

多径吊間橋の固有振動周期

正員 渡 辺 昇*

正員 佐 藤 浩 一**

学生員 ○坂 元 義 人***

1. ま え が き

近年、本州四国連絡橋架設計画に伴い、長大径間吊橋の地震応答解析が云々されている。

本報告では、多径間吊橋の上部構造を多自由度をもつ系として構造物を多質点に分け、特に周期、及びモードに着目して解析した。

ここでは、主に次の3点について比較検討した。

(i) 静的な解析（影響係数を求める段階）を弾性理論と撓度理論で行なった場合、周期、及びモードにどれくらいの相違があるか。

(ii) 単純補剛桁を有する吊橋と連続補剛桁を有する吊橋の振動モード、周期の比較。

(iii) タワーがケーブルを支えている状態、即ちローラー支承とヒンジ支承によって、周期、及びモードにどれくらいの相違があるか。

以上の各項につき、3径間吊橋、及び径間吊橋を例にとり、電子計算機によって数値計算を行なった。

2. 理論の概要

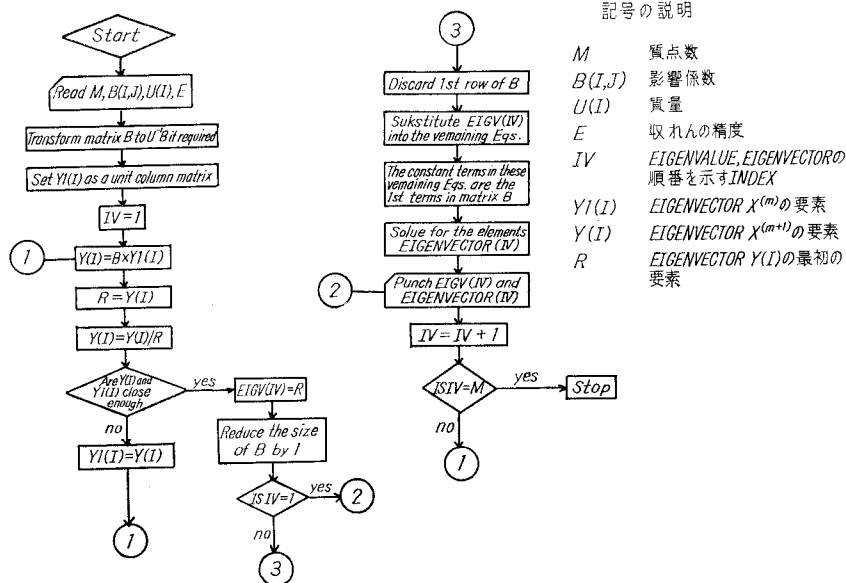
2-1 固有値及び固有ベクトル

一般に固有値、及び固有ベクトルを求める式は、次式で与えられる。

$$[\lambda] \{X\} = [\alpha] [m] \{X\} \quad (1)$$

ここで、

Flow chart



図—1

* 北海道大学教授 工博

** 北海道大学大学院 工修

*** 北海道大学大学院

$$\{X\} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}, \quad [m] = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & m_n \end{pmatrix},$$

$$[\lambda] = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad [\alpha] = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

ここで、 X_r は r の基準点に対する相対振幅、 m_r は r 点の質量、また α_{ij} は j 点のみに単位の力を与えるとき、 i 点に生ずる変位である。

$[m]$ 、 $[\alpha]$ が求まれば、(1) 式から固有値 λ_i 、及び固有ベクトル $\{X_{ij}\}$ を求めることができる。

また $\{X_{ij}\}$ については、

$$\sum_{j=1}^n m_i \{X_{ij}\}^2 = 1 \quad (2)$$

として、正規化したモード $\{\bar{X}_{ij}\}$ になおす。

固有値 λ_i が求まれば、固有円振動数 ω_i は、次式で求まる。

$$\omega_i = \sqrt{\lambda_i} \quad (3)$$

また、固有ベクトル $\{X_{ij}\}$ より、刺激係数が次式により求めることができる。

$$\beta_i = \frac{\sum_{j=1}^n m_i X_{ij}}{\sum_{j=1}^n m_j X_{ij}^2} \quad (4)$$

以上の固有値、固有ベクトルの計算には、繰り返し計算法 (Power method) を用いた。電算のフローチャートは、図-1 に示す。

2-2 影響係数の計算

2-2-1 弾性理論による塔頂ローラーの場合の影響係数

(1) 連続補剛桁を有する吊橋

影響係数を求める基本式は、次の様になる。

$$EIv^{IV}(x) = p(x) + H_p y^{II}, \quad (5)$$

$$H_p \frac{LC}{ECAC} + y^{II} \int_0^L v(x) dx = 0 \quad (6)$$

$$L = l_1 + l_2 + \cdots + l_n$$

式 (5)、(6) を解くと、影響係数は次式で求まる。

$$\begin{aligned} {}_{\alpha}S_x'' &= {}_{\alpha}S_x^{0''} + \sum_{i=1}^{m-1} {}_{\alpha}S_{xi} \cdot {}_{\alpha}X_i''(\xi_k) \\ &+ \sum_{i=1}^{m-1} {}_{\beta}S_{xi} {}_{\alpha}X_i''(\xi_k) + W_x {}_{\alpha}H''(\xi_k) \end{aligned} \quad (7)$$

ここで、

EI : 補剛桁の曲げ剛さ (t-m²),

$v(x)$: 活荷重 p (t/m) による補剛桁のたわみ (m),

H_p : 活荷重によるケーブルの水平張力 (t),

$$g = -g/H_g,$$

H_g : 死荷重 g (t/m) によるケーブルの水平張力 (t),

l_k : k スパンの長さ,

$$L_c = \int \frac{dx}{\cos \varphi},$$

φ : 水平方向に対するケーブルの傾斜角,

E_c : ケーブルの弾性係数 (t/m),

A_c : ケーブルの断面積 (m²),

" S_x^0 ": 単純桁の影響係数,

${}_{\alpha}S_{xi}$, ${}_{\beta}S_{xi}$: n 径間連続桁における対称組荷重の状態 ${}_{\alpha}X_i$ 及び逆対称組荷重の状態 ${}_{\beta}X_i$ における求める点の値,

${}_{\alpha}X_i''(\xi_k)$, ${}_{\beta}X_i''(\xi_k)$: n 径間連続桁における対称組荷重の不静定力の影響線。

(2) 単純補剛桁を有する吊橋

式 (7) から、第 2 項、第 3 項を省いたものと同じ形になる。

2-2-2 撓度理論による塔頂ローラーの場合の影響係数

(1) 連続補剛桁を有する吊橋

$$EIv^{IV}(x) - Hvy^{II}(x) = p(x) + H_p y^{II} \quad (8)$$

式 (6) と式 (8) から式 (7) と同じ形の影響係数を求める式が得られる。

$$\begin{aligned} {}_{\alpha}B_x'' &= {}_{\alpha}B_x^{0''} + \sum_{i=1}^{m-1} {}_{\alpha}B_{xi} {}_{\alpha}X_i''(\xi_k) \\ &+ \sum_{i=1}^{m-1} {}_{\beta}B_{xi} {}_{\alpha}X_i''(\xi_k) + W_x {}_{\alpha}H''(\xi_k) \end{aligned} \quad (9)$$

ここで ${}_{\alpha}X_i''(\xi_k)$: n 径間連続の桁に水平張力 H が作用している時の、その連続桁の対称組荷重の不静定力、その他の説明は、2-2-1-と同じ。

(2) 単純補剛桁を有する吊橋

式 (9) で、第 2 項と第 3 項を省いたものと同じ形になる。

2-2-3 撓度理論による塔頂ヒンジの場合の影響係数

(1) 連続補剛桁を有する吊橋

$$\left. \begin{aligned} H_{P1} \frac{LC_1}{ECAC} + y^{II} \int_0^{l_1} v(x) dx &= \delta_1, \\ H_{P2} \frac{LC_2}{ECAC} + y^{II} \int_0^{l_2} v(x) dx &= \delta_2, \\ \vdots &\vdots \\ H_{Pn} \frac{LC_n}{ECAC} + y^{II} \int_0^{l_n} v(x) dx &= \delta_n. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

ここで、 $\delta_1 \cdots \delta_n$: 塔頂における水平たわみ量である。

式 (8)、(10) を解くと、影響係数は次式で求まる。

$$\begin{aligned} {}_{\alpha}C_i'' &= {}_{\alpha}C_i^{0''} + \sum_{i=1}^{m-1} {}_{\alpha}C_{xi} {}_{\alpha}X_i''(\xi_k) \\ &+ \sum_{i=1}^{m-1} {}_{\beta}C_{xi} {}_{\alpha}X_i''(\xi_k) + W_x {}_{\alpha}H''(\xi_k) \end{aligned} \quad (11)$$

ここで、

$$LC_i = \int \frac{dx}{\cos \varphi_i}$$

φ_i : 水平方向に対する第 i 番目のケーブルの傾斜角,

その他の記号は、2-2-2と同じ意味をもつ。

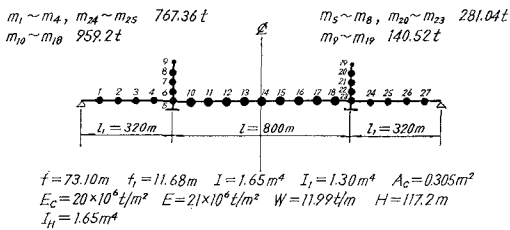
(2) 単純補剛桁を有する吊橋

式 (11) で、第2項、第3項を省いたものと同じ形になる。

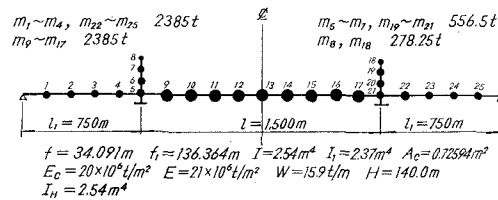
3. 数値計算例

数値計算を行なった例の振動系については、図-2に、断面諸元と共に示す。断面諸元の記号については、次の通りである。

計算例-1 3径間吊橋 (A)



計算例-2 3径間吊橋 (B)



計算例-3 5径間吊橋

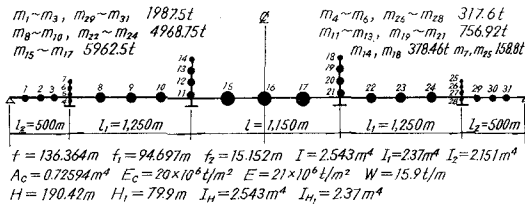
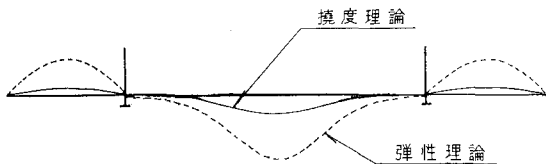


図-2

単純補剛桁を有する吊橋の影響係数の比較



連続補剛桁を有する吊橋の影響係数の比較

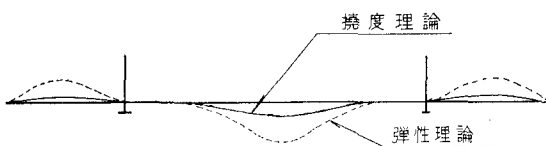


図-3

l : 中央径間長, l_1, l_2 : 側径間長, f : 中央支間サグ, f_1, f_2 : 側支間サグ, I : 中央径間補剛桁断面2次モーメント (片側), I_1, I_2 : 側径間補剛桁断面2次モーメント (片側), A_c : 主ケーブルの断面積, E_c : 主ケーブルの弾性係数, E : 構造用鋼の弾性係数, w : 死荷重強度 (片側ケーブルあたり), H : 塔長, I_H : 塔の断面2次モーメント。

4. 解析結果の考察

4-1 弾性新論と撓度理論による相違

静的な解析において、影響係数を弾性理論と撓度理論で求めた場合、その相違を比較してみた。数値計算では、単

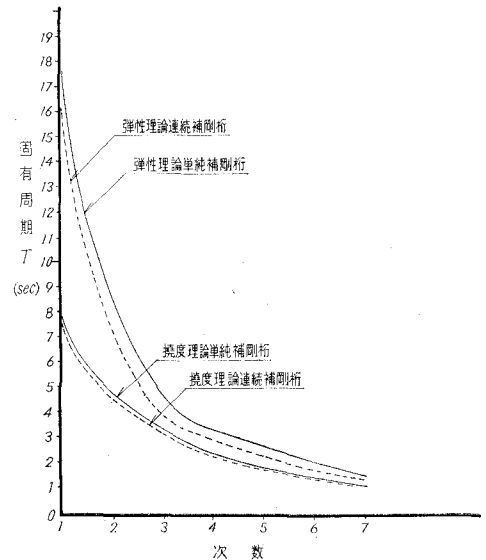


図-4-a 3径間吊橋 (A) 対称振動固有周期

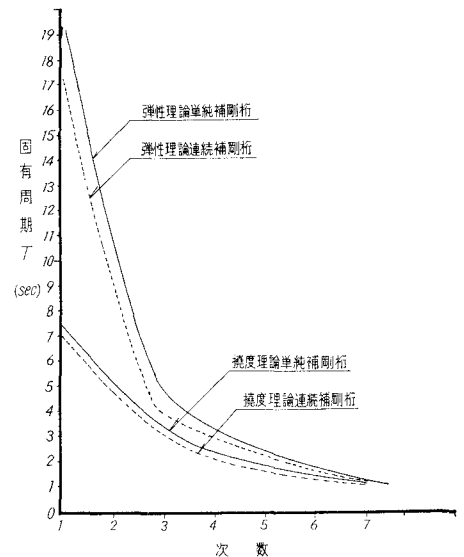
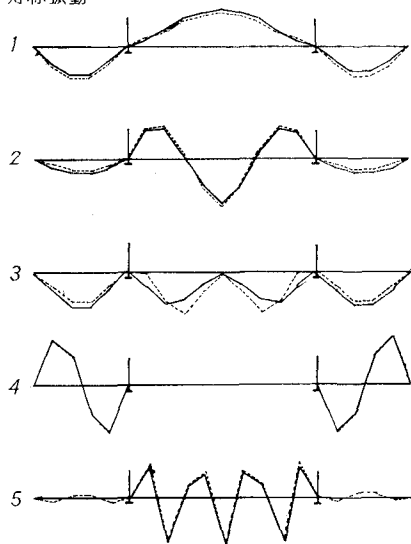


図-4-b 3径間吊橋 (A) 逆対称振動固有周期

対称振動



逆対称振動

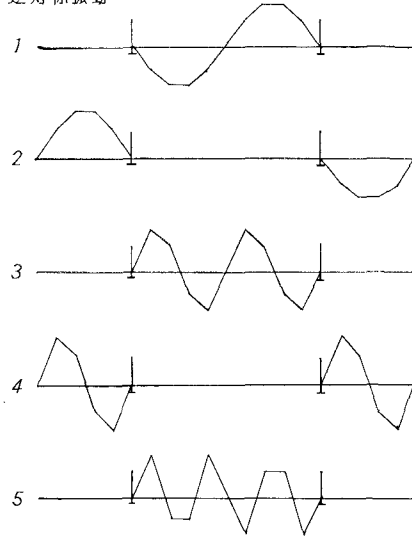
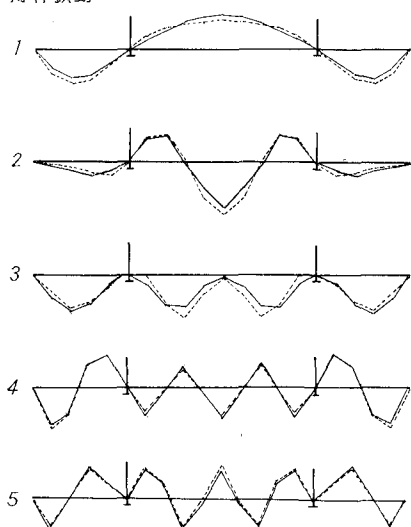


図-5-a 3 径間単純補剛桁吊橋 (A) 振動のモード

対称振動



逆対称振動

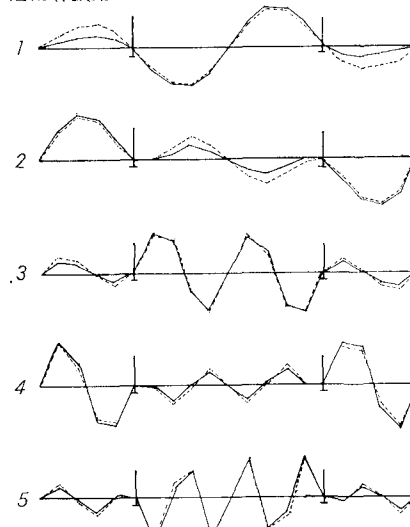


図-5-b 3 径間吊橋連続補剛桁吊橋 (A) 振動モード

純補剛桁吊橋、及び連続補剛桁吊橋で、いずれも塔頂がローラーである場合を用いた。図-3 には、各々のタイプについて、中央点での影響係数を比較している。これによれば、弾性理論によって解析されたものと、撓度理論によって解析されたものとの間には、かなりの差が見られる。実際にこれらの値を用いて数値計算した結果は、図-4 の固有周期図-5 の振動モードと比較してある。

振動モードにおいては、単純補剛桁の場合も、連続補剛桁の場合も、ほとんどその差はなく、ある次数では、全く一致しているものもある。したがって振動モードのみを調

べる場合には、どちらで静的解析を行なっても、差はない。

一方、固有周期においては、その差が顕著に現われている。単純補剛桁では、対称 1 次振動で、弾性理論 18.76 sec, 撓度理論 7.73 sec, 連続補剛桁では、対称 1 次振動で 16.07 sec, 7.47 sec と 2 倍以上の差がある。ただ、次数が高くなれば、その差は、あまり見られなくなるが、応答計算をする場合、その対象となるのが、低次の固有周期であるから、静的な解析は、撓度理論で行なわなければならないと思われる。

以下の考察においては、撓度理論によって、影響係数を

計算したものを用いた。

4-2 単純補剛桁吊橋と連続補剛桁吊橋の比較

従来、連続補剛桁を有する吊橋の施工例は、あまりなく構造解析の煩雑さもその一因となり、単純補剛桁を有する吊橋をもって、そのかわりとしている。例えば、「吊橋の

表—1 各ケースの周期

(1) 3 径間単純補剛桁 (A) ローラー

次数	対 称 振 動	逆 対 称 振 動
1	7.73 sec	7.16 sec
2	5.64 sec	4.52 sec
3	3.13 sec	3.02 sec

(2) 3 径間連続補剛桁 (A) ローラー

次数	対 称 振 動	逆 対 称 振 動
1	7.47 sec (1.04)	6.84 sec (1.03)
2	4.43 sec (1.01)	5.13 sec (1.10)
3	3.06 sec (1.02)	2.88 sec (1.05)

(3) 3 径間単純補剛桁 (A) ヒンジ

次数	対 称 振 動	逆 対 称 振 動
1	7.71 sec (1.00)	7.16 sec (1.00)
2	4.52 sec (1.01)	5.63 sec (1.01)
3	3.13 sec (1.00)	3.02 sec (1.00)

(4) 3 径間単純補剛桁 (B) ローラー

次数	対 称 振 動	逆 対 称 振 動
1	13.64 sec	10.45 sec
2	7.07 sec	10.44 sec
3	5.10 sec	5.08 sec

(5) 3 径間連続補剛桁 (B) ローラー

次数	対 称 振 動	逆 対 称 振 動
1	13.54 sec (1.00)	10.44 sec (1.00)
2	6.96 sec (1.01)	9.90 sec (1.05)
3	5.09 sec (1.00)	4.98 sec (1.02)

(6) 5 径間単純補剛桁 ローラー

次数	対 称 振 動	逆 対 称 振 動
1	19.78 sec	17.71 sec
2	8.56 sec	11.07 sec
3		

(7) 5 径間連続補剛桁 ローラー

次数	対 称 振 動	逆 対 称 振 動
1	19.51 sec (1)	17.09 sec (1.03)
2	8.99 sec (0.96)	10.90 sec (1.03)
3	8.38 sec ()	8.96 sec ()

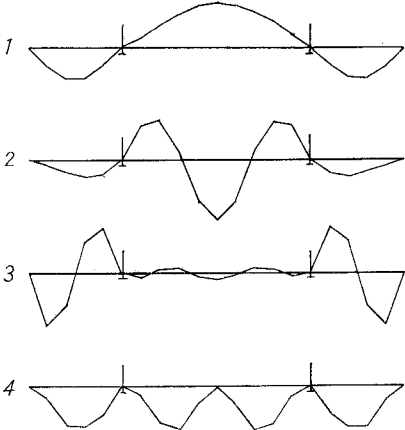
(8) 5 径間連続補剛桁 ヒンジ

次数	対 称 振 動	逆 対 称 振 動
1	19.60 sec (1.00)	17.21 sec (1.03)
2	8.98 sec (1.00)	10.90 sec (1.00)
3	8.41 sec (1.00)	8.96 sec (1.00)

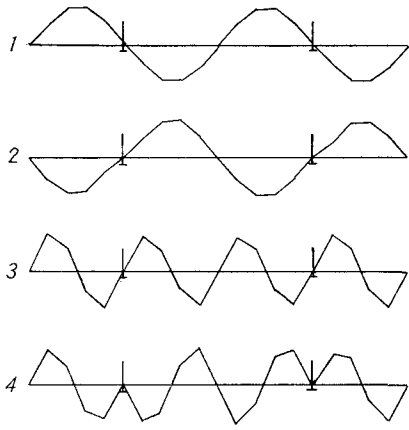
注 1. () の数字は、単純ローラー、連続ローラー、単純ヒンジ、連続ヒンジの振動数をそれぞれ $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ とすれば (2): ω_2/ω_1 (3): ω_3/ω_1 (5): ω_2/ω_1 (7): ω_2/ω_1 (8): ω_2/ω_4 をあらわす。

注 2. 3 径間 (A) については中央径間長 800 m, 3 径間 (B) については中央径間長 1,500 m をあらわす。

対称振動



逆対称振動



図—6-a 3 径間連続補剛桁吊橋 (B) 振動モード

対称振動

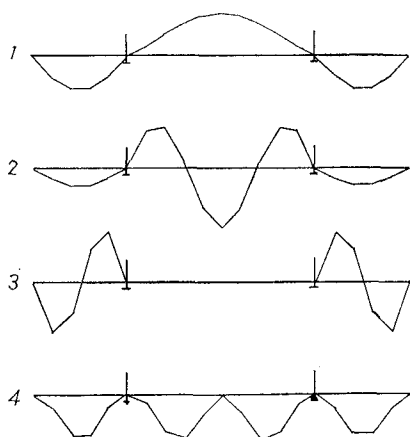
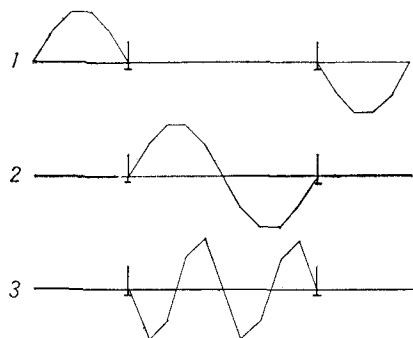
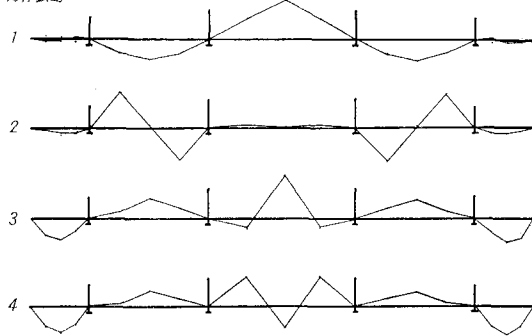


図-6-b 3径間単純補剛吊橋桁 (B) 振動モード

逆対称振動



対称振動



逆対称振動

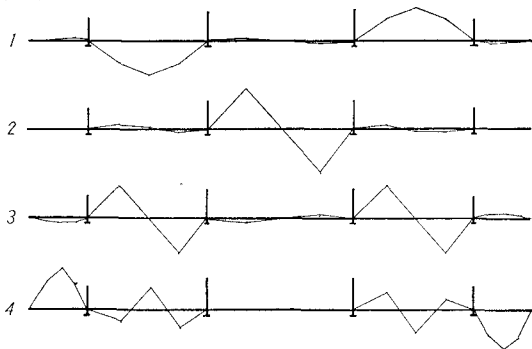


図-7 5径間連続補剛桁振動モード

設計と施工 (振動論) 川田忠樹著, 理工図書」によれば, 対称1次振動においては, 3% 内外の誤差としている。

ここでは, 表-1 に単純補剛桁と連続補剛桁の比をとり, 誤差を調べた。対称1次振動では, 3径間 (A), 3径間 (B), 5径間の場合, それぞれ, 1.04, 1.00, 1.00, また, 逆対称振動では, 1.03, 1.00, 1.03, と4% 内に, 誤差が収まる。他の次数をみても, あまり誤差はなく, 一般に, 連続補剛桁を有する吊橋の方が, 大きくなると言える。

以上, 3例を検討すれば, 固有振動数の差は, 非常に小であり, 便宜的に, 単純補剛桁を有するものをもって, 連続補剛桁を有する吊橋に換えても大差はない。図-6には3径間 (B) の場合の, 振動モードを示す。

なお, 参考のために, 図-7には, 5径間連続補剛桁の場合の振動モードを示す。

4-3 ケーブルの支持状態による比較

ケーブルが, 塔頂で, ローラーで支持されているものと, ヒンジで支持されているものと, 比較を行なう。塔の支持状態については, 図8に示す。ここでは, ローラー支持の場合, ケーブルとローラー支承との間に働く摩擦力は, 考慮していない。

表-1には, 3径間 (A) の場合の単純補剛桁ローラーと単純補剛桁ヒンジ, また, 5径間連続補剛桁ローラーと連続補剛桁ヒンジの振動数の比をとっている。これを見れば, どちらの場合も, 比は, ほとんど1.0, で, 固有振動数を比較する場合, 一般に, ヒンジ支承の方が大きめに出てき, その間には, 差はないといえる。モードについても, 差はない。ただ, ヒンジ支承の方に塔の影響が, 入っていることに注意しなければならない。

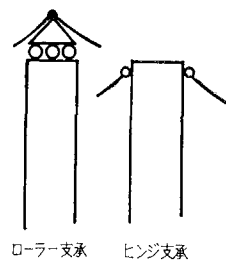


図-8 支承支持状態図

5. あとがき

多自由度系において, 無限質点をいくつかの質点に分ければよいかは, 電算のメモリー, 及び計算時間に, 大きく左右される。試みに図-2にある3径間 (A) ヒンジの場合を例にとり, 27個の質点を, 17個の質点に減じて計算を行なってみたが, NEAC-2203 Gで, 27質点の計算時間は, 6次までで, 5時間以上かかる。一方, 17質点では, 1時間

程度で、17 次まで出てきた。

対称 1 次固有周期をみれば、27 質点で 7.71 sec, 17 質点で、7.28 sec と 6% 以内の誤差である。このように、10 個質点を増すことによる誤差は、あまりなく、質点が多すぎると、収れんが悪く、無駄な場合が多い。実際に計算を行なう場合は、3 径間 (A), (B) のような場合、20 質点程度でも、かなり精度が高い結果が、得られると思う。

参 考 文 献

- 1) 渡辺 昇・佐藤浩一：「多径間吊橋の弾性理論と撓度理論との比較について」第 24 回年次学術講演会概要，土木学会。
- 2) 渡辺 昇・佐藤浩一：「多径間吊橋の塔の曲げ剛性が，断面力特性に及ぼす影響について」昭和 45 年土木学会北海道支部論文集，土木学会北海道支部。
- 3) Ping-Chun wang：「Numerical and matrix method in structural mechanics with application to Computers」John Wiley and Sons, Inc.
- 4) 川田忠樹：「吊橋の設計と施工，振動論」理工図書。