければならない。そこで各々の系列を原変動に戻した式を (3-8), (3-9) に示した。

(1) X'_t の場合

$$X_t = r_1 X'_{t-1} + \eta_{X'} + P_t \quad (3-8)$$

(2) Z' の場合

$$X_t = S_t S_Y r_1 Z'_{t-1} + S_t S_Y \eta_{Z'} + S_t T S_Y + S_t \bar{Y} + P_t \quad (3-9)$$

(3-8), (3-9) のうち $\eta_{X'}$, $S_t S_Y \eta_{Z'}$ は、各々の不規則成分をあらわし、その分散を求めるとそれぞれ

$$S^2(\eta_{X'}) = 4940.33$$

$$S^2(\eta_{Z'}) = 4542.51$$

但し $\eta_{Z'} = S_t S_Y \eta_{Z'}$ である。

又 $S^2(X) = 103.87^2$ であるから

$$K_{X'}^2 = S^2(\eta_{X'}) / S^2(X) = 0.457$$

$$K_{Z'}^2 = S^2(\eta_{Z'}) / S^2(X) = 0.421$$

となり解析効果 $1 - K^2$ は 0.54, 0.58 となり Z' の系列まで解析をすすめれば 4% 解析効果がますことが結論された。

4. あとがき

本解析では、統計的な河川流量系列の解析理論についてのベ伊納地点における中期予測の可能性を考察してみた。本例では、資料が欠測などのため不足であったが、資料数の多い地点では精度の向上が期待できるであろう。

この方法が河川の諸性質を決定する問題に対して現在用いられている諸方法に比して連続的に流量を考察でき、平均的にも正しい答えを与えるものであることは、明らかであり、実際の応用列については、講演時にのべることにする。

参考文献

- 1) 岸・平山・張：台湾省蘭陽溪における月流量時系列の解析，工学部研究報告。
- 2) 岸・平山・森：金山ダムの流入量に関する統計的研究，工学部研究報告。
- 3) 岸 力：水文量の時系列としての特性とその解析法 土木学会北海道支部講習会テキスト。
- 4) 小河原正己：時系列論とその応用，日本応用力学会編「応用統計学」第7章，金原出版，1966。
- 5) 堀川 明：ランダム変動の解析，共立出版，1964。
- 6) Quimpo, R. G.: Stochastic Model of Daily River Flow Sequences, Hydrology Papers, Colorado State Univ. Feb. 1967.
- 7) Roesner, L. A. and Yevdjovich, V. M.: Mathematical Models for time series of Monthly Precipitation and Monthly Run off. Hydrology Papers, Colorado State Univ. 15, Oct. 1966.