

波動理論とせん断バネ変形理論とによる 水平地盤層の地震応答解析法の研究

正 員 金 子 孝 吉*

I. ま え が き

地盤の地震応答解析法としては

- (i) 地盤を弾性体として扱い、波動理論を用いる方法
- (ii) 質点系或いは連続体として等価質量—バネ系に置換して考慮する方法
- (iii) 有限要素法を適用する方法
- (iv) 多数の地震および常時微動の観測とその統計的研究を主とする方法

など各種の方法が研究されている。本論文は全く別の発想で始まる (i) と (ii) の方法を検討し、理論的に両方の関連性を考察したものである。そして特に青森県長泥橋架設地点のような軟弱地盤層を例にとった地震応答解析を加えておく。

II. 波動理論を用いた成層地盤の地震応答解析

1) 基礎方程式

弾性波動を扱う際に必要な基礎の運動方程式をたてるとき、厳密に言えば有限歪や異方性を考慮しなければならない。しかし普通は歪が非常に小さく、応力・歪が一次結合である線型の問題として扱っている。始めに弾性理論上の基礎関係式と記号の説明をしておく。

応力・歪関係

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \lambda \Delta + 2\mu \varepsilon_{xx}, & \sigma_{yz} &= \mu \varepsilon_{yz} \\ \sigma_{yy} &= \lambda \Delta + 2\mu \varepsilon_{yy}, & \sigma_{xz} &= \mu \varepsilon_{xz} \\ \sigma_{zz} &= \lambda \Delta + 2\mu \varepsilon_{zz}, & \sigma_{xy} &= \mu \varepsilon_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

変位・応力関係

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \varepsilon_{yx} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \varepsilon_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \theta_x &= \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, & \theta_y &= \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \\ \theta_z &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

等方性弾性体では σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} は独立で $\sigma_{yz} = \sigma_{xz}$,

$\sigma_{zx} = \sigma_{xx}$, $\sigma_{xy} = \sigma_{yz}$ である。

運動方程式

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + \rho F_x, & (i) \\ \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial y} + \mu \nabla^2 v + \rho F_y, & (ii) \\ \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial z} + \mu \nabla^2 w + \rho F_z, & (iii) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ここに u, v, w は x, y, z 方向の変位, ε, σ は歪, 応力, θ_x は x 軸のまわりの回転, λ, μ は Lamé の定数で, ρ は密度, F は強制外力である。また Δ, ∇^2 は

$$\begin{aligned} \Delta &= \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} && \text{Divergence} \\ \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} && \text{Laplacian} \end{aligned}$$

である。

2) 波動方程式とその一般解

運動方程式 (4) より強制力が 0 のとき

$\frac{\partial}{\partial x} (i) + \frac{\partial}{\partial y} (ii) + \frac{\partial}{\partial z} (iii), \frac{\partial}{\partial y} (iii) - \frac{\partial}{\partial z} (ii)$ をほどこすと,

$$\rho \frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \Delta, \quad (5)$$

$$\rho \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} = \mu \nabla^2 \theta_x, \quad \rho \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2} = \mu \nabla^2 \theta_y,$$

$$\rho \frac{\partial^2 \theta_z}{\partial t^2} = \mu \nabla^2 \theta_z \quad (6)$$

を得るが, 回転がなければ ($\theta_x = \theta_y = \theta_z = 0$), u, v, w はある速度ポテンシャル函数 φ によって

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

と表わすことによって $\Delta = \nabla^2 \varphi$,

$$\frac{\partial \Delta}{\partial x} = \nabla^2 u, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial y} = \nabla^2 v, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial z} = \nabla^2 w$$

となるがこのような関係を

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \Delta = \nabla^2 (u, v, w)$$

と表わすことにすれば, この場合運動方程式 (4) は

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (u, v, w) = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \nabla^2 (u, v, w) \quad (7)$$

* 北海道大学工学部土木工学科助手

で、また $\Delta=0$ であれば式 (4) は次式で表わせる。

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (u, v, w) = \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 (u, v, w) \quad (8)$$

これをベクトルで表示すると変位ベクトル $\mathbf{r} (u, v, w)$ を用いて式 (4) は

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \text{grad div } \mathbf{r} + \mu \text{div grad } \mathbf{r} \quad (9)$$

で表わせる。弾性体内の変位に関しては次のスカラーポテンシャル φ とベクトルポテンシャル $\Psi (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3)$ を用いて、

$$\mathbf{r} = \text{grad } \varphi + \text{rot } \Psi \left(u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_3}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_2}{\partial z}, v, w \right) \quad (10)$$

とおくと $\text{div } \mathbf{r} = \Delta$, $\text{div rot } \Psi = 0$, $\text{rot grad } \varphi = 0$ であるから式 (10) の右辺の第一項は回転を伴わない容積変化に関するもので、第二項は等容積で回転に関するものである。 φ, Ψ が

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = v_p^2 \nabla^2 \varphi, \left(v_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \right) \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = v_s^2 \nabla^2 \Psi, \left(v_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \right) \quad (12)$$

を満たすとき、式 (10) の $\mathbf{r}$ は式 (9) を満足する。(5), (6), (7), (8), (11), (12) は何れも

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \Psi \quad (13)$$

なる形の波動方程式である。速度ポテンシャル φ, Ψ_i を導入することによって P 波、S 波に関する 2 種類の波動方程式を得たわけである。 v_p, v_s はそれぞれ P 波、S 波の速度である。

今 xz 面 2 次元で考える波動方程式 (11), (12) の一般解は既に求まっている。水平方向を x 軸にとれば、

$$\varphi = A_1 \exp \left[ik \left(ct + \sqrt{\frac{c^2}{v_p^2} - 1} z - x \right) \right] + A_2 \exp \left[ik \left(ct - \sqrt{\frac{c^2}{v_p^2} - 1} z - x \right) \right] \quad (14)$$

$$\Psi = B_1 \exp \left[ik \left(ct + \sqrt{\frac{c^2}{v_s^2} - 1} z - x \right) \right] + B_2 \exp \left[ik \left(ct - \sqrt{\frac{c^2}{v_s^2} - 1} z - x \right) \right] \quad (15)$$

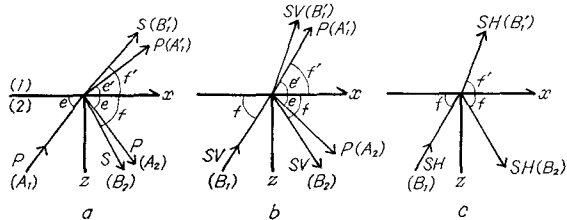
なる形で示される。

ここで、式 (14), (15) の右辺第一項は z の負方向に進む進行波で第二項は正方向に進む逆行波と見做せる。

3) 境界面における弾性波の反射、屈折

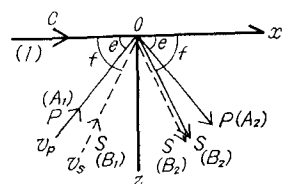
弾性的性質を異にする境界面では波動の透過と反射が起る。境界面に入射した弾性波は反射・屈折によって次のような波を生ずる。左が入射波で右が境界によって生ずる波である。

入射 P 波 $\longrightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{反射 P 波, S 波} \\ \text{屈折 P 波, S 波} \end{array} \right.$
 入射 S 波—SV 波 $\longrightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{反射 P 波, S 波} \\ \text{屈折 P 波, S 波} \end{array} \right.$
 —SH 波 $\longrightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{反射 SH 波} \\ \text{屈折 SH 波} \end{array} \right.$



図—1

ここに、SV は波動が境界面に鉛直に振動し、SH は水平に振動しながら伝播する S 波 (せん断波) を表わす。図-1 で A, B はそれぞれ P 波、S 波の波動振幅で、 e, f, e', f' は波の進行方向と境界面とのなす角である。



図—2

次に反射、屈折に関する境界条件を示す。

(i) 自由表面——弾性体

応力の合成値が 0 になる。式 (1) より

$$\Sigma \sigma_{xy} = \Sigma \sigma_{xz} = \Sigma \sigma_{zz} = 0$$

ここで、図-2 における c および波動方程式の解 (14), (15) 中の k は次式で表わすことができ、 c は表面に沿うみかけの速度である。

$$\left. \begin{aligned} \tan e &= \sqrt{\frac{c^2}{v_p^2} - 1}, \\ \tan f &= \sqrt{\frac{c^2}{v_s^2} - 1}, \\ k &= \frac{2\pi \cos e}{L_p} = \frac{2\pi \cos f}{L_s} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

ただし、 L_p, L_s は P 波、S 波の波長である。

(ii) 弾性体 (1)——弾性体 (2)

(1) 側の変位の合成値および応力の合成値
 = (2) 側の変位の合成値および応力の合成値

$$\begin{aligned} \Sigma u_1 &= \Sigma u_2, \quad \Sigma v_1 = \Sigma v_2, \quad \Sigma w_1 = \Sigma w_2 \\ \Sigma \langle \sigma_{yz} \rangle_1 &= \Sigma \langle \sigma_{yz} \rangle_2, \quad \Sigma \langle \sigma_{zx} \rangle_1 \\ &= \Sigma \langle \sigma_{zx} \rangle_2, \quad \Sigma \langle \sigma_{zz} \rangle_1 = \Sigma \langle \sigma_{zz} \rangle_2 \end{aligned}$$

(iii) 弾性体——剛体

変位の合成値が 0 になる。

$$\Sigma u = \Sigma v = \Sigma w = 0$$

4) 多層地盤層の水平せん断振動

基盤から入射する地動が図-3 の多層地盤においてせん

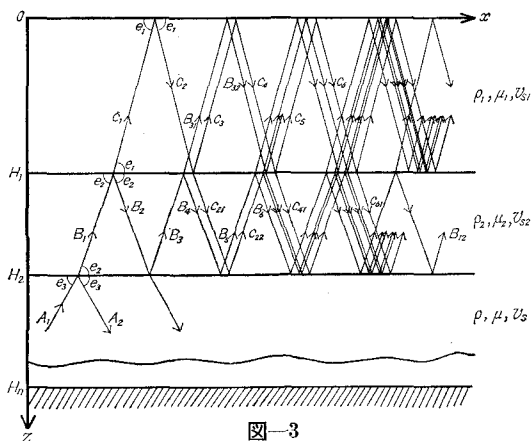


図-3

断変形のみによって伝播する場合、つまり境界面に垂直に S 波が入射する場合を考えることにする。図-3において A, B, C は波動振幅を表わす。

今 S 波が境界面に垂直に入射すれば、波動方程式の一般解 (14), (15) は $f_k \rightarrow 90^\circ$ により式 (16) を用いれば、 k 番目の層内を伝わる波動は

$$\Psi_k = B_{1k} e^{ip(t+q_k z)} + B_{2k} e^{ip(t-q_k z)} \quad (17)$$

で表わせる。ここに $q_k = \sqrt{\rho_k/\mu_k}$, $p = 2\pi/L_s$ である。

図-1 c における境界面での反射、屈折から、境界条件を用いることによって、透過係数 γ および反射係数 β が求まる。境界面で

$$\frac{\partial \Psi_k}{\partial z} = \frac{\partial \Psi_{k+1}}{\partial z}, \quad \mu_k \frac{\partial^2 \Psi_k}{\partial z^2} = \mu_{k+1} \frac{\partial^2 \Psi_{k+1}}{\partial z^2}$$

であるから次の関係式を得る。

$$\left. \begin{aligned} B_{1(k+1)} &= \gamma_k B_{1k} + \beta'_k B_{2(k+1)}, \\ B_{2k} &= \beta_k B_{1k} + \gamma'_k B_{2(k+1)}, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} \beta_k &= \frac{\alpha_k - 1}{\alpha_k + 1}, \quad \gamma_k = \frac{2}{\alpha_k + 1}, \\ \beta'_k &= \frac{1 - \alpha_k}{1 + \alpha_k}, \quad \gamma'_k = \frac{2\alpha_k}{(\alpha_k + 1)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

ここに、 $\alpha_k = \sqrt{\rho_k \mu_k / \rho_{k+1} \mu_{k+1}}$ で β_k, γ_k は $k+1$ 層と k 層との間の反射、透過係数を表わし、 β'_k, γ'_k は k 層から $k+1$ 層への反射、透過係数である。上層のない自由表面では全反射が起り $B_{11} = -B_{21}$ となる。

従って基盤入射時から各層の境界面に達する時間の遅れを考慮すれば式 (18), (19) を用いることによって式 (17) が計算でき、式 (10) により各層における変位を求めることが可能である。

III. 連続せん断梁としての等価質量-バネ系置換法による地震解答解析

1) せん断バネ変形理論

地震時において卓越した S 波 (せん断波) が基盤から入

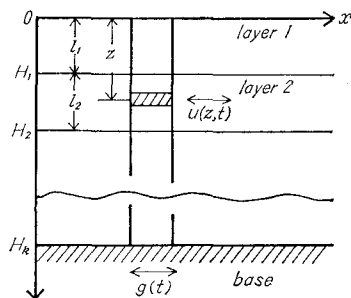


図-4

射する場合、つまり地盤を伝わる地動はせん断変形のみによって鉛直上方に伝播する場合を考える。地盤が小平で、しかも水平方向に等質であれば地盤の横方向への広がりには地震応答には影響を与えない。従って図-4のような単位柱状連続梁の振動をもって地盤全体の振動を論ずるものである。

このせん断梁の k 番目の層の振動方程式は梁の微小部分の動的なつり合いから

$$\rho_k \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} + c_k \frac{\partial u_k}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ G \frac{\partial u_k}{\partial z} \right\} \quad (20)$$

で表わせる。ここに、 ρ_k, c_k および G は密度、粘性減衰係数およびせん断弾性係数で、 u は深さ z における時刻 t での x 方向変位である。式 (20) は 2 階偏微分方程式であるが、変数分離法によりモード型と固有振動数を導くことから解くことが出来る。変数分離した z のみ t のみの関数は、

$$u_k(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_{kn}(z) T_{kn}(t) \quad (21)$$

を適当に式 (20) に代入して、

$$\frac{d^2 Z_{kn}}{dz^2} + a_k^2 p_n^2 Z_{kn} = 0, \quad (22)$$

$$\frac{d^2 T_{kn}}{dt^2} + 2h_n p_n \frac{dT_{kn}}{dt} + p_n^2 T_{kn} = 0 \quad (23)$$

を得る。ここに、 $a_k = \sqrt{\rho_k/G_k}$, $h_n = c_k/2\rho_k p_n$ で、 $c_k/\rho_k = c_{k+1}/\rho_{k+1}$ を用いた。固有モード型 $Z_{kn}(z)$ および式 (23) の右辺に時間のみの関数である強制力

$$\{-\rho_k d^2 g(t)/dt^2\}$$

を加えた場合の T_{kn} は

$$Z_{kn} = A_k \cos a_k p_n z + B_k \sin a_k p_n z, \quad (24)$$

$$T_{kn} = -R_{kn} \int_0^t \dot{g}(\tau) e^{-h_n p_n (t-\tau)} \times \sin p_n \sqrt{1-h_n^2} (t-\tau) d\tau \quad (25)$$

になる。ここに、 n 次モード展開係数 R_{kn} はモード型 Z_{kn} を用いて次式から求まる。

$$R_{kn} = \frac{1}{M_n} \int_0^{H_k} F(\xi) Z_{kn}(\xi) d\xi \quad \left(0 \leq \xi = \frac{H_k - z}{l_k} \leq 1 \right) \quad (26)$$

ただし、 M_n は直交条件を満たす n 次モード一般質量で $M_n = \int_0^l Z_k(\xi) d\xi$ で表わされる。なお式 (24) の係数 A, B および固有振動数方程式は境界条件から決まる。各層の境界で上層と下層の変位が等しく、せん断応力が相等しい。また自由表面では水平せん断応力が 0 で、基盤との境界では地盤に対し基盤を剛体とみた場合は相対変位を 0 とする。固有振動数方程式は単層、二層、三層そして四層地盤においてはそれぞれ、

$$\cos r_1 = 0, \tag{27}$$

$$\alpha_1 \tan r_1 \tan r_2 = 1, \tag{28}$$

$$(\alpha_1 \alpha_2 \tan r_1 + \alpha_1 \tan r_1 \tan r_2 + \alpha_2 \tan r_2) \tan r_3 = 1, \tag{29}$$

$$\begin{aligned} &\alpha_1 (\alpha_2 \alpha_3 \tan r_4 + \alpha_2 \tan r_3 + \alpha_1 \tan r_2) \tan r_1 \\ &+ \alpha_2 (\alpha_3 \tan r_4 + \tan r_3) \tan r_2 + \alpha_3 \tan r_3 \tan r_4 \\ &- \alpha_3 \alpha_1 \tan r_1 \tan r_2 \tan r_3 \tan r_4 = 1. \end{aligned} \tag{30}$$

ただし、 $\alpha_k = \sqrt{\rho_k G_k / \rho_{k+1} G_{k+1}}$, $r_k = \alpha_k l_k p_n$, と多層になるに従って複雑な超越方程式になる。そのため一般にはグラフを利用して数値解法により解く。

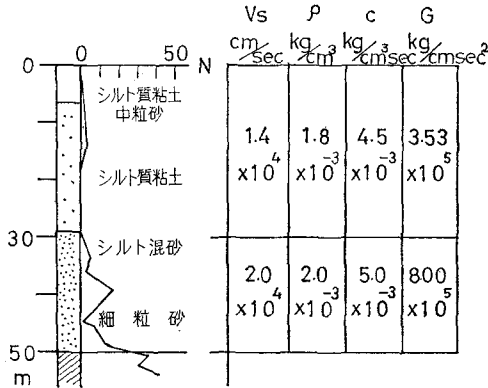


図-5 表-1

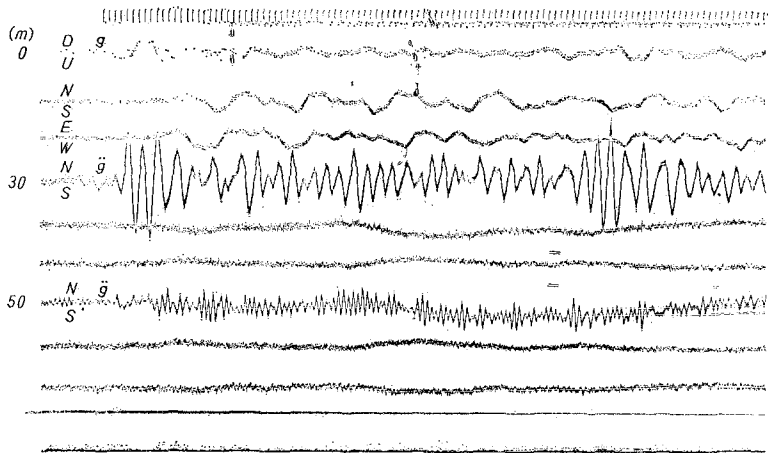


図-6

2) 二層地盤の地震応答解析例

青森県長泥橋架設地点での地盤の振動測定およびボーリングの結果、図-5 および 表-1 のような地盤特性を有することが判った。

振動数方程式 (28) の根、固有振動数 p_n を計算すると、 $p_1 = 5.58232$, $p_2 = 15.1063$, $p_3 = 24.3144$, $p_4 = 35.4402$, $p_5 = 45.3142$, $p_6 = 54.2629$, $p_7 = 65.2690$, $p_8 = 75.4600$, $p_9 = 84.2688$, $p_{10} = 95.1400$ になる。

外力としては、1968 年十勝沖地震の余震の一つで図-6 に示す記象から地中 50 m 基盤上における加速度記録 NS 成分 5 秒間を用いた。図-6 は地表、地中 30 m、地中 50 m において、それぞれ 3 成分 (上から水平 2, 鉛直 1) ずつ測定したものである。

なお地中における記象は東京振動研究所製作 TM-3 型地中地震計によるものである。地表における応答値を図-7

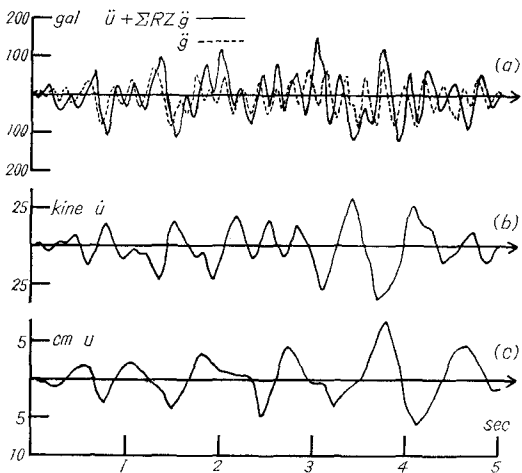


図-7

に示したが、(a), (b) および (c) は絶対加速度, 相対速度, 相対変位の地震応答波形である。(a) の点線は基盤入射力 (最大値 80 gal) である。

IV. 二層地盤にみる波動理論およびせん断バネ変形理論による地震応答解析法の比較

今図-3 の上部における二層地盤について多重反射, 屈折の関係から,

$$\left. \begin{aligned} \Psi_1 &= C_1 e^{ip(t+q_1z)} + C_2 e^{ip(t-q_1z)} \\ \Psi_2 &= B_1 e^{ip(t+q_2z)} + B_2 e^{ip(t-q_2z)} \\ \Psi_0 &= A_1 e^{ip(t+q_0z)} + A_2 e^{ip(t-q_0z)} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

のように各層の速度ポテンシャル量を表わせるが, 青森県長泥橋架設地点のような軟弱地盤層の場合, 基盤は地盤に比べてきわめて剛なものと考えることができるため境界条件 (iii) を適用できる。

$$\begin{aligned} z=0 \quad & \mu_1 \partial^2 \Psi_1 / \partial z^2 = 0 \\ z=H_1 \quad & \partial \Psi_1 / \partial z = \partial \Psi_2 / \partial z \quad \mu_1 \partial^2 \Psi_1 / \partial z^2 = \mu_2 \partial^2 \Psi_2 / \partial z^2 \\ z=H_2 \quad & \partial \Psi_2 / \partial z = \partial \Psi_0 / \partial z = 0 \end{aligned}$$

なる境界条件から

$$\begin{aligned} C_1 &= -C_2, \quad A_1 = A_2 = 0 \\ q_1 C_1 (e^{ipq_1 H_1} + e^{-ipq_1 H_1}) &= q_2 (B_1 e^{ipq_2 H_1} - B_2 e^{-ipq_2 H_1}) \\ \rho_1 C_1 (e^{ipq_1 H_1} - e^{-ipq_1 H_1}) &= \rho_2 (B_1 e^{ipq_2 H_1} + B_2 e^{-ipq_2 H_1}) \\ B_1 e^{ipq_2 H_2} - B_2 e^{-ipq_2 H_2} &= 0 \end{aligned}$$

よって

$$\alpha_1 \tan q_1 l_1 p \tan q_2 l_2 p = 1 \quad (32)$$

を得る。ここに $\alpha_1 = \sqrt{\rho_1 \mu_1 / \rho_2 \mu_2}$ である。

式 (32) は振動数方程式 (28) に他ならない。

II., III. において, 波動理論を用いた弾性地盤層のせん断振動および連続せん断梁としてバネ系に置換した地盤の

地震応答解析について述べたが, 前者は P 波, S 波を始めとする各種の波動に通用する一般弾性理論で, 境界面での多重の反射, 屈折の理論から反射係数および透過係数を決めることにより時々刻々の波動振幅を求めることが可能である。ここで地震時において一般には S 波が最も卓越することから, 後者のせん断バネ変形理論が考えられるが, これは地盤に対して基盤を完全な剛体として扱うもので, 地震動を一端固定せん断連続梁の強制振動と解することにある。多層構造の場合は各層の境界が連続なる連成振動として解いている。

なお弾性体の一方向のみのせん断振動としては, III. における運動方程式 (20) は波動型の微分方程式である。

V. あとがき

以上波動理論およびせん断バネ変形理論による多層構造を有する地盤の地震応答解析法について述べた。特に後者のせん断バネ系置換法は軟弱地盤における地震応答解析法として研究してきた。また, 地震動が基盤に鉛直に入射する場合についてのみ適用できるもので, ある角度をもって入射する場合および S 波のみでなく P 波や表面波を扱う場合は当然適用できない。

なお数値計算には HARP 103 および NEAC 2203 G を用いた。

終りに本論文作成にあたり北大工学部渡辺昇教授の種々の御助言に対し感謝致します。

参 考 文 献

- 1) Idriss and Seed: "SEISMIC RESPONSE OF HORIZONTAL SOIL LAYERS" proc of A.S.C.E 1968.
- 2) Ewing, Jardesky and Press: 「ELASTIC WAVES IN LAYERED MEDIA」 MCGRAW-HILL BOOK COMPANY inc.
- 3) 金子孝吉: "水平地震動による地盤のせん断振動応答解析" 第 24 回年次学術講演会講演集 1969.