

変断面部材の水平方向振動について

正員 能 町 純 雄*

正員 松 岡 健 一**

学生員 佐 渡 公 明***

1. ま え が き

高い橋脚上の橋梁が、幅員方向の水平振動を強制される場合、断面重心とせん断中心とが一致していない場合は、曲げ振り振動を生ずる結果となる。この場合、橋体の変断面箱桁であれば、変断面箱桁の曲げ振り振動の固有周期が先ず問題となる。

ここでは、固有振動周期に焦点をあて、この構造を n 区画でそれぞれ、振り剛さ、曲げ振り剛さが異なる箱桁にシミュレートし各分割点断面の回転角 θ_r と曲げ振りモーメント B_r を未知量とする。 θ_r については、 r 点の両区画部分の振りモーメントの釣合い、 B_r については、 θ_r がそこで微分的に連続しているという条件を用いてマトリックスを作成し、物体力トルクが分割点に点トルクとして作用すると仮定して、固有値および固有ベクトルを算出し曲げ振りの振動固有値を求めようとするものである。

2. 変断面箱桁の曲げ振り微分方程式の解析

振り荷重が作用した桁の微分方程式は、次式で表わされる。

$$\dot{B} - GJ_T \dot{\theta} = M_T \quad (1)$$

$$B = EC_w \ddot{\theta} \quad (2)$$

記号は、 B : 曲げ振りモーメント、 GJ_T : 振り剛性、 θ : 振り角、 M_T : 振り荷重、 EC_w : 曲げ振り剛性である。

図-1のように、せん断中心 T を通ってスパン方向を x 軸とし、 y は x についての2回微分である。

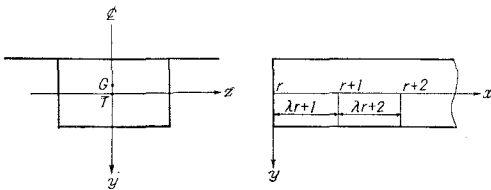


図-1

* 室蘭工業大学 教授 工博

** 室蘭工業大学 助教授 工修

*** 室蘭工業大学大学院

図-1に示した如く、桁を分割して外力振りモーメント M_T は分割点にのみ作用するとする。(1), (2)より θ を消去すれば、

$$\ddot{B} - k^2 B = 0 \quad (3)$$

$$k^2 = GJ_T / EC_w \quad (4)$$

図-1の $r, r+1$ の分割部分に対し、 $x=0$ で $B=B_r$ 、 $x=\lambda_{r+1}$ で $B=B_{r+1}$ の境界条件のもとに(3)式を解くと

$$B = B_r \frac{\sinh k_{r+1}(\lambda_{r+1}-x)}{\sinh k_{r+1}\lambda_{r+1}} + B_{r+1} \frac{\sinh k_{r+1}x}{\sinh k_{r+1}\lambda_{r+1}} \quad (5)$$

(5)式を2重積分すると

$$\begin{aligned} \iint B dx dx &= B_r \frac{1}{k_{r+1}^2} \left[\frac{\sinh k_{r+1}(\lambda_{r+1}-x)}{\sinh k_{r+1}\lambda_{r+1}} - \frac{\lambda_{r+1}-x}{\lambda_{r+1}} \right] \\ &+ B_{r+1} \frac{1}{k_{r+1}^2} \left[\frac{\sinh k_{r+1}x}{\sinh k_{r+1}\lambda_{r+1}} - \frac{x}{\lambda_{r+1}} \right] \\ &+ \bar{B}_r \frac{\lambda_{r+1}-x}{\lambda_{r+1}} + \bar{B}_{r+1} \frac{x}{\lambda_{r+1}} = EC_w \theta \end{aligned} \quad (6)$$

上式の2重 $\bar{}$ は、2重積分を意味している。

例えば $\bar{B}_r$ は、(2)式より

$$\bar{B}_r = \iint B dx dx \Big|_r = EC_w \theta_r \quad (7)$$

次に分割点での曲げ振りモーメントを次式で表わす。

2ケのサフィックスは位置と向きを表わす。

$$\dot{B} - GJ_T \dot{\theta} \Big|_{x=0} = H_{r,r+1} \quad (8)$$

$$\dot{B} - GJ_T \dot{\theta} \Big|_{x=\lambda_{r+1}} = H_{r+1,r} \quad (9)$$

θ の連続条件より

$$\left. \frac{d\theta}{dx} \right)_{r,r+1} = \left. \frac{d\theta}{dx} \right)_{r,r-1} \quad (10)$$

(8), (9)式を階差式で表わせば

$$\frac{\Delta B_r}{\lambda_{r+1}} - GJ_T \frac{\Delta \theta_r}{\lambda_{r+1}} = H_{r,r+1} = H_{r+1,r} \quad (11)$$

$$\Delta B_r \equiv B_{r+1} - B_r, \quad \Delta \theta_r \equiv \theta_{r+1} - \theta_r \quad (12)$$

r 点での振りモーメントの釣合式

$$H_{r,r+1} - H_{r,r-1} - M_{Tr} = 0 \quad (13)$$

に (11), (12) 式を代入して

$$\frac{B_{r+1} - B_r}{\lambda_{r+1}} - \frac{B_r - B_{r-1}}{\lambda_r} - \frac{GJ_{Tr+1}}{\lambda_{r+1}} (\theta_{r+1} - \theta_r) + \frac{GJ_{Tr}}{\lambda_r} (\theta_r - \theta_{r-1}) - M_{Tr} = 0 \quad (14)$$

(6) 式を x で微分して

$$ECw \frac{d\theta}{dx} = -B_r \frac{1}{k_{r+1}} \left[\frac{\cosh k_{r+1}(\lambda_{r+1} - x)}{\sinh k_{r+1} \lambda_{r+1}} - \frac{1}{\lambda_{r+1} k_{r+1}} \right] + B_{r+1} \frac{1}{k_{r+1}} \left[\frac{\cosh k_{r+1} x}{\sinh k_{r+1} \lambda_{r+1}} - \frac{1}{\lambda_{r+1} k_{r+1}} \right] + ECw_{r+1} \frac{(\theta_{r+1} - \theta_r)}{\lambda_{r+1}} \quad (15)$$

これより

$$ECw_{r+1} \left(\frac{d\theta}{dx} \right)_{r,r+1} = -\frac{B_r}{k_{r+1}} \varphi_r(0) + \frac{B_{r+1}}{k_{r+1}} \varphi_r(1) + ECw_{r+1} \frac{(\theta_{r+1} - \theta_r)}{\lambda_{r+1}} \quad (16)$$

$$ECw_{r+1} \left(\frac{d\theta}{dx} \right)_{r+1,r} = -\frac{B_r}{k_{r+1}} \varphi_r(1) + \frac{B_{r+1}}{k_{r+1}} \varphi_r(0) + ECw_{r+1} \frac{(\theta_{r+1} - \theta_r)}{\lambda_{r+1}} \quad (17)$$

但し

$$\varphi_r(0) = \frac{\cosh k_{r+1} \lambda_{r+1}}{\sinh k_{r+1} \lambda_{r+1}} - \frac{1}{k_{r+1} \lambda_{r+1}} \quad (18)$$

$$\varphi_r(1) = \frac{1}{\sinh k_{r+1} \lambda_{r+1}} - \frac{1}{k_{r+1} \lambda_{r+1}} \quad (19)$$

(17) 式より

$$ECw_{r+1} \left(\frac{d\theta}{dx} \right)_{r,r-1} = -\frac{B_{r-1}}{k_r} \varphi_{r-1}(1) + \frac{B_r}{k_r} \varphi_{r-1}(0) + ECw_{r+1} \frac{(\theta_r - \theta_{r-1})}{\lambda_r} \quad (20)$$

(10) 式より (16) = (20) であるから

$$\frac{k_{r+1}}{GJ_{Tr+1}} (B_{r+1} \varphi_r(1) - B_r \varphi_r(0)) - \frac{k_r}{GJ_{Tr}} (B_r \varphi_{r-1}(0) - B_{r-1} \varphi_{r-1}(1)) + \frac{\theta_{r+1} - \theta_r}{\lambda_{r+1}} - \frac{\theta_r - \theta_{r-1}}{\lambda_r} = 0 \quad (21)$$

3. 水平方向の振動方程式

振り振動の慣性モーメント (スパン方向単位長さ当り $-\frac{\gamma}{g} I_p^{++}$) とせん断中心の水平変位による慣性力

$$-\frac{\gamma A}{g} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\omega + e\theta) = -\frac{\gamma A}{g} (\ddot{\omega} + e \ddot{\theta})$$

を、静荷重におきかえると

$$M_T = -\frac{\gamma}{g} I_p^{++} \ddot{\theta} - \frac{\gamma A}{g} (\ddot{\omega} + e \ddot{\theta}) \quad (22)$$

ここで、 γ : 単位体積重量、 A : 断面積、 g : 重力加速度、 I_p : 断面 2 次極モーメント、 ω : せん断中心の水平変位、 e : 重心とせん断中心との距離。

記号 $++$ は、時間 t についての 2 回微分である。

今、正弦振動を仮定して、 p を角速度とすれば、

$$\theta(x, t) = \sin pt \times \theta(x) \quad (23)$$

$$\omega(x, t) = \sin pt \times \omega(x) \quad (24)$$

$$B(x, t) = \sin pt \times B(x) \quad (25)$$

(22) 式は

$$M_{Tr} = p^2 \sin pt \left\{ \frac{\gamma I_{pr}}{g} \ddot{\theta}_r + \frac{\gamma A_r}{g} (\ddot{\omega}_r + e_r \ddot{\theta}_r) \right\} \quad (26)$$

(26) を (14) に代入して

$$\frac{B_{r+1}}{\lambda_{r+1}} - \left(\frac{1}{\lambda_{r+1}} + \frac{1}{\lambda_r} \right) B_r + \frac{B_{r-1}}{\lambda_r} - \frac{GJ_{Tr+1}}{\lambda_{r+1}} \theta_{r+1} + \left(\frac{GJ_{Tr+1}}{\lambda_{r+1}} + \frac{GJ_{Tr}}{\lambda_r} \right) \theta_r - \frac{GJ_{Tr}}{\lambda_r} \theta_{r-1} - \frac{\gamma p^2}{g} (I_{pr} + e_r^2 A_r) \theta_r - \frac{\gamma p^2}{g} e_r A_r \omega_r = 0 \quad (27)$$

水平変位に対する振動方程式は、曲げ振動の場合と同様に考えて

$$EI_{yr} \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} \Big|_r = -\frac{\gamma A_r}{g} (\ddot{\omega}_r + e_r \ddot{\theta}_r) \quad (28)$$

階差式で表わすと

$$\omega_{r+2} - 4\omega_{r+1} + \left(6 - \frac{\lambda^4 \gamma A_r}{g EI_{yr}} p^2 \right) \omega_r - 4\omega_{r-1} + \omega_{r-2} - \frac{\gamma A_r e_r}{g EI_{yr}} p^2 \theta_r = 0 \quad (29)$$

以上 (21), (27), (29) 式で $\{B\}$, $\{\omega\}$ を消去すれば、振りと水平変位による合成振動に対する固有マトリックスが求められる。

なお (29) 式で、 ω_r を y_r に、 I_{yr} を I_{zr} に置き換えれば、(29) 式は曲げ振動方程式となるので (21), (27), (29) は桁の曲げ振り合成振動方程式となる。

今、簡単のため、水平変位が無いと仮定したときの固有マトリックスを求めてみる。

(27) 式で $\omega_r = 0$ とすれば

$$\frac{B_{r+1}}{\lambda_{r+1} (I_{pr} + e_r^2 A_r)} - \left(\frac{1}{\lambda_{r+1}} + \frac{1}{\lambda_r} \right) \frac{B_r}{(I_{pr} + e_r^2 A_r)} + \frac{B_{r-1}}{\lambda_r (I_{pr} + e_r^2 A_r)} - \frac{GJ_{Tr+1} \theta_{r+1}}{\lambda_{r+1} (I_{pr} + e_r^2 A_r)} + \left(\frac{GJ_{Tr+1}}{\lambda_{r+1}} + \frac{GJ_{Tr}}{\lambda_r} \right) \frac{\theta_r}{(I_{pr} + e_r^2 A_r)} - \frac{GJ_{Tr} \theta_{r-1}}{\lambda_r (I_{pr} + e_r^2 A_r)} - \frac{\gamma p^2}{g} \theta_r = 0 \quad (30)$$

(21), (30) をマトリックス表示すれば

$$\mathbf{A} \{B\} + \mathbf{B} \{\theta\} = 0 \quad (31)$$

$$\mathbf{C} \{B\} + \mathbf{D} \{\theta\} - \mathbf{X} \mathbf{E} \{\theta\} = 0 \quad (32)$$

$$\text{ここに } \{B\} = \begin{Bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ \vdots \\ B_n \end{Bmatrix} \quad \{\theta\} = \begin{Bmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_n \end{Bmatrix} \quad \mathbf{X} = \frac{\gamma}{g} p^2$$

係数マトリックス $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ は次頁に示す。

$$A = \begin{pmatrix} k_1\varphi_n(1) & -\left(\frac{k_2\varphi_1(0)}{GJr_2} + \frac{k_1\varphi_n(0)}{GJr_1}\right) & \frac{k_2\varphi_1(1)}{GJr_2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{k_2\varphi_1(1)}{GJr_2} & -\left(\frac{k_3\varphi_2(0)}{GJr_3} + \frac{k_2\varphi_1(0)}{GJr_2}\right) & \frac{k_3\varphi_2(1)}{GJr_3} & \cdots & 0 \\ & 0 & \frac{k_3\varphi_2(1)}{GJr_3} & \cdots & \cdots & 0 \\ & & & & \frac{k_n\varphi_{n-1}(0)}{GJr_n} + \frac{k_{n-1}\varphi_{n-2}(0)}{GJr_{n-1}} & \frac{k_n\varphi_{n-1}(1)}{GJr_n} \\ & & & & \frac{k_n\varphi_{n-1}(1)}{GJr_n} & \frac{k_{n+1}\varphi_n(0)}{GJr_{n+1}} + \frac{k_n\varphi_{n-1}(0)}{GJr_n} \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$R = \left(\begin{array}{cccccccc} \frac{1}{\lambda_1}, & -\left(\frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_1}\right), & \frac{1}{\lambda_2}, & 0, & \dots, & 0 \\ 0, & \frac{1}{\lambda_2}, & -\left(\frac{1}{\lambda_3} + \frac{1}{\lambda_2}\right), & \frac{1}{\lambda_3}, & \dots, & 0 \\ & 0, & \frac{1}{\lambda_3}, & \dots, & \dots, & 0 \\ & & & & & & & \frac{1}{\lambda_n} \\ & & & & & & & -\left(\frac{1}{\lambda_{n+1}} + \frac{1}{\lambda_n}\right) \\ & & & & & & & 0 \end{array} \right)$$

[illegible]

$$B = \left(\begin{array}{ccccccc} -\frac{GJm}{\lambda_1(p_1 + e_1^2 \lambda_1)}, & \left(\frac{GJr_2}{\lambda_2} + \frac{GJm}{\lambda_1} \right) \frac{1}{(lp_1 + e_1^2 \lambda_1)}, & -\frac{GJr_2}{\lambda_2(lp_1 + e_1^2 \lambda_1)}, & 0, & \dots, & 0 \\ 0, & -\frac{GJm^2}{\lambda_2(lp_2 + e_2^2 \lambda_2)}, & \left(\frac{GJr_3}{\lambda_3} + \frac{GJr_2}{\lambda_2} \right) \frac{1}{(lp_2 + e_2^2 \lambda_2)}, & -\frac{GJr_3}{\lambda_3(lp_2 + e_2^2 \lambda_2)}, & \dots, & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0, & \dots, & 0, & \dots, & 0, & \dots, & 0 \end{array} \right)$$

(31)式より $\{B\} = -A^{-1}B\{\theta\}$ これを(32)に代入して

$$\{-CA^{-1}B + D - XE\} \{\theta\} = 0 \tag{33}$$

よって固有マトリックスは

$$-CA^{-1}B + D - XE = 0 \tag{34}$$

これより、桁両端における境界条件を考慮して、固有値 X および固有ベクトルを求めることができる。

$\nearrow \theta_0 = 0, \quad \dot{\theta}_0 = 0 \tag{35}$

$\dot{\theta}_0 = 0$ は、(16)式より

$$-B_0 \frac{\varphi_0(0)}{k_1} + B_1 \frac{\varphi_0(1)}{k_1} + EC_{w1} \frac{\theta_1}{\lambda} = 0 \tag{36}$$

これらの境界条件を、マトリックス A, B, C, D に入れ(34)式の固有マトリックスを計算すると、

4. 数値計算例

図-2に示した上姫川橋 (PRC ラーメン箱桁橋) の中央径間を例にとって試算してみる。

対称な中央径間を 12 等分して、中央径間両端を固定支承と仮定した。断面諸元等を表-1 に示す。この表で断面諸元のサフィックスは、分割区間 $r-1, r$ の平均値をとり、サフィックス r を付した。

固定端での境界条件は $\nearrow$

(1) 対称振動に対し

$$\left(\begin{array}{cccccc} 0.828417-X & -0.358969 & 0.040264 & -0.004759 & 0.000653 & -0.000100 \\ -0.466109 & 0.657666-X & -0.293585 & 0.037521 & -0.005169 & 0.000799 \\ 0.066379 & -0.372733 & 0.534712-X & -0.251947 & 0.038017 & -0.005858 \\ -0.009172 & 0.055668 & -0.294442 & 0.442829-X & -0.230487 & 0.038949 \\ 0.001392 & -0.008452 & 0.048966 & -0.255658 & 0.410660-X & -0.226923 \\ -0.000426 & 0.002592 & -0.015020 & 0.086815 & -0.411977 & 0.391101-X \end{array} \right)$$

(2) 逆対称振動に対し

$$\left(\begin{array}{cccccc} 0.828415-X & -0.358968 & 0.040264 & -0.004755 & 0.000633 & -0.000092 \\ -0.466109 & 0.657660-X & -0.293567 & 0.037461 & -0.004984 & 0.000743 \\ 0.066375 & -0.372722 & 0.534012-X & -0.251547 & 0.036658 & -0.005470 \\ -0.009162 & 0.055605 & -0.294081 & 0.440744-X & -0.222570 & 0.036960 \\ 0.001326 & -0.008046 & 0.046603 & -0.242022 & 0.358902-X & -0.171648 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.308324-X \end{array} \right)$$

ここに $X = \frac{\tilde{\gamma} \lambda}{gG} p^2$

表-1

分 割 点	0	1	2	3	4	5	6
A_r (m)	5.9045	5.2125	4.5160	3.9806	3.6204	3.4594	
e_r (m)	0.6648	0.4811	0.2950	0.1499	0.0213	0.0555	
I_{pr} (m ⁴)	30.925	24.620	19.949	17.310	16.000	15.603	
J_{Tr} (m ⁴)	10.822	6.9744	4.1360	2.6058	1.9220	1.7306	
C_{wr} (m ⁶)	3.0305	2.3442	1.6568	1.1905	0.9866	0.9546	

$E=324 \text{ t/cm}^2 \quad G=141 \text{ t/cm}^2 \quad \gamma=2500 \text{ kg/m}^3 \quad \lambda=4\text{m}$

(1), (2)のマトリックスより固有値 X を求め、固有振動周期 T' および固有振数 f を 5 次まで示すと以下の様である。

(1 次) $T=0.0369 \text{ sec} \quad f= 27.12 \text{ cycle/sec}$

(2 次) $T=0.0218 \text{ sec} \quad f= 45.92 \text{ cycle/sec}$

(3 次) $T=0.0153 \text{ sec} \quad f= 65.51 \text{ cycle/sec}$

(4 次) $T=0.0117 \text{ sec} \quad f= 85.50 \text{ cycle/sec}$

(5 次) $T=0.0094 \text{ sec} \quad f=106.62 \text{ cycle/sec}$

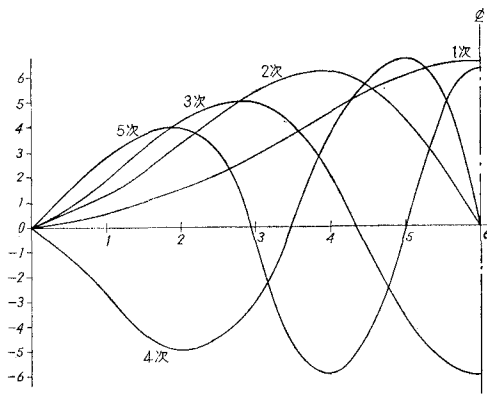


図-3 固有振動モード

5次までの振動モードを図-3に示す。

5. あとがき

変断面箱桁を n 区画に分け、1区画毎に振り剛性と曲げ

振り剛性の異なる要素として各要素の弾性性状は、曲げ振りの厳密解で処理し、慣性力のみを集中力として各分割点に作用させて断面のせん断中心に関する回転振動を求める方法で、数値計算例としては、上姫川橋の各諸元を用いて両端が固定された場合として解析した。

固有振動周期は、約 0.04 秒で實際上問題となる値ではないが、両端が弾性固定の場合どのように固有振動周期が変わるかという問題が残るが、これは次の課題としたい。

この研究は、文部省科学研究費の補助を受けたものであることを附記する。

参考文献

- 1) 工業振動学：S. チモシェンコ。
- 2) 上姫川橋設計計算書：函館開発建設部