

斜張橋の固有振動計算(石狩河口橋)

正員 小西輝久*
 正員 高橋陽一**
 正員 新山惇**
 正員 ○津田義和***

1. 概要

斜張橋はザイルで直接桁を吊った形式のものであって、力学的には桁橋と吊橋との中間に位置するものである。特に近年に於いて長径間の斜張橋が注目されて来つつあるが、この様な桁橋に比べてよりフレシブルな構造物が建設されつつある背景には、長大橋に対する動的応答、特に耐風安定性と地震に対して充分の検討が行なわれて来たからであろう。特に外国に比べて我国の自然環境は極めてきびしいので、対風、対震の検討は大切な意味をもって来る。この様な構造物の動的特性の検討には、まずその構造物の持つ固有振動数と振動モードを知ることが不可欠になる。

一般に斜張橋は、(i) 構造形式が単純で美しい。(ii) 他の橋と比較して鋼重が小さく、経済的で、スパン 200~300 に適する。(iii) 補剛桁桁高が低い等の特徴がある。石狩河口橋中央径間部分は (64.00 m + 160.00 m + 64.00 m) の支間を有する三径間連続斜張橋で、幅員 11.40 m、補剛桁はモノボックスである。ザイルの配置はカラカサ型。主塔は A 型である。ザイル配置がカラカサ型、主塔形式 π 型ラーメンについては参考文献 (1) にもとづいて固有振動周期計算を行ない、主塔が A 型ラーメンの場合は 3. に示されている様にこの理論を改変して使用した。

又、ザイル型式がハープ型の場合については、紙数の関係で今回は割愛したが、同様に一部改変して使用している。斜張橋の力学的モデルを次の二種類考える。

図-2 は撓み振動を計算する場合のモデルである。構造として質量が各ジョイントに集中して存在するものとし、ジョイントの間は質量のない剛体棒が連続していると考え、各棒は原型と等価なバネ定数の Elastic Joint で結ばれているものと仮定する。

図-3 は振り振動を計算する場合のモデルである。構造物質量だけをジョイントに集中して考え、剛性は原型と同じ様に分布しているものとする。

又、斜張橋の振動解析に際して次の仮定を行なう。

- (i) 橋の縦断勾配は無視する。
- (ii) 微小振幅の線型振動を仮定し、従って斜張索の張力は常に正とする。
- (iii) 補剛桁の橋軸方向の変位は無視する。

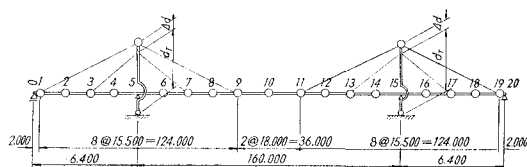


図-1

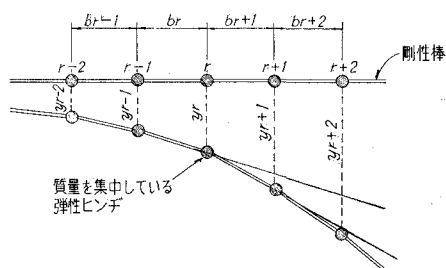


図-2

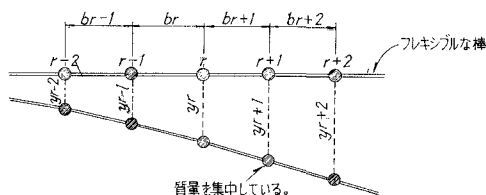


図-3

* 北海道開発局

** 札幌開発建設部

*** 北海道開発コンサルタント K.K.

2. 主塔がπ型ラーメンの場合基礎振動方程式

石狩河口橋を図-1に示す様なモデルに置き換える。撓み振動の場合には、質点と弾性が集中した質点が21個存在し、主塔の質量は主塔上端に集中しているものとする。捩り振動の場合、極慣性モーメントが集中している質点を21個仮定する。

2.1 たわみ振動の場合

図-1の質点系に於ける振動基礎方程式は次の様になる。点 r の角変化 α_r は

$$\alpha_r = \frac{1}{b_0} \left(\frac{b_0}{b_r} y_{r-1} - \left(\frac{b_0}{b_r} + \frac{b_0}{b_{r+1}} \right) y_r + \frac{b_0}{b_{r+1}} y_{r+1} \right)$$

点 r の曲げモーメント M_r は

$$M_r = -\frac{2EI}{(b_r + b_{r+1}) b_0} \cdot \left\{ \frac{b_0}{b_r} y_{r-1} - \left(\frac{b_0}{b_r} + \frac{b_0}{b_{r+1}} \right) y_r + \frac{b_0}{b_{r+1}} y_{r+1} \right\}$$

点 r の桁の反力 R_r は

$$R_r = \frac{1}{b_0} \left\{ \frac{b_0}{b_r} \cdot M_{r-1} - \left(\frac{b_0}{b_r} + \frac{b_0}{b_{r+1}} \right) M_r + \frac{b_0}{b_{r+1}} M_{r+1} \right\}$$

点 r に斜張索がない場合の運動方程式は

$$\begin{aligned} & \frac{W_r}{g} \cdot \frac{\partial^2 y_r}{\partial t^2} - \frac{1}{b_0} \left\{ \frac{b_0}{b_r} M_{r-1} - \left(\frac{b_0}{b_r} + \frac{b_0}{b_{r+1}} \right) M_r + \frac{b_0}{b_{r+1}} M_{r+1} \right\} \\ &= \frac{W_r}{g} \cdot \frac{\partial^2 y_r}{\partial t^2} - 2EI \left\{ \frac{1}{b_{r-1}(b_{r-1} + b_r) b_r} y_{r-2} - \left(\frac{1}{b_{r-1} b_r^2} + \frac{1}{b_r^2 b_{r+1}} \right) y_{r-1} \right. \\ & \quad + \left\{ \frac{1}{(b_{r-1} + b_r) b_r^2} + \frac{1}{b_r b_{r+1}} \cdot \left(\frac{1}{b_r} + \frac{1}{b_{r+1}} \right) + \frac{1}{b_{r+1}^2 (b_{r+1} + b_{r+2})} \right\} y_r \\ & \quad \left. - \left\{ \frac{1}{b_r b_{r+1}^2} + \frac{1}{b_{r+1}^2 b_{r+2}} \right\} y_{r+1} + \frac{1}{b_{r+1} b_{r+2} (b_{r+1} + b_{r+2})} y_{r+2} \right\} = 0 \end{aligned}$$

点 r に斜張索がある場合の運動方程式は

$$\begin{aligned} & \frac{W_r}{g} \cdot \frac{\partial^2 y_r}{\partial t^2} - 2EI \left\{ \frac{1}{b_{r-1}(b_{r-1} + b_r) b_r} y_{r-2} - \left(\frac{1}{b_{r-1} b_r^2} + \frac{1}{b_r^2 b_{r+1}} \right) y_{r-1} \right. \\ & \quad + \left\{ \frac{1}{(b_{r-1} + b_r) b_r^2} + \frac{1}{b_r b_{r+1}} \cdot \left(\frac{1}{b_r} + \frac{1}{b_{r+1}} \right) + \frac{1}{b_{r+1}^2 (b_{r+1} + b_{r+2})} \right\} y_r \\ & \quad \left. + \left\{ \frac{1}{b_r b_{r+1}^2} + \frac{1}{b_{r+1}^2 b_{r+2}} \right\} y_{r+1} + \frac{1}{b_{r+1} b_{r+2} (b_{r+1} + b_{r+2})} y_{r+2} \right\} + S_r = 0 \end{aligned}$$

ここで

$$W_r = \frac{W(b_r + b_{r+1})}{2} + W_e$$

S_r は点 r に取付けられた斜張索の張力の増分の鉛直成分であって、次の式で表はされる。

$$\begin{aligned} S_1 &= E_c A_{c1} \frac{(d + \Delta d)^2}{\{(\delta + \Delta \delta)^2 + 4\lambda^2\}^{3/2}} y_1 + E_c A_{c1} \frac{2\lambda(d + \Delta d)(d_r + \Delta d)}{\{(d + \Delta d)^2 + 4\lambda^2\}^{3/2}} \cdot \theta \\ S_2 &= E_c A_{c3} \frac{d^2}{\{d^2 + \lambda^2\}^{3/2}} y_3 + E_c A_{c3} \frac{\lambda d d_r}{\{d^2 + \lambda^2\}^{3/2}} \cdot \theta \\ S_7 &= E_c A_7 \cdot \frac{d^2}{\{d^2 + \lambda^2\}^{3/2}} \cdot y_7 - E_c A_7 \cdot \frac{\lambda d d_r}{\{d^2 + \lambda^2\}^{3/2}} \cdot \theta \\ &= A_3 y_7 + B_3 \theta \\ S_9 &= E_c A_9 \frac{(d + \Delta d)^2}{\{(\lambda + \Delta \lambda)^2 + 4\lambda^2\}^{3/2}} y_9 - E_c A_9 \frac{2\lambda(d + \Delta d)(d_r + \Delta d)}{\{(\lambda + \Delta \lambda)^2 + 4\lambda^2\}^{3/2}} \cdot \theta \\ &= A_4 y_9 + B_4 \theta \end{aligned}$$

ここで E_c ; 斜張索の弾性係数

A_r ; r 点に取付けられた斜張索の断面積

θ ; 主塔の回転角

同様に、主塔の運動方程式は

$$\frac{W_r(d_r + \Delta d)^2}{2g} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - H = 0$$

$$\begin{aligned}
H = & -E_c A_1 \frac{2\lambda(d+\Delta d)(d_T+\Delta d)}{\{(d+\Delta d)^2+4\lambda^2\}^{3/2}} y_1 - E_c A_1 \cdot \frac{4\lambda^2(d_T+\Delta d)^2}{\{(d+\Delta d)^2+4\lambda^2\}^{3/2}} \theta \\
& - E_c A_3 \frac{\lambda d d_T}{\{d^2+\lambda^2\}^{3/2}} y_3 - E_c A_3 \cdot \frac{\lambda^2 d_T^2}{\{d^2+\lambda^2\}^{3/2}} \cdot \theta \\
& + E_c A_7 \cdot \frac{\lambda d d_T}{\{d^2+\lambda^2\}^{3/2}} \cdot y_7 - E_c A_7 \cdot \frac{\lambda^2 d_T^2}{\{d^2+\lambda^2\}^{3/2}} \theta \\
& + E_c A_9 \cdot \frac{2\lambda(d+\Delta d)(d_T+\Delta d)}{\{(d+\Delta d)^2+4\lambda^2\}^{3/2}} y_9 - E_c A_9 \cdot \frac{4\lambda^2(d_T+\Delta d)^2}{\{(d+\Delta d)^2+4\lambda^2\}^{3/2}} \theta \\
= & D1 y_1 + D2 y_3 + D3 y_7 + D4 y_9 + (E1 + E2 + E3 + E4) \theta
\end{aligned}$$

境界条件は

点1に於いて

$$y_0 = 0, \quad \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)_{x=0} = 0$$

点5に於いて

$$y_5 = 0$$

(2) 振り振動の場合

各格点に於ける振動の基礎方程式は次の様になる。

点 r の振れ角の変化 Φ_r は

$$\Phi_r = \frac{1}{b_0} \left\{ \frac{b_0}{b_r} \varphi_{r-1} - \left(\frac{b_0}{b_r} + \frac{b_0}{b_{r+1}} \right) \varphi_r + \frac{b_0}{b_{r+1}} \varphi_{r+1} \right\}$$

点 r の振りモーメント T_r は

$$T_r = -\frac{GJ}{b_0} \left\{ \frac{b_0}{b_r} \varphi_{r-1} - \left(\frac{b_0}{b_r} + \frac{b_0}{b_{r+1}} \right) \varphi_r + \frac{b_0}{b_{r+1}} \varphi_{r+1} \right\}$$

点 r に斜張索のない場合の運動方程式は

$$m_r \cdot \frac{\partial^2 \varphi_r}{\partial t^2} - \frac{GJ}{b_0} \left\{ \frac{b_0}{b_r} \varphi_{r-1} - \left(\frac{b_0}{b_r} + \frac{b_0}{b_{r+1}} \right) \varphi_r + \frac{b_0}{b_{r+1}} \varphi_{r+1} \right\} = 0$$

点 r に斜張索がある場合の運動方程式は

$$m_r \cdot \frac{\partial^2 \varphi_r}{\partial t^2} - \frac{GJ}{b_0} \left\{ \frac{b_0}{b_r} \varphi_{r-1} - \left(\frac{b_0}{b_r} + \frac{b_0}{b_{r+1}} \right) \varphi_r + \frac{b_0}{b_{r+1}} \varphi_{r+1} \right\} + t_r = 0$$

ここで m_r ; 点 r に集中させた極慣性モーメント, t_r ; 点 r に取付けられた斜張索の張力増分の鉛直成分による振りモーメントである。

$$\begin{aligned}
t_1 = & E_c A_1 \cdot \frac{2B^2(d+\Delta d)^2}{\{d^2+\lambda^2\}^{3/2}} \varphi_1 - E_c A_1 \cdot \frac{4BB_T \lambda (d+\Delta d)}{\{(d+\Delta d)^2+4\lambda^2\}^{3/2}} \varphi_T \\
= & F1 \varphi_1 + G1 \varphi_T \\
t_3 = & E_c A_3 \cdot \frac{2B^2 d^2}{\{d^2+\lambda^2\}^{3/2}} \varphi_3 - E_c A_3 \cdot \frac{2BB_T \lambda d}{\{d^2+\lambda^2\}^{3/2}} \varphi_T \\
= & F2 \varphi_3 + G2 \varphi_T \\
t_7 = & E_c A_7 \cdot \frac{2B^2 d^2}{\{d^2+\lambda^2\}^{3/2}} \varphi_7 - E_c A_7 \cdot \frac{2BB_T \lambda d}{\{d^2+\lambda^2\}^{3/2}} \varphi_T \\
= & F3 \varphi_7 + G3 \varphi_T \\
t_9 = & E_c A_9 \cdot \frac{2B^2(d+\Delta d)^2}{\{(d+\Delta d)^2+4\lambda^2\}^{3/2}} \varphi_9 - E_c A_9 \cdot \frac{4BB_T \lambda (d+\Delta d)}{\{(d+\Delta d)^2+4\lambda^2\}^{3/2}} \varphi_T \\
= & F4 \varphi_9 + G4 \varphi_T
\end{aligned}$$

ただし, $2B_T$; 主塔でのケーブル間隔, φ_T ; 主塔の振れ角である。

主塔の運動方程式は

$$\begin{aligned}
m_T \cdot \frac{\partial^2 \varphi_T}{\partial t^2} + \frac{GJ_T}{d_T} \varphi_T - t_T = 0 \\
t_T = E_c A_1 \cdot \frac{4BB_T \lambda (d+\Delta d)}{\{(d+\Delta d)^2+4\lambda^2\}^{3/2}} \varphi_1 - E_c A_1 \cdot \frac{8B_T^2 \lambda^2}{\{(d+\Delta d)^2+4\lambda^2\}^{3/2}} \varphi_T
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + E_c A_3 \cdot \frac{2BB_T \lambda d}{\{d^2 + \lambda^2\}^{3/2}} \varphi_3 - E_c A_3 \cdot \frac{2B_T^2 \lambda^2}{\{d^2 + \lambda^2\}^{3/2}} \varphi_T \\
& - E_c A_7 \cdot \frac{2BB_T \lambda d}{\{d^2 + \lambda^2\}^{3/2}} \varphi_7 - E_c A_7 \cdot \frac{2B_T^2 \lambda^2}{\{d^2 + \lambda^2\}^{3/2}} \varphi_T \\
& - E_c A_9 \cdot \frac{4BB_T \lambda (d + \Delta d)}{\{(d + \Delta d)^2 + 4\lambda^2\}^{3/2}} \varphi_9 - E_c A_9 \cdot \frac{8B_T^2 \lambda^2}{\{(d + \Delta d)^2 + 4\lambda^2\}^{3/2}} \varphi_T \\
& = H1 \varphi_1 + H2 \varphi_3 + H3 \varphi_7 + H4 \varphi_9 + (I1 + I2 + I3 + I4) \varphi_T
\end{aligned}$$

境界条件

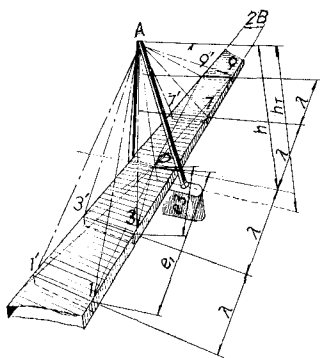
$$\text{点1に於いて} \quad \varphi_1 = 0$$

$$\text{点5に於いて} \quad \varphi_5 = 0$$

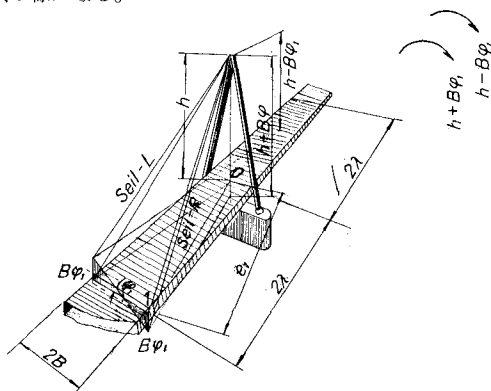
3. 主塔が A 型ラーメンの場合の基礎振動方程式

(1) 撓み振動の場合

点 r に斜張索がない場合の運動方程式は π 型ラーメンの場合と同じであり、点 r に斜張索がある場合の運動方程式の斜張索の張力増分の鉛直成分、主塔の運動方程式は次の様になる。



図—4



図—5

点1についてザイル張力の増分の鉛直成分、水平成分について考える。図-7 より

$$e_1 = \sqrt{4\lambda^2 + B^2} = e_9 \quad e_3 = \sqrt{\lambda^2 + B^2} = e_7$$

ザイルの伸びは

$$L + \Delta L = \sqrt{(h + y_1)^2 + (e_1 + h_T \theta_1)^2}$$

$$L = \sqrt{h^2 + e_1^2}$$

$$\Delta L = \sqrt{(h + y_1)^2 + (e_1 + h_T \theta_1)^2} - \sqrt{h^2 + e_1^2}$$

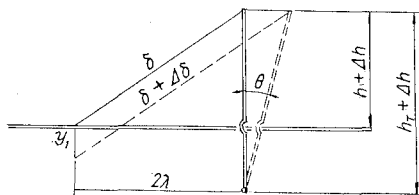
張力の増分は

$$\Delta T = E_c A_{c1} \cdot \frac{\Delta L}{\sqrt{h^2 + e_1^2}}$$

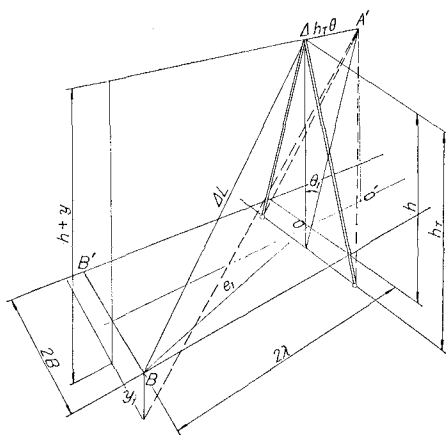
張力の増分の鉛直成分は

$$\begin{aligned}
S_1 &= E_c A_{c1} \cdot \frac{\Delta L}{\sqrt{h^2 + e_1^2}} \cdot \frac{h + y}{L + \Delta L} \\
&= E_c A_{c1} \cdot \frac{(\sqrt{(h + y_1)^2 + (e_1 + h_T \theta_1)^2} - \sqrt{h^2 + e_1^2}) (h + y)}{\sqrt{h^2 + e_1^2} \cdot \sqrt{(h + y_1)^2 + (e_1 + h_T \theta_1)^2}} \\
&\div E_c A_{c1} \cdot \left(\frac{h^2}{(h^2 + e_1^2)^{3/2}} y_1 + \frac{e_1 h_T h}{(h^2 + e_1^2)^{3/2}} \theta_1 \right)
\end{aligned}$$

張力の増分の水平成分は



図—6



図—7

$$\begin{aligned}
H_1 &= E_c A_{c1} \cdot \frac{\Delta L}{\sqrt{h^2 + e_1^2}} \cdot \frac{e_1 + h_T \theta_1}{L + \Delta L} \\
&= E_c A_{c1} \cdot \frac{(\sqrt{(h + y_1)^2 + (e_1 + h_T \theta_1)^2} - \sqrt{h^2 + e_1^2}) (e_1 + h_T \theta_1)}{\sqrt{h^2 + e_1^2} \cdot \sqrt{(h + y_1)^2 + (e_1 + h_T \theta_1)^2}} \\
&\div E_c A_{c1} \cdot \left(\frac{h e_1}{(h^2 + e_1^2)^{3/2}} y_1 + \frac{e_1^2 h_T}{(h^2 + e_1^2)^{3/2}} \theta_1 \right)
\end{aligned}$$

点3, 7, 9についても水平成分は

$$\begin{aligned}
S_3 &= E_c A_{c3} \left\{ \frac{h^2}{(h^2 + e_3^2)^{3/2}} y_3 + \frac{e_3 h_T h}{(h^2 + e_3^2)^{3/2}} \theta_3 \right\} \\
S_7 &= E_c A_{c7} \left\{ \frac{h^2}{(h^2 + e_7^2)^{3/2}} y_7 - \frac{e_7 h_T h}{(h^2 + e_7^2)^{3/2}} \theta_7 \right\} \\
S_9 &= E_c A_{c9} \left\{ \frac{h^2}{(h^2 + e_9^2)^{3/2}} y_9 - \frac{e_9 h_T h}{(h^2 + e_9^2)^{3/2}} \theta_9 \right\}
\end{aligned}$$

水平成分は

$$\begin{aligned}
H_3 &= -E_c A_{c3} \frac{h h_T e_3}{(h^2 + e_3^2)^{3/2}} y_3 - E_c A_{c3} \cdot \frac{h_T^2 e_3^2}{(h^2 + e_3^2)^{3/2}} \theta_3 \\
H_7 &= E_c A_{c7} \frac{h h_T e_7}{(h^2 + e_7^2)^{3/2}} y_7 - E_c A_{c7} \cdot \frac{h_T^2 e_7^2}{(h^2 + e_7^2)^{3/2}} \theta_7 \\
H_9 &= E_c A_{c9} \frac{h h_T e_9}{(h^2 + e_9^2)^{3/2}} y_9 - E_c A_{c9} \cdot \frac{h_T^2 e_9^2}{(h^2 + e_9^2)^{3/2}} \theta_9
\end{aligned}$$

主塔の運動方程式は

$$\frac{W_T \cdot h_T^2}{2g} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - H = 0$$

ここで

$$\begin{aligned}
H &= -E_c A_1 \cdot \frac{h h_T e_1}{\{h^2 + e_1^2\}^{3/2}} \cdot y_1 - E_c A_1 \cdot \frac{e_1^2 h_T^2}{\{h^2 + e_1^2\}^{3/2}} \cdot \theta_1 \\
&\quad - E_c A_3 \cdot \frac{h h_T e_3}{\{h^2 + e_3^2\}^{3/2}} \cdot y_3 - E_c A_3 \cdot \frac{e_3^2 h_T^2}{\{h^2 + e_3^2\}^{3/2}} \cdot \theta_3 \\
&\quad + E_c A_7 \cdot \frac{h h_T e_7}{\{h^2 + e_7^2\}^{3/2}} \cdot y_7 - E_c A_7 \cdot \frac{e_7^2 h_T^2}{\{h^2 + e_7^2\}^{3/2}} \cdot \theta_7 \\
&\quad + E_c A_9 \cdot \frac{h h_T e_9}{\{h^2 + e_9^2\}^{3/2}} \cdot y_9 - E_c A_9 \cdot \frac{e_9^2 h_T^2}{\{h^2 + e_9^2\}^{3/2}} \cdot \theta_9
\end{aligned}$$

(2) 揺れ振動の場合

撓み振動の場合と同様、点 r に斜張索がない場合の運動方程式は π 型ラーメンと同じで、点 r に斜張索がある場合の運動方程式の斜張索の張力増分の鉛直成分、主塔の運動方程式は次の様になる (図-5 参照)。

点1についてザイル張力増分の鉛直成分による振りモーメントについて考える。

右側ザイルについて、ザイルの伸びは

$$\Delta S_r = \sqrt{(h + B\varphi_1)^2 + e_1^2} - \sqrt{h^2 + e_1^2}$$

ザイル張力の増分は

$$\Delta P_r = E_c A_{c1} \cdot \frac{\Delta S_R}{\sqrt{h^2 + e_1^2}}$$

ザイル張力増分の鉛直成分は

$$\begin{aligned}
S_{1R} &= E_c A_{c1} \cdot \frac{\Delta S_R}{\sqrt{h^2 + e_1^2}} \cdot \frac{h + B\varphi_1}{S_R + \Delta S_R} \\
&= E_c A_{c1} \cdot \frac{(\sqrt{(h + B\varphi_1)^2 + e_1^2} - \sqrt{h^2 + e_1^2}) (h + B\varphi_1)}{\sqrt{h^2 + e_1^2} \cdot \sqrt{(h + B\varphi_1)^2 + e_1^2}} \\
&\div E_c A_{c1} \cdot \frac{h^2 B}{(h^2 + e_1^2)^{3/2}} \cdot \varphi_1
\end{aligned}$$

次に、左側ザイルについて、ザイルの伸びは

$$\Delta S_R = \sqrt{(h - B\varphi_1)^2 + e_1^2} - \sqrt{h^2 + e_1^2}$$

ザイル張力の増分は

$$\Delta P_R = E_c A_{c1} \cdot \frac{\Delta S_R}{\sqrt{h^2 + e_1^2}}$$

ザイル張力増分の鉛直成分は

$$\begin{aligned} S_{1L} &= E_c A_{c1} \cdot \frac{\Delta S_R}{\sqrt{h^2 + e_1^2}} \cdot \frac{h - B\varphi_1}{S_R + \Delta S_R} \\ &= E_c A_{c1} \cdot \frac{(\sqrt{(h - B\varphi_1)^2 + e_1^2} - \sqrt{h^2 + e_1^2}) \cdot (h - B\varphi_1)}{\sqrt{h^2 + e_1^2} \cdot \sqrt{(h - B\varphi_1)^2 + e_1^2}} \\ &\div -E_c A_{c1} \cdot \frac{h^2 B}{(h^2 + e_1^2)^{3/2}} \cdot \varphi_1 \end{aligned}$$

故に、ザイル張力増分の鉛直成分による振りモーメントは

$$t_1 = E_c A_{c1} \cdot \frac{2B^2 h^2}{(h^2 + e_1^2)^{3/2}} \cdot \varphi_1$$

点3, 点7, 点9についても同様に

$$\begin{aligned} t_3 &= E_c A_{c3} \cdot \frac{2B^2 h^2}{(h^2 + e_3^2)^{3/2}} \cdot \varphi_3 \\ t_7 &= E_c A_{c7} \cdot \frac{2B^2 h^2}{(h^2 + e_7^2)^{3/2}} \cdot \varphi_7 \\ t_9 &= E_c A_{c9} \cdot \frac{2B^2 h^2}{(h^2 + e_9^2)^{3/2}} \cdot \varphi_9 \end{aligned}$$

点1, 点3, 点7, 点9に働くザイル張力の水平成分が主塔に働くが、主塔には振れモーメントとして働かない。故に主塔に関する運動方程式は成立しない。

従って、振れ振動のマトリックス $[m/l]$ は主塔に関する行と列が消えて、対称の場合9元、逆対称の場合8元のマトリックスとなる。

4. 各質点に於ける運動方程式と $[M/K]$ マトリックス

たわみ振動と振れ振動の場合について、境界条件に従って各質点に於ける運動方程式をたてる。

これをマトリックス表示すれば

$$[M] \{\ddot{y}\} + [K] \cdot \{y\} = 0$$

$[M]$, $[K]$ は慣性, 剛性を表はす正方行列, $\{\ddot{y}\}$, $\{y\}$ は各点の変位を要素とする列ベクトルである。

ここで解 $\{y\}$ を

$$\{y\} = \{Y\} \cdot e^{i\omega t}$$

とおけば、変数分離により次式が求まる。

$$[K] \cdot \{Y\} = \omega^2 \cdot [M] \cdot \{Y\}$$

ω が存在するためには、零でない列ベクトル $\{Y\}$ が存在しなければならない。このためには $||[K] - \omega^2[M]||$ が零でなければならない。この式から固有値, 固有ベクトルを求めれば、固有振動数の2乗, 振動モードが求まる。

4.1 π 型ラーメンの場合のたわみ振動

$$(1) \text{ 主塔 } \quad \frac{W_T(d_T + \Delta d)^2}{2g} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - (E1 + E2 + E3 + E4) \theta - D1 y_1 - D2 y_3 - D3 y_7 - D4 y_9 = 0$$

$$\begin{aligned} *(2) \text{ 質点1 } \quad & \frac{W_1}{g} \cdot \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} + \left\{ A1 - 2EI \left(\frac{1}{b_1 b_2} \left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} \right) + \frac{1}{b_2^2 (b_2 + b_3)} \right) \right\} y_1 \\ & - 2EI \left\{ \frac{1}{b_1 b_2^2} + \frac{1}{b_2^2 b_3} \right\} y_2 - \frac{2EI}{b_2 b_3 (b_2 + b_3)} y_3 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \text{ 質点2 } \quad & \frac{W_2}{g} \cdot \frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} + 2EI \left(\frac{1}{b_1 b_2^2} + \frac{1}{b_2^2 b_3} \right) y_1 - 2EI \left\{ \frac{1}{(b_1 + b_2) b_2^2} + \frac{1}{b_2 b_3} \left(\frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_3} \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{b_3^2 (b_3 + b_4)} \right\} y_2 + 2EI \left\{ \frac{1}{b_2 b_3^2} + \frac{1}{b_2 b_3} \right\} y_3 - 2EI \cdot \frac{1}{b_3 b_4 (b_3 + b_4)} y_4 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
*(4) \text{ 質点 } 3 & \quad \frac{W_3}{g} \cdot \frac{\partial^2 y_3}{\partial t^2} - \frac{2EI}{b_2(b_2+b_3)b_3} y_1 + 2EI \left(\frac{1}{b_2 b_3^2} + \frac{1}{b_3^2 b_4} \right) y_2 \\
& \quad + \left\{ A 2 - 2EI \left(\frac{1}{(b_2+b_3)b_3^2} + \frac{1}{b_3 b_4} \left(\frac{1}{b_3} + \frac{1}{b_4} \right) + \frac{1}{b_4^2(b_4+b_5)} \right) \right\} y_3 \\
& \quad + 2EI \left\{ \frac{1}{b_3 b_4^2} + \frac{1}{b_4^2 b_5} \right\} y_4 + 2EI \left\{ \frac{1}{b_4 b_5} \left(\frac{1}{b_4} + \frac{1}{b_5} \right) \right\} y_5 = 0 \\
(5) \text{ 質点 } 4 & \quad \frac{W_4}{g} \cdot \frac{\partial^2 y_4}{\partial t^2} - 2EI \left\{ \frac{1}{b_3(b_3+b_4)b_4} \right\} y_2 + 2EI \left(\frac{1}{b_3 b_4^2} + \frac{1}{b_4^2 b_5} \right) y_3 \\
& \quad - 2EI \left\{ \frac{1}{(b_3+b_4)b_4^2} + \frac{1}{b_4 b_5} \left(\frac{1}{b_4} + \frac{1}{b_5} \right) + \frac{1}{b_5^2(b_5+b_6)} \right\} y_4 \\
& \quad - 2EI \cdot \frac{1}{b_5 b_6(b_5+b_6)} y_6 = 0 \\
(6) \text{ 質点 } 6 & \quad \frac{W_6}{g} \cdot \frac{\partial^2 y_6}{\partial t^2} - 2EI \left\{ \frac{1}{b_5(b_5+b_6)b_6} \right\} y_4 - 2EI \left\{ \frac{1}{(b_5+b_6)b_6^2} + \frac{1}{b_6 b_7} \left(\frac{1}{b_5} + \frac{1}{b_7} \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{b_7^2(b_7+b_8)} \right\} y_6 + 2EI \left\{ \frac{1}{b_5 b_7^2} + \frac{1}{b_7^2 b_8} \right\} y_7 - \frac{2EI}{b_7 b_8(b_7+b_8)} y_8 = 0 \\
*(7) \text{ 質点 } 7 & \quad \frac{W_7}{g} \cdot \frac{\partial^2 y_7}{\partial t^2} - 2EI \left\{ \frac{1}{b_6 b_7^2} + \frac{1}{b_7^2 b_8} \right\} y_6 - 2EI \left\{ A 3 + \frac{1}{(b_6+b_7)b_7^2} + \frac{1}{b_7 b_8} \left(\frac{1}{b_7} + \frac{1}{b_8} \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{b_8^2(b_8+b_9)} \right\} y_7 + 2EI \left\{ \frac{1}{b_8 b_9(b_8+b_9)} \right\} y_9 + 2EI \left\{ \frac{1}{b_7 b_8^2} + \frac{1}{b_8^2 b_9} \right\} y_8 = 0 \\
(8) \text{ 質点 } 8 & \quad \frac{W_8}{g} \cdot \frac{\partial^2 y_8}{\partial t^2} - 2EI \left\{ \frac{1}{b_7(b_7+b_8)b_8} \right\} y_6 + 2EI \left\{ \frac{1}{b_7 b_8^2} + \frac{1}{b_8^2 b_9} \right\} y_7 \\
& \quad - 2EI \left\{ \frac{1}{(b_7+b_8)b_8^2} + \frac{1}{b_8 b_9} \left(\frac{1}{b_8} + \frac{1}{b_9} \right) + \frac{1}{b_9^2(b_9+b_{10})} \right\} y_8 + 2EI \left\{ \frac{1}{b_8 b_9^2} + \frac{1}{b_9^2 b_{10}} \right\} y_9 \\
& \quad - 2EI \cdot \frac{1}{b_9 b_{10}(b_9+b_{10})} y_{10} = 0 \\
*(9) \text{ 質点 } 9 & \quad \frac{W_9}{g} \cdot \frac{\partial^2 y_9}{\partial t^2} - 2EI \left(\frac{1}{b_8(b_8+b_9)b_9} \right) y_7 + 2EI \left(\frac{1}{b_8 b_9^2} + \frac{1}{b_9^2 b_{10}} \right) y_8 \\
& \quad - 2EI \left\{ A 4 + \frac{1}{(b_8+b_9)b_9^2} + \frac{1}{b_9 b_{10}} \left(\frac{1}{b_9} + \frac{1}{b_{10}} \right) + \frac{1}{b_{10}^2(b_{10}+b_{11})} \right\} y_9 \\
& \quad + 2EI \left\{ \frac{1}{b_9 b_{10}^2} + \frac{1}{b_{10}^2 b_{11}} \right\} y_{10} - 2EI \cdot \frac{1}{b_{10} b_{11}(b_{10}+b_{11})} y_{11} = 0 \\
(10) \text{ 質点 } 10 & \quad \frac{W_{10}}{g} \cdot \frac{\partial^2 y_{10}}{\partial t^2} - 2EI \left(\frac{1}{b_9(b_9+b_{10})b_{10}} \right) y_8 + 2EI \left\{ \frac{1}{b_9 b_{10}^2} + \frac{1}{b_{10}^2 b_{11}} \right\} y_9 \\
& \quad - 2EI \left\{ \frac{1}{(b_9+b_{10})b_{10}^2} + \frac{1}{b_{10} b_{11}} \left(\frac{1}{b_{10}} + \frac{1}{b_{11}} \right) + \frac{1}{b_{11}^2(b_{11}+b_{12})} \right\} y_{10} \\
& \quad + 2EI \left\{ \frac{1}{b_{10} b_{11}^2} + \frac{1}{b_{11}^2 b_{12}} \right\} y_{11} - \frac{2EI}{b_{11} b_{12}(b_{11}+b_{12})} y_{12} = 0
\end{aligned}$$

4.2 π 型ラーメンの場合の捩れ振動

$$\begin{aligned}
(1) \text{ 主塔 } & \quad m_T \cdot \frac{\partial^2 \varphi_T}{\partial t^2} - \left(I_1 + I_2 + I_3 + I_4 - \frac{GJ_T}{dr} \right) \varphi_T - H 1 \varphi_1 - H 2 \varphi_3 + H 3 \varphi_7 - H 4 \varphi_9 = 0 \\
*(2) \text{ 格点 } 1 & \quad m_1 \cdot \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} + \left\{ F 1 + GJ \left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} \right) \right\} \varphi_1 - GJ \cdot \frac{1}{b_2} \varphi_2 + G 1 \varphi_T = 0 \\
(3) \text{ 格点 } 2 & \quad m_2 \cdot \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} - GJ \cdot \frac{1}{b_2} \varphi_1 + GJ \left(\frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_3} \right) \varphi_2 - \frac{GJ}{b_3} \varphi_3 = 0 \\
*(4) \text{ 格点 } 3 & \quad m_3 \cdot \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial t^2} - GJ \cdot \frac{1}{b_3} \varphi_2 + \left\{ F 2 + GJ \left(\frac{1}{b_3} + \frac{1}{b_4} \right) \right\} \varphi_3 - GJ \cdot \frac{1}{b_4} \varphi_4 + G 2 \varphi_T = 0 \\
(5) \text{ 格点 } 4 & \quad m_4 \cdot \frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial t^2} - GJ \cdot \frac{1}{b_4} \varphi_3 + GJ \left(\frac{1}{b_4} + \frac{1}{b_5} \right) \varphi_4 - GJ \cdot \frac{1}{b_5} \varphi_5 = 0 \\
(6) \text{ 格点 } 6 & \quad m_6 \cdot \frac{\partial^2 \varphi_6}{\partial t^2} - GJ \cdot \frac{1}{b_6} \varphi_5 + GJ \left(\frac{1}{b_6} + \frac{1}{b_7} \right) \varphi_6 - GJ \cdot \frac{1}{b_7} \varphi_7 = 0 \\
*(7) \text{ 格点 } 7 & \quad m_7 \cdot \frac{\partial^2 \varphi_7}{\partial t^2} - GJ \cdot \frac{1}{b_7} \varphi_6 + \left\{ F 3 + Gb \left(\frac{1}{b_7} + \frac{1}{b_8} \right) \right\} \varphi_7 - GJ \cdot \frac{1}{b_8} \varphi_8 + G 3 \varphi_T = 0 \\
(8) \text{ 格点 } 8 & \quad m_8 \cdot \frac{\partial^2 \varphi_8}{\partial t^2} - GJ \cdot \frac{1}{b_8} \varphi_7 + GJ \left(\frac{1}{b_8} + \frac{1}{b_9} \right) \varphi_8 - GJ \cdot \frac{1}{b_9} \varphi_9 = 0 \\
(9) \text{ 格点 } 9 & \quad m_9 \cdot \frac{\partial^2 \varphi_9}{\partial t^2} - GJ \cdot \frac{1}{b_9} \varphi_8 + \left\{ F 4 + GJ \left(\frac{1}{b_9} + \frac{1}{b_{10}} \right) \right\} \varphi_9 - GJ \cdot \frac{1}{b_{10}} \varphi_{10} + G 4 \varphi_T = 0
\end{aligned}$$

$$10) \text{ 格点 } 10 \quad m_{10} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_{10}}{\partial t^2} - GJ \cdot \frac{1}{b_{10}} \cdot \varphi_9 + GJ \cdot \left(\frac{1}{b_{10}} + \frac{1}{b_{11}} \right) \varphi_{10} - GJ \cdot \frac{1}{b_{11}} \cdot \varphi_{11} = 0$$

A 型ラーメンの場合に於ける質点に於ける運動方程式については省略する。前記の如く $[M]$, $[K]$ を求めるよりも W/g , m で各方程式を除して, y , θ に関する $[K/M]$ マトリックスを求め, 之の固有値を求めた方が計算は早い。

この場合, マトリックスを対称振動, 逆対称振動に分けて計算する境界条件は, たわみ振動の時点 10 に於いて

(i) 対称振動の場合

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{r=10} = 0; \quad \left(\frac{d^3 y}{dx^3} \right)_{r=10} = 0$$

(ii) 逆対称振動の場合

$$y_{10} = 0; \quad \left(\frac{d^3 y}{dx^3} \right)_{r=10} = 0$$

捩れ振動の時, 点 10 に於いて

(i) 対称振動の場合

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{r=1} = 0$$

(ii) 逆対称振動の場合

$$y_{10} = 0$$

5. 石狩河口橋の固有振動周期計算

石狩河口橋中央径間部分は補剛桁はモノボックス, 主塔は A 型ラーメン, ザイルの配置は図-1 に示される様にカラカサ型の三径間連続の斜張橋である。

固有振動周期計算は電子計算に依り, IBM 1130 を使用して計算した。

5.1 固有振動周期計算のための数値

(A) 撓み, 捩れ振動に共通な数値

- | | | |
|------------------|------------------------------|---------------------------|
| (1) 主 径 間 長 | $L_1 = 160.000 \text{ m}$ | |
| (2) 側 径 間 長 | $L_2 = 64.000 \text{ m}$ | |
| (3) ザイル取付間隔 | $\lambda = 31.000 \text{ m}$ | |
| (4) ザイル取付高 | $h_T = 30.000 \text{ m}$ | |
| (塔脚柱端より) | | |
| (5) ザイル取付高 | $h = 28.000 \text{ m}$ | |
| (補剛桁ザイル取付点より) | | |
| (6) 補剛方集中荷重 | $W_c = 30.000 \text{ t}$ | |
| (ザイル取付点) | | |
| (7) 主 塔 重 量 | $W_T = 50.000 \text{ t}$ | |
| (8) 補剛桁断面二次モーメント | $I = 0.34965 \text{ m}^4$ | |
| (9) ザイル断面積 | $A_1 = 0.030 \text{ m}^2$ | $A_2 = 0.030 \text{ m}^2$ |
| | $A_3 = 0.030 \text{ m}^2$ | $A_4 = 0.030 \text{ m}^2$ |
| (10) Web 間隔 | $2B = 11.350 \text{ m}$ | |

(B) 撓み振動のための数値

$$\text{補剛桁分布死荷重} \quad W = 7.800 \text{ t/m}$$

(C) 捩れ振動のための数値

- | | | |
|----------------------|--------------------------------------|---|
| (1) 補剛桁の捩れ剛性 | $GJ = 6.646 \times 10^6 \text{ m}^4$ | |
| (2) 補剛桁の極慣性モーメント | $m/I = 8.06 \text{ t-sec}^2$ | |
| (3) ザイル取付点集中極慣性モーメント | $m^* = 99.60 \text{ t-m-sec}^2$ | |
| (4) 各格点間に於ける極慣性モーメント | $m_1 = 178.2 \text{ t-m-sec}^2$ | $m_2 = m_4 = m_5 = m_6 = m_8 = 124.9 \text{ t-m-sec}^2$ |

5.3 振動数、固有振動周期

IBM 1130 に依り電算の結果は次の通りである。

- (1) 撓み振動
 - (i) 対称振動の場合

表－3

		固 有 値	円 振 動 数	固 有 振 動 数	固 有 振 動 周 期
1	次	30.159	5.492	0.874	1.144
2	次	181.980	13.490	2.147	0.466
3	次	326.360	18.066	2.875	0.348

- (ii) 逆対称振動の場合

表－4

		固 有 値	円 振 動 数	固 有 振 動 数	固 有 振 動 周 期
1	次	66.680	8.166	1.300	0.769
2	次	223.240	14.941	2.378	0.421
3	次	415.530	20.385	3.244	0.308

- (2) 捩れ振動

- (i) 対称振動の場合

表－5

		固 有 値	円 振 動 数	固 有 振 動 数	固 有 振 動 期 間
1	次	569.190	23.858	3.797	0.263
2	次	1613.500	40.169	6.393	0.156
3	次	3262.500	57.119	9.091	0.110

- (ii) 逆対称振動の場合

表－6

		固 有 値	円 振 動 数	固 有 振 動 数	固 有 振 動 周 期
1	次	1101.300	33.186	5.282	0.189
2	次	2107.600	45.909	7.307	0.137
3	次	3595.100	59.960	9.543	0.105

5.4 電算フロチャート

斜張橋固有振動周期計算のためのプログラムはカラカサ型、ハーブ型のそれぞれについてたわみと捩れ振動を計算するため4種類あり、プログラム1個で図-8に示されている様に対称、逆対称振動を計算する。

固有値計算には Power method を使用し、 π 型ラーメンの場合、精度 0.1×10^6 、演算時間は1ケース約3分、A型ラーメンの場合、精度 0.5×10^5 、1ケース約4分である

参 考 文 献

- 1) 大久保・榎波： 斜張橋の固有振動解析，土木技術資料。
- 2) 栗林・岩崎： 構造物の地震応答解析法，土木技術資料。
- 3) 日本道路公団： 尾道大橋設計計算書。
- 4) 岡本舜三： 建設技術者のための振動学。

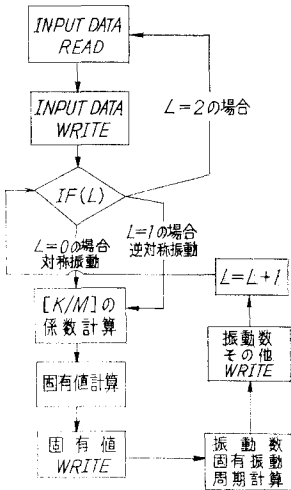


図-8