

# 多質点系の非線型振動応答の研究

正員 渡 辺 昇\*  
 学生員 ○石 井 紘\*\*

## 1. ま え が き

大地震のもとで構造物が弾塑性振動をする場合、その非線型振動方程式は、ラーメン構造物等のセン断振動系については容易にたてられるが、高橋脚、タワー、煙突等、振動が曲げに支配される振動系に於いては簡単にはたてられない。その理由は復元力機構がセン断振動系では隣接する質点間のみの相対変位に依存するのに比べて、曲げ振動系では隣接しない質点間の変位が復元力に影響を及ぼすためである。このため曲げ振動系の多質点系地震応答解析に使用されている剛性係数(バネ定数)  $k_{jk}$  に非線型特性を挿入して解析をすることは非常に困難である。本研究においては各質点間の相対変位に対する復元力が平行四辺形の履歴曲線を描くと仮定してその非線型振動方程式を導いた。数値計算例としては長泥橋の橋脚を二質点系とし入力に SIN 波を 1.2 秒間入れ応答を計算してみた。又弾性応答とどの程度差異があるかを比較してみた。

## 2. 多質点非線型振動方程式の導入

### 2-1 復元力特性の仮定

各質点間の相対変位  $\bar{x}_i$  に対してバネ定数  $k_{jk}$  によって生ずる復元力の仮定は図-1 のような平行四辺形とした。

図-1 を式で表わすと、

- a)  $0 \rightarrow A \quad \dot{x}_i > 0 \quad f_{jk}(\bar{x}_i) = k_{jk} \bar{x}_i$
- b)  $E \rightarrow B \quad \dot{x}_i > 0 \quad f_{jk}(\bar{x}_i) = (1-n)k_{jk} \bar{x}_i + nk_{jk} \bar{x}_y$
- c)  $B \rightarrow C \quad \dot{x}_i > 0 \quad f_{jk}(\bar{x}_i) = k_{jk} \bar{x}_i - nk_{jk}(\bar{x}_y + \bar{x}_0)$
- d)  $C \rightarrow D \quad \dot{x}_i < 0 \quad f_{jk}(\bar{x}_i) = k_{jk} \bar{x}_i + nk_{jk}(\bar{x}_y - \bar{x}_0)$
- e)  $D \rightarrow E \quad \dot{x}_i < 0 \quad f_{jk}(\bar{x}_i) = (1-n)k_{jk} \bar{x}_i - nk_{jk} \bar{x}_y$

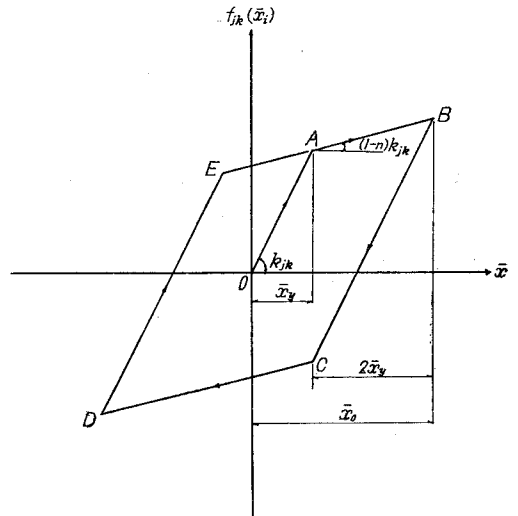
a), b), c), d), e) のような 1 次式となりこれをまとめると、

$$f_{jk}(\bar{x}_i) = (1-n)k_{jk} \bar{x}_i \pm nk_{jk}(\bar{x}_y \mp \bar{x}_0) \quad (1)$$

となる。

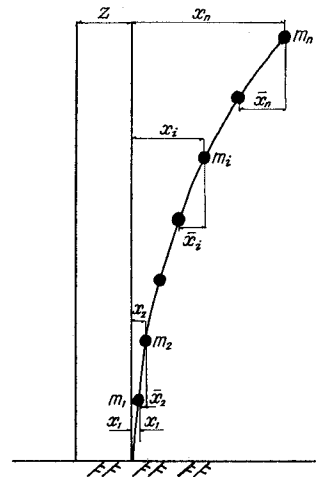
### 2-2 多質点系において線型振動方程式から非線型振動方程式を導く過程

図-2 のような  $n$  質点系振動モデルにおいて、まず各質点の変位  $x_i$  を各質点間の相対変位  $\bar{x}_i$  で表わすと、



$\bar{x}_y$ : 降伏変位,  $k_{jk}$ : 初期バネ定数,  $n$ : 弾塑性傾斜率 ( $n=0$  弾性,  $n=1$  完全塑性,  $0 < n < 1$  双一次),  $\bar{x}_0$ : 速度が 0 になる点の変位

図-1 復元力特性



$\bar{x}_i$ :  $i-1$  と  $i$  質点間の相対変位,  $x_i$ :  $i$  質点の変位,  $z$ : 地動変位,  $m_i$ :  $i$  質点の質量

図-2  $n$  質点系振動モデル

\* 北海道大学教授 工博

\*\* 北海道大学大学院

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \bar{x}_1 \\ x_2 &= \bar{x}_1 + \bar{x}_2 \\ &\vdots \\ x_i &= \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \cdots + \bar{x}_i \\ &\vdots \\ x_n &= \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \cdots + \bar{x}_i + \cdots + \bar{x}_n \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式となる。

又  $n$  質点系の線型振動方程式は

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + C_{11} \dot{x}_1 + C_{12} \dot{x}_2 + \cdots + C_{1n} \dot{x}_n + k_{11} x_1 \\ + k_{12} x_2 + \cdots + k_{1n} x_n &= -m_1 \ddot{z}, \\ m_2 \ddot{x}_2 + C_{21} \dot{x}_1 + C_{22} \dot{x}_2 + \cdots + C_{2n} \dot{x}_n + k_{21} x_1 \\ + k_{22} x_2 + \cdots + k_{2n} x_n &= -m_2 \ddot{z}, \\ &\vdots \\ m_n \ddot{x}_n + C_{n1} \dot{x}_1 + C_{n2} \dot{x}_2 + \cdots + C_{nn} \dot{x}_n + k_{n1} x_1 \\ + k_{n2} x_2 + \cdots + k_{nn} x_n &= -m_n \ddot{z}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

となる。

ここで復元力の項だけを取り出して式(2)を代入すると、第1質点に対する復元力  $F_1(\bar{x}_1)$  は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} F_1(\bar{x}_i) &= k_{11} x_1 + k_{12} x_2 + \cdots + k_{1i} x_i + \cdots + k_{1n} x_n \\ &= k_{11} \bar{x}_1 + k_{12} (\bar{x}_1 + \bar{x}_2) + \cdots + k_{1i} (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \cdots \\ &\quad + \bar{x}_i) + k_{1n} (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \cdots + \bar{x}_i + \cdots + \bar{x}_n) \\ &= f_{11}(\bar{x}_1) + f_{12}(\bar{x}_1) + f_{12}(\bar{x}_2) + \cdots + f_{1i}(\bar{x}_i) \\ &\quad + \cdots + f_{1n}(\bar{x}_1) + f_{1n}(\bar{x}_n) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

同様に第  $n$  質点に対する復元力  $F_n(\bar{x}_i)$  は

$$F_n(\bar{x}_i) = f_{n1}(\bar{x}_1) + f_{n2}(\bar{x}_1) + f_{n2}(\bar{x}_2) + \cdots + f_{ni}(\bar{x}_i) + \cdots + f_{nn}(\bar{x}_n)$$

で表わされる。

式(4)に式(1)で求めた履歴曲線を描く場合の復元力の式  $f_{jk}(\bar{x}_i)$  の項を代入し、改めて  $F_n(\bar{x}_i)$  とおくと

$$\left. \begin{aligned} F_1(\bar{x}_i) &= (1-n) k_{11} \bar{x}_1 \pm n k_{11} (\bar{x}_y \mp \bar{x}_0) \\ &\quad + (1-n) k_{12} \bar{x}_1 \pm n k_{12} (\bar{x}_y \mp \bar{x}_0) + \cdots \\ &\quad + (1-n) k_{1n} \bar{x}_n \pm n k_{1n} (\bar{x}_y \mp \bar{x}_0) \\ F_2(\bar{x}_i) &= (1-n) k_{21} \bar{x}_1 \pm n k_{21} (\bar{x}_y \mp \bar{x}_0) \\ &\quad + (1-n) k_{22} \bar{x}_1 \pm n k_{22} (\bar{x}_y \mp \bar{x}_0) + \cdots \\ &\quad + (1-n) k_{2n} \bar{x}_n \pm n k_{2n} (\bar{x}_y \mp \bar{x}_0), \\ &\vdots \\ F_n(\bar{x}_i) &= (1-n) k_{n1} \bar{x}_1 \pm n k_{n1} (\bar{x}_y \mp \bar{x}_0) \\ &\quad + (1-n) k_{n2} \bar{x}_1 \pm n k_{n2} (\bar{x}_y \mp \bar{x}_0) \\ &\quad + (1-n) k_{n2} \bar{x}_2 \pm n k_{n2} (\bar{x}_y \mp \bar{x}_0) + \cdots \\ &\quad + (1-n) k_{nn} \bar{x}_n \pm n k_{nn} (\bar{x}_y \mp \bar{x}_0). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

となり、非線型振動方程式の非線型項となる復元力が式(5)で計算される。

そこで、多質点線型振動方程式(3)の復元力を表わす項に式(5)で表わされる  $F_n(\bar{x}_i)$  を代入すると

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + C_{11} \dot{x}_1 + C_{12} \dot{x}_2 + \cdots \\ + C_{1n} \dot{x}_n + F_1(\bar{x}_i) &= -m_1 \ddot{z}, \\ m_2 \ddot{x}_2 + C_{21} \dot{x}_1 + C_{22} \dot{x}_2 + \cdots \\ + C_{2n} \dot{x}_n + F_2(\bar{x}_i) &= -m_2 \ddot{z}, \\ &\vdots \\ m_n \ddot{x}_n + C_{n1} \dot{x}_1 + C_{n2} \dot{x}_2 + \cdots \\ + C_{nn} \dot{x}_n + F_n(\bar{x}_i) &= -m_n \ddot{z}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

マトリックス表示すれば(6)式は

$$[m] \{\ddot{x}\} + [C] \{\dot{x}\} + \{F(\bar{x})\} = -[m] \{\ddot{z}\} \quad (7)$$

となり非線型項  $\{F(\bar{x}_i)\}$  を含む多質点非線型振動方程式が得られた。

ここで、

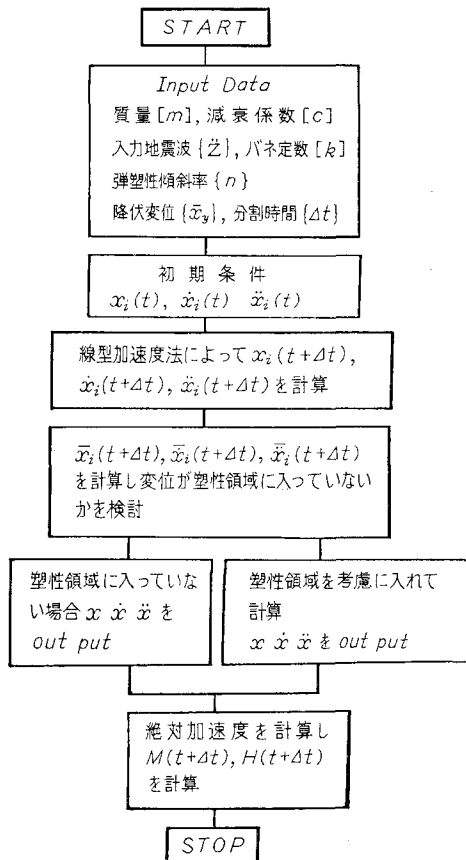
$$[m] = \begin{pmatrix} m_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & m_2 & \vdots \\ & m_3 & \ddots \\ 0 & \cdots & m_n \end{pmatrix}, \quad [C] = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ C_{n1} & \cdots & & C_{nn} \end{pmatrix},$$

$$\{F(\bar{x})\} = \begin{pmatrix} F_1(\bar{x}_i) \\ F_2(\bar{x}_i) \\ \vdots \\ F_n(\bar{x}_i) \end{pmatrix}$$

である。

### 2-3 線型加速度法<sup>1)</sup>

一般に振動方程式を解く場合モーダルアナリシス及びスペクトル図を用いる方法が広く適用されているが、式(6)或いは式(7)のように非線型項を含んでいる場合は適用出来ない。そこで本研究においては線型加速度法と呼ばれている。



図—3 デジタルコンピューターによるフローチャート

一種の数値計算法を用いたが、それは時刻  $t$  で  $i$  番目の質点の変位  $x_i$ 、速度  $\dot{x}_i$ 、加速度  $\ddot{x}_i$  が既知な微小時間  $\Delta t$  後、即ち  $t + \Delta t$  時刻における  $x_i$ 、 $\dot{x}_i$ 、 $\ddot{x}_i$  が次式で求められる方法である。

$$\left. \begin{aligned} x_i(t + \Delta t) &= x_i(t) + \Delta t \dot{x}_i(t) + \Delta t^2 \\ &\quad / 6 (2\ddot{x}_i(t) + \ddot{x}_i(t + \Delta t)), \\ \dot{x}_i(t + \Delta t) &= \dot{x}_i(t) + \Delta t / 2 (\ddot{x}_i(t) + \ddot{x}_i(t + \Delta t)), \\ \ddot{x}_i(t + \Delta t) &= -1/m_i (C_{i1}\dot{x}_1 + \\ &\quad C_{i2}\dot{x}_2 + \dots + C_{in}\dot{x}_n + F_i(\bar{x}_i + \dot{x}_i)) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

ここで、 $\ddot{x}_i(t + \Delta t) = 2\ddot{x}_i(t) - \ddot{x}_i(t - \Delta t)$  である。 $\ddot{x}_i(t + \Delta t)$  が求まったならば絶対加速度は  $\ddot{x}_i(t + \Delta t) + \dot{x}_i$  で求まる。

又根本のセン断力と曲げモーメントの応答は

$$\left. \begin{aligned} H(t + \Delta t) &= m_1(\ddot{x}_1(t + \Delta t) + \dot{x}_1) + m_2(\ddot{x}_2(t + \Delta t) \\ &\quad + \dot{x}_2) + \dots + (m_n(\ddot{x}_n(t + \Delta t) + \dot{x}_n)), \\ M(t + \Delta t) &= m_1 d_1(\ddot{x}_1(t + \Delta t) + \dot{x}_1) + m_2 d_2(\ddot{x}_2(t \\ &\quad + \Delta t) + \dot{x}_2) + \dots + m_n d_n(\ddot{x}_n(t + \Delta t) + \dot{x}_n). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

で求まることになる。

図-3 にデジタルコンピューターによるフローチャートを示す。

### 3. 数値計算例

図-4 のように、長泥橋の橋脚を 2 質点と仮定して数値計算を行なった。

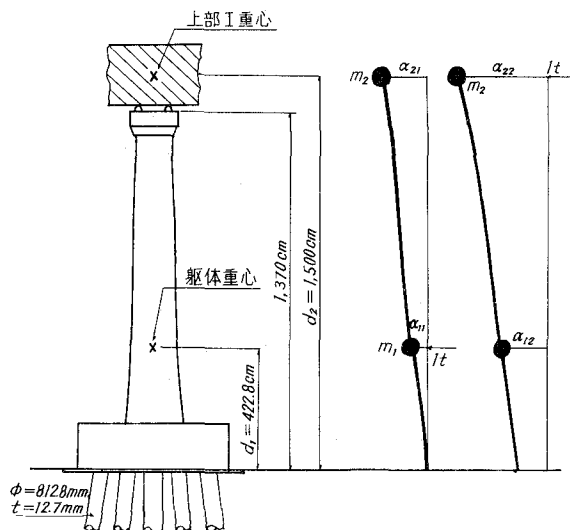


図-4 長泥橋橋脚

諸数値<sup>2)</sup> は次の通りである (表-1)。

地震波は図-5 に示すような  $T_0 = 0.6 \text{ sec}$ ,  $\ddot{z}_{\max} = 130 \text{ gal}$  の SIN 波を 1.2 sec を入力として解析を行なった。

さらに降伏変位  $\bar{x}_i$  は  $m_1$  に対して 1.0 cm,  $m_2$  に対して 2.55 cm, 弾塑性傾斜率  $n$  は  $m_1$ ,  $m_2$  に対して一定とそれぞれ仮定して 2-3 で説明した線型加速度法で応答を算出

表-1

バネ定数:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 8.7 \times 10^{-2} & 25.1 \times 10^{-3} \\ 25.1 \times 10^{-3} & 86.0 \times 10^{-3} \end{bmatrix}^{-1} \quad (\text{cm/ton})$$

$$= \begin{bmatrix} 728 \times 10^3 & -212 \times 10^3 \\ -212 \times 10^3 & 74 \times 10^3 \end{bmatrix} \quad (\text{kg/cm})$$

減衰係数:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23.7 \times 10^3 & -6.96 \times 10^3 \\ -6.96 \times 10^3 & 2.43 \times 10^3 \end{bmatrix} \quad (\text{kg} \cdot \text{sec/cm})$$

質量:

$$m_1 = 658.6 \text{ kg} \cdot \text{sec}^2/\text{cm} \quad m_2 = 333.4 \text{ kg} \cdot \text{sec}^2/\text{cm}$$

重量:

$$W_1 = 645,420 \text{ kg} \quad W_2 = 326,720 \text{ kg}$$

降伏変位:

$$\bar{x}_1 = 1.0 \text{ cm} \quad \bar{x}_2 = 2.55 \text{ cm}$$

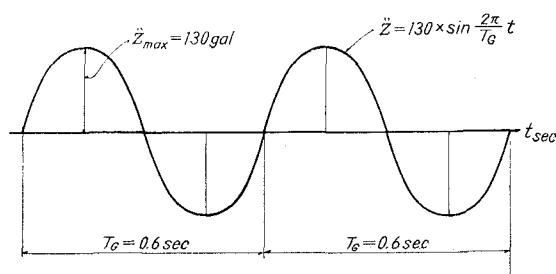


図-5 入力としての SIN 波

した。

その結果を図-6 に応答変位図、図-7 に応答絶対加速度図、図-8 に応答曲げモーメント図、図-9 に応答セン断力図を弾性的場合と弾塑性の場合で  $n = 0.5$  の双一次型,  $n = 1.0$  の完全塑性型の 3 種を比較して図示した。

### 4. 従来の震度法による計算

$\ddot{z}_{\max} = 130 \text{ gal}$  であったから、水平震度は 0.13 となる。したがって

$$\begin{aligned} M &= 0.13 W_1 d_1 + 0.13 W_2 d_2 \\ &= 0.13 (645420 \times 422.8 + 326720 \times 1500) \\ &= 0.13 \times 7.63 \times 10^8 = 9.92 \times 10^7 \text{ kg} \cdot \text{cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H &= 0.13 (W_1 + W_2) = 0.13 (645420 + 326720) \\ &= 0.13 \times 972.14 \times 10^3 = 126.4 \times 10^3 \text{ kg} \end{aligned}$$

### 5. 考 察

長泥橋橋脚に  $T_0 = 0.6 \text{ sec}$ ,  $\ddot{z}_{\max} = 130 \text{ gal}$  の SIN 波が地震として入ってきた場合、橋脚躯体の根本には表-2 に示すような、水平ずれセン断力  $H_{\max}$ 、転倒モーメント  $M_{\max}$  が生ずる。

又各質点には変位  $x_{1\max}$ ,  $x_{2\max}$  が生ずる。

これによると変位の最大値は線型、非線型ほぼ同じ値を

表-2

|       | 計算方法                  | $x_{\max}$<br>(cm)       | $M_{\max}$<br>(kg·cm) | $H_{\max}$<br>(kg)  |
|-------|-----------------------|--------------------------|-----------------------|---------------------|
| 線型振動  | 直接積分による値              | $x_1=1.36$<br>$x_2=4.78$ | $9.02 \times 10^7$    | $77.53 \times 10^3$ |
|       | 線型加速度法による値            | $x_1=1.38$<br>$x_2=4.83$ | $9.24 \times 10^7$    | $78.70 \times 10^3$ |
| 静的計算  | 従来の震度法<br>(水平震度 0.13) | $x_1=1.79$<br>$x_2=5.76$ | $9.92 \times 10^7$    | $126.4 \times 10^3$ |
| 非線型振動 | 弾塑性傾斜率<br>$n=0.5$ の場合 | $x_1=1.43$<br>$x_2=4.69$ | $7.95 \times 10^7$    | $78.70 \times 10^3$ |
|       | 弾塑性傾斜率<br>$n=1.0$ の場合 | $x_1=1.55$<br>$x_2=4.68$ | $7.58 \times 10^7$    | $78.70 \times 10^3$ |

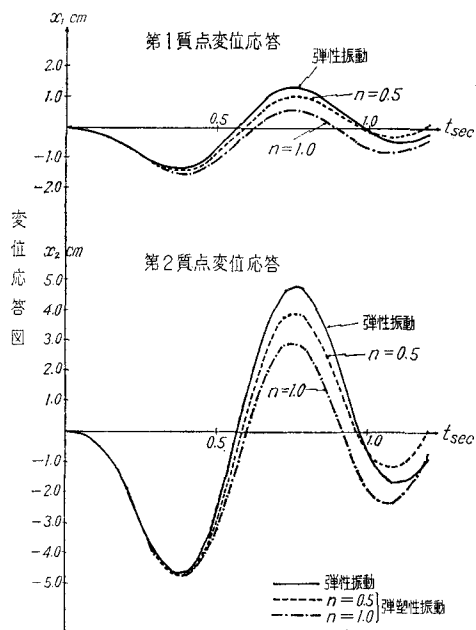


図-6

示すが、転倒モーメントになると非線型それも  $n=1.0$  の完全塑性に近づく程値が小さくなってゆく。

セン断力の最大値が線型、非線型同じ値となっているのは、セン断力の応答においてその最大となる時刻がいまだ塑性領域に入らないうちに生ずるからで、もしこれが塑性領域に入った後生ずるなら当然、非線型振動の方が値は小さくなる。

## 6. あとがき

転倒モーメント、セン断力の応答は図-8、図-9からよくわかるように変位が塑性領域に入ると線型振動の場合より

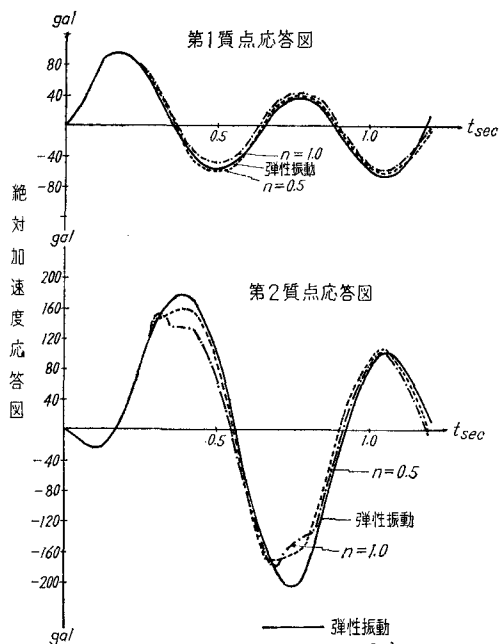


図-7

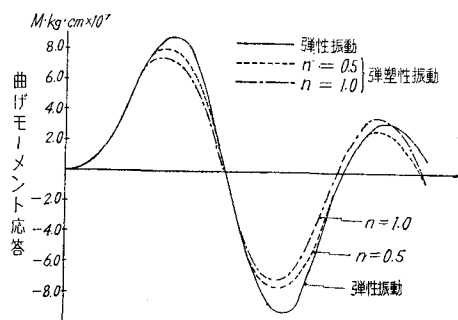


図-8

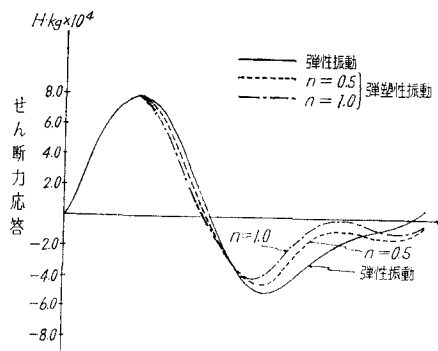


図-9

応答の値が小さくなっている。

これは復元力が履歴曲線を描く場合は履歴減衰が作用しているからで、結局、このような非線型振動方程式を解く

場合、変位が弾性領域から塑性領域に移る時、減衰係数を幾分増加させて計算すればよいと思う。

又、入力として架橋地点においての実際の地震波形を用いたり、基礎のロッキング性を考慮して解析すればより以上厳密な値が得られるのは当然であろう。

#### 参 考 文 献

- 1) 小高昭夫：耐震構造の総合研究 I, 宇野書店.
- 2) 渡辺 昇：長泥橋の地震応答解析, 橋梁と基礎, 1967. 6.
- 3) 田治見宏：建築振動学, コロナ社.
- 4) 栗林・岩崎・小山田：構造物の地震応答解析法, 土木研究所.
- 5) 土木学会耐震委員会：第 10 回地震工学研究発表会講演.
- 6) 渡辺・多田・川口：高橋脚とタワーの地震応答解析 (昭和 43 年北海道支部研究発表論文集).
- 7) 岡本舜三：地震力を考えた構造物設計法, オーム社.
- 8) 渡辺・石井：橋脚の非線型振動応答解析について (第 9 回日本道路会議一般文集, 昭和 44 年).