

初期曲率を有する平板の曲げについて

正員 奥村 勇*

要 旨

相対する二辺に一樣な周方向圧縮力を受けた小さな初期単一曲率を有する平板を、浅い薄肉円筒部分殻とみなして、偏平円筒殻の理論により Navier-type の解を求めたので報告します。

微小変形理論および唯一の非線形項を考慮した有限変形理論により変位と応力を求め、その結果を比較検討した。

1. 緒 言

初期曲率を有する平板の大たわみおよび局部座屈の研究には、K. Marguerre (1938) によって誘導された基本式にもとづいた、J. M. Coan (1951) および N. Yamaki (1959) 等のものであるが、いずれも初期曲率が二重曲率の場合についてである。

本文で取り扱う初期曲率を有する平板は単一曲率の場合であり、また、外力を受ける端辺に自由な変位（一樣な変位ではなく）を許す点において従来の研究とは異なっている。単一曲率の場合には、初期形状が円筒の一部分を形成するので、偏平円筒部分殻の曲げ理論を適用するのが好都合に思われる。

偏平殻の理論は曲面関数 $Z=f(x, y)$ の偏微分係数の二乗 $(\partial f/\partial x)^2$, $(\partial f/\partial y)^2$ および $(\partial f/\partial x) \cdot (\partial f/\partial y)$ を単位値に比較して無視することにより、殻の中央面における応力とそれを投影した $x-y$ 面における応力との差を無視するという仮定に基づいている。この仮定は $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y \leq 1/8$ の場合には十分に正確であることが E. Reissner (1955) によ

て報告されている。

円筒部分殻の解法には、接線方向の力の釣合を考える際にせん断力の項を無視した、L. H. Donnell (1934) の式あるいは V. Z. Vlasov (1949) によるひずみ-応力関数を用いる解法など種々あるが、本文では非線形項をも考慮する関係で Airy の応力関数およびたわみについての 4 階の連立偏微分方程式を用いることにする。

計算例として、Fig. 1 に示した相対する二辺に一樣な周方向圧縮力を受けた、周辺単純支持の円筒部分殻におけるたわみ、端変位および応力分布を求めて図示した。

2. 基本微分方程式

平板の初期たわみを $w_0(x, y)$ 、荷重による附加的たわみを $w(x, y)$ とすると、K. Marguerre の初期曲率を有する平板の大たわみの基本式は次の様に表わされる。

$$\left. \begin{aligned} F^4 w &= \frac{1}{D} \left[p + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 (w+w_0)}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right. \\ &\quad \times \left. \frac{\partial^2 (w+w_0)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (w+w_0)}{\partial y^2} \right] \\ F^4 F &= Eh \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right. \\ &\quad \times \left. \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここで、 F , D および h はそれぞれ Airy の応力関数、板の曲げ剛性および板厚を表わす。

Fig. 1 の偏平円筒部分殻の中央面の曲率半径を a とすると、曲面関数 $z=w_0(x, y)$ は

$$w_0(x, y) = H \left[\frac{y}{(b/2)} \right]^2 \quad (2)$$

となる。中央ライズ H と曲率半径 a との関係は

$$a^2 = (b/2)^2 + (a-H)^2 \quad (3)$$

と表わされるが、 $H \ll a$ の場合には近似的に

$$2aH \cong (b/2)^2 \quad (4)$$

となるので、曲面関数の偏微分係数

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = \frac{1}{a}, \quad \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} = 0 \quad (5)$$

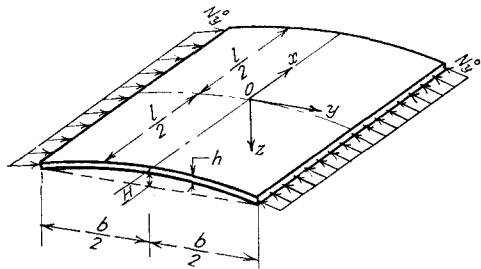


Fig. 1. Rectangular plate with small initial curvature under edge compression.

* 北海道大学工学部 助手 工修

を式(1)に代入して、 $(\partial^2 F / \partial x^2) [\partial^2 (w + w_0) / \partial y^2]$ 以外の非線形項を省略すると、基本微分方程式が次の様に得られる。

$$\nabla^4 w = \frac{1}{D} \left[\frac{1}{a} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (6a)$$

$$\nabla^4 F = Eh \left[-\frac{1}{a} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \quad (6b)$$

3. 応力、ひずみおよび変位

Fig. 2 より直応力 N_x , N_y およびせん断応力 N_{xy} は

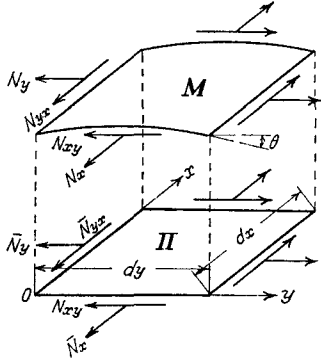


Fig. 2. Element of middle surface M and its projection on a plane II .

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \bar{N}_x \cos \theta = \frac{\bar{N}_x}{\sqrt{1 + (\partial w_0 / \partial y)^2}} \\ N_y &= \bar{N}_y / \cos \theta = \bar{N}_y \sqrt{1 + (\partial w_0 / \partial y)^2} \\ N_{xy} &= \bar{N}_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

となるが、偏平殻の仮定により、 $(\partial w_0 / \partial y)^2 = 0$ とすると次式を得る。

直応力およびせん断応力

$$\left. \begin{aligned} N_x &\cong \bar{N}_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \\ N_y &\cong \bar{N}_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \\ N_{xy} &= \bar{N}_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

曲げモーメントおよびねじりモーメント

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ M_{xy} &= -M_{yx} = D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

直ひずみおよびせん断ひずみ

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{hE} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) \\ \epsilon_y &= \frac{1}{hE} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) \\ \gamma_{xy} &= -\frac{2(1 + \nu)}{hE} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

変位 u および v

次式を満足する変位関数 Φ

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{h} (N_x + N_y) = \frac{1}{h} \nabla^2 F \\ \nabla^2 \Phi &= \frac{Eh}{a} \frac{\partial}{\partial x} \left[\int w dy \right] \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

を導入すると次の様に表わされる。

$$\left. \begin{aligned} 2Gu &= -\frac{1}{h} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{h(1 + \nu)} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ 2Gv &= -\frac{1}{h} \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{1}{h(1 + \nu)} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ &\quad + \frac{2G}{a} \int w dy \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

ここで

$$G = E/2(1 + \nu) \quad (13)$$

4. 微分方程式の解

境界条件

$$x = \pm \frac{l}{2}; \quad \left. \begin{aligned} w &= 0, \quad M_x = 0, \\ N_x &= 0, \quad v = 0 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$y = \pm \frac{b}{2}; \quad \left. \begin{aligned} w &= 0, \quad M_y = 0, \\ N_y &= -N_y^0, \quad u = 0 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

境界条件式(14)および(15)を満足する w の解および F の特殊積分 F_1 として次式

$$w = \sum_{m=1,3}^{\infty} \sum_{n=1,3}^{\infty} b_{mn} \cos Mx \cos Ny \quad (16)$$

$$F_1 = \frac{Eh}{a} \sum_{m=1,3}^{\infty} \sum_{n=1,3}^{\infty} c_{mn} \cos Mx \cos Ny \quad (17)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} M &= m\pi/l, \quad N = n\pi/b \\ c_{mn} &= \frac{M^2}{(M^2 + N^2)^2} b_{mn}, \quad m, n = 1, 3, \dots \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

を採用すると、これらは式(6b)および式(14), (15)の最初の二式も満足する。

F の一般解を

$$F = -\frac{N_y^0}{2} x^2 + F_1 + F_2 \quad (19)$$

として、式(6b), (14)および式(15)に代入すると

$$\nabla^4 F_2 = 0 \quad (20)$$

$$x = \pm \frac{l}{2}; \quad \frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2} = 0, \quad (1 + \nu) \frac{\partial F_2}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (21)$$

$$\left. \begin{aligned} y &= \pm \frac{b}{2}; \quad \frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2} = 0, \quad (1 + \nu) \left[\frac{\partial F_2}{\partial x} - N_y^0 x \right] \\ &= \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

が得られる。式(20)に $F_2 = e^{iMx} e^{iNy}$ を代入して得られる

特性方程式を m および n について解き、実数部を重ね合わせるにより余関数 F'_2 は次式となる。

$$F'_2 = F'_c + F'_{c'} \quad (23)$$

ここで

$$F'_c = \frac{Eh}{a} \sum_m \left[(A_m + My B_m) \cosh My + (My C_m + D_m) \sinh My \right] \cos Mx$$

$$F'_{c'} = \frac{Eh}{a} \sum_n \left[(Nx A_n + B_n) \cosh Nx + (C_n + Nx D_n) \sinh Nx \right] \cos Ny$$

F が x および y に関して偶関数であることに留意する

と上式より F_2 は結局次式で与えられる。

$$F_2 = \frac{Eh}{a} \sum_m \left[A_m \cosh My + My C_m \sinh My \right] \cos Mx + \frac{Eh}{a} \sum_n \left[B_n \cosh Nx + Nx D_n \sinh Nx \right] \cos Ny \quad (24)$$

上式の未知定数 A_m, C_m, B_n および D_n は式 (21) および式 (22) より決定される。式 (21), (22) の最初の条件より

$$\left. \begin{aligned} B_n &= -D_n \cdot \frac{Nl}{2} \tanh \frac{Nl}{2} \\ A_m &= -C_m \cdot \frac{Mb}{2} \tanh \frac{Mb}{2} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

が得られる。上式を式 (24) に代入して書き直すと

$$F_2 = \frac{Eh}{a} \sum_m C_m \left[-\frac{Mb}{2} \tanh \frac{Mb}{2} \cosh My + My \sinh My \right] \cos Mx + \frac{Eh}{a} \sum_n D_n \left[-\frac{Nl}{2} \tanh \frac{Nl}{2} \cosh Nx + Nx \sinh Nx \right] \cos Ny \quad (26)$$

が得られる。したがって、式 (16), (18) および上式により変位関数 ϕ は次式

$$\phi = -\frac{Eh}{a} \sum_m \sum_n \frac{1}{MN} (M^2 + N^2) C_{mn} \sin Mx \sin Ny - N_y^0 xy + \frac{2Eh}{a} \sum_m C_m \sinh My \sin Mx + \frac{2Eh}{a} \sum_n D_n \sinh Nx \sin Ny \quad (27)$$

となる。式 (21) および式 (22) の残りの条件より

$$\left. \begin{aligned} \frac{2Eh}{a} \sum_n ND_n \cosh \frac{Nl}{2} \sin Ny &= N_y^0 y \\ \frac{2Eh}{a} \sum_n MC_m \cosh \frac{Mb}{2} \sin Mx &= -N_y^0 x \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

を得る。上式の右辺をフーリエ級数に展開して D_n および C_m を求めると次式

$$\left. \begin{aligned} C_m &= -\frac{2aN_y}{Eh} \cdot \frac{\nu(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{lM^3 \cosh(Mb/2)} \\ D_n &= \frac{2aN_y^0}{Eh} \cdot \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{bN^3 \cosh(Nl/2)} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

となり、 F_2 の未知定数は決定された。後での取り扱いを容易にするために、

$$C_m \left[-\frac{Mb}{2} \tanh \frac{Mb}{2} \cosh My + My \sinh My \right] = \sum_n d_{mn} \cos Ny \quad (30)$$

$$D_n \left[-\frac{Nl}{2} \tanh \frac{Nl}{2} \cosh Nx + Nx \sinh Nx \right] = \sum_m e_{mn} \cos Mx \quad (31)$$

と展開すると、フーリエ係数 d_{mn} および e_{mn} はそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} d_{mn} &= -C_m \cdot \frac{8M^2N \cosh(Mb/2)}{b(M^2 + N^2)^2} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \\ e_{mn} &= -D_n \cdot \frac{8MN^2 \cosh(Nl/2)}{l(M^2 + N^2)^2} (-1)^{\frac{m-1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

となる。したがって、式 (19) は次式のように表わされる

$$F = -\frac{N_y^0}{2} x^2 + \frac{Eh}{a} \sum_m \sum_n f_{mn} \cos Mx \cos Ny \quad (33)$$

ここで

$$f_{mn} = c_{mn} + d_{mn} + e_{mn} \\ = \frac{M^2 b_{mn}}{(M^2 + N^2)^2} + \frac{16N_y^0 a}{Eh} \cdot \frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}} (M^2 - \nu N^2)}{MNbl(M^2 + N^2)^2} \quad (34)$$

式(33), (16)を式(6a)に代入して次式を得る

$$L[F, w] \equiv \frac{N_y^0}{a} + \sum_m \sum_n \left[D(M^2 + N^2)^2 b_{mn} + \frac{Eh}{a^2} \right. \\ \left. \times M^2 f_{mn} - N_y^0 N^2 b_{mn} \right] \cos Mx \cos Ny \\ - \frac{Eh}{4a} \sum_p \sum_q g_{pq} \cos Px \cos Qy = 0 \quad (35)$$

ここで

$$P = p\pi/l, \quad Q = q\pi/b, \quad p, q = 0, 2, \dots \quad (35a)$$

$$g_{pv} = \sum_m^{p-1} \sum_n^{q-1} n^2 (p-m)^2 b_{mn} f_{p-m, q-n} \\ + \sum_m^{\infty} \sum_n^{q-1} n^2 (p+m)^2 b_{mn} f_{p+m, q-n} \\ + \sum_m^{\infty} \sum_n^{q-1} m^2 n^2 b_{p+m, n} f_{m, q-n}$$

$$\frac{D\pi^4}{16\delta b^2} (\delta^2 r^2 + s^2)^2 b'rs - \frac{N_y^0 b^2}{a\pi^2 \delta rs} (-1)^{\frac{r+s}{2}} + \frac{Eh\pi^2 \delta}{16a^2} r^2 f'rs - \frac{N_y^0 \pi^2}{16\delta} s^2 b'rs \\ + \frac{Eh\delta^2 \pi^2 rs}{4ab^2} (-1)^{\frac{r+s}{2}} \sum_p^{r+s} \sum_q^{2m} \frac{(-1)^{\frac{p+q}{2}}}{(p^2 - r^2)(q^2 - s^2)} g_{pq} = 0$$

となる。上式に式(34)を代入し, h で除して整頓すると次の様になる

$$\frac{\pi^4}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{h}{b} \right)^2 t^2 b'rs - \frac{16N_y^0}{Eh\pi^2} \left(\frac{b^2}{ah} \right) \frac{(-1)^{\frac{r+s}{2}}}{rs} - \frac{N_y^0 \pi^2}{Eh} s^2 b'rs + \left(\frac{b}{a} \right)^2 \frac{\delta^2 r^2}{t^2} \left[\delta^2 r^2 b'rs \right. \\ \left. + \frac{16N_y^0}{Eh\pi^2} \left(\frac{a}{h} \right) \frac{(-1)^{\frac{r+s}{2}}}{rs} (\delta^2 r^2 - \nu s^2) \right] + 4\delta^2 rs (-1)^{\frac{r+s}{2}} \sum_p^{r+s} \sum_q^{2m} \frac{(-1)^{\frac{p+q}{2}}}{(p^2 - r^2)(q^2 - s^2)} \left(\frac{\pi^2 g_{pq}}{ab^2 h} \right) = 0 \quad (37)$$

ここで

$$t = \delta^2 r^2 + s^2, \quad b'rs = b'rs/h, \quad \delta = b/l \quad (37a)$$

さらに

$$\lambda = \frac{N_y^0}{Eh\pi^2} \left(\frac{l}{h} \right)^2 \quad (38)$$

を導入して, 式(37)を書き直すと

$$\frac{\pi^4}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{h}{b} \right)^2 t^2 b'rs + \left(\frac{b}{a} \right)^2 \frac{\delta^4 r^4}{t^2} b'rs - \lambda \cdot \pi^4 \left(\frac{h}{l} \right)^2 s^2 b'rs + 4\delta^2 rs (-1)^{\frac{r+s}{2}} \sum_p^{r+s} \sum_q^{2m} \frac{(-1)^{\frac{p+p}{2}}}{(p^2 - r^2)(q^2 - s^2)} \\ \times \left(\frac{\pi^2 g_{pq}}{ab^2 h} \right) = 16\delta^2 \left(\frac{h}{a} \right) \frac{(-1)^{\frac{r+s}{2}}}{rs} \left[1 - \frac{\delta^2 r^2 (\delta^2 r^2 - \nu s^2)}{(\delta^2 r^2 + s^2)^2} \right] \lambda \quad (39)$$

が得られる。線形理論の場合には, 上式の左辺の最後の項を省略して $b'rs$ が次式の形で求められる²⁾。

$$b'rs = \frac{16\delta^2 \left(\frac{h}{a} \right) \frac{(-1)^{\frac{r+s}{2}}}{rs} \left[1 - \frac{\delta^2 r^2 (\delta^2 r^2 - \nu s^2)}{(\delta^2 r^2 + s^2)^2} \right] \lambda}{\frac{\pi^4}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{h}{b} \right)^2 t^2 - \lambda \cdot \pi^4 \left(\frac{h}{l} \right)^2 s^2 + \left(\frac{b}{a} \right)^2 \frac{\delta^4 r^4}{t^2}} \quad (40)$$

上式の分母を零とおいて, λ に式(38)を代入して書き直すと次式を得る

$$\frac{N_y^0}{h} = \frac{E\pi^2}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{h}{b} \right)^2 \frac{(\delta^2 r^2 + s^2)^2}{s^2} + \left(\frac{b}{a} \right)^2 \frac{\delta^4 r^4}{\pi^2 (\delta^2 r^2 + s^2)^2 s^2} \quad (41)$$

上式で曲率半径 $a \rightarrow \infty$ とすると

$$+ \sum_m^{p-1} \sum_n^{\infty} n^2 (p-m)^2 b_{mn} f_{p-m, q+n} \\ + \sum_m^{p-1} \sum_n^{\infty} (n+q)^2 (p-m)^2 b_{m, n+q} f_{p-m, n} \\ + \sum_m^{\infty} \sum_n^{\infty} n^2 (m+p)^2 b_{mn} f_{p+m, q+n} \\ + \sum_m^{\infty} \sum_n^{\infty} (n+q)^2 (p+m)^2 b_{m, n+q} f_{p+m, n} \\ + \sum_m^{\infty} \sum_n^{\infty} m^2 n^2 b_{p+m, n} f_{m, q+n} \\ + \sum_m^{\infty} \sum_n^{\infty} m^2 (n+q)^2 b_{p+m, q+n} f_{mn} \quad (35b)$$

式(35)に含まれる未知定数 b_{mn} を求めるために Galerkin の方法を適用する。すなわち

$$\int_0^{l/2} \int_0^{b/2} L[F, w] \cos Rx \cos Sy = 0 \quad (36)$$

ここで

$$R = r\pi/l, \quad S = s\pi/b, \quad r, s = 1, 3, \dots \quad (36a)$$

式(36)より

$$\frac{N_y^0}{h} = \frac{E\pi^2}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{h}{b}\right)^2 \frac{(\partial^2 \gamma^2 + s^2)^2}{s^2} \quad (42)$$

となり、平板の座屈荷重を与える式に一致する。

式 (39) は b_{mn} の二乗の項を含む連立方程式となり、これを各々の λ に対して数値計算し、たわみおよび応力関数が決定される。

5. 計 算 例

数値計算例として、中央ライズ $H=0.4h$ 、ポアソン比 $\nu=0.30$ 、 $\delta=(b/l)=1.0$ 、 $(h/a)=5.0 \cdot 10^{-4}$

$(b/a)=0.04$ の諸量を持った、Fig. 1 の初期曲率を有する平板について、たわみ w 、端変位 u 、 v および直応力 N_x 、 N_y の分布を求めた。

$m=1, 3$ および $n=1, 3$ としてたわみ関数を

$$w = b_{11} \cos \frac{\pi x}{l} \cos \frac{\pi y}{b} + b_{13} \cos \frac{\pi x}{l} \cos \frac{3\pi y}{b} + b_{31} \cos \frac{3\pi x}{l} \cos \frac{\pi y}{b} + b_{33} \cos \frac{3\pi x}{l} \cos \frac{3\pi y}{b}$$

と表わすと式 (35 b) から g_{pq} は次のようになる。

$$\begin{cases} g_{00} = 10^{-4} [b'_{11}(1.25b'_{11}-4.375\lambda) + 9b'_{13}(0.05b'_{13}-0.1416667\lambda) + 9b'_{31}(0.45b'_{31} \\ \quad + 0.725\lambda) + 81b'_{33}(0.1388889b'_{33}-0.0540123\lambda)] \\ g_{02} = 10^{-4} [b'_{11}(0.05b'_{13}+1.25b'_{11}-4.5166667\lambda) + 9b'_{13}(1.25b'_{11}-4.375\lambda) + 9b'_{31}(0.45b'_{31} \\ \quad + 0.1388889b'_{33}+0.6709878\lambda) + 81b'_{33}(0.45b'_{31}+0.725\lambda)] \\ \vdots \\ g_{66} = 10^{-4} [81b'_{33}(0.138889b'_{33}-0.0540123\lambda)] \end{cases}$$

式 (39) において $r=s=1$ とおき、上式を代入して整頓すると

$$\begin{aligned} & 8.888889b'_{11}{}^2 - b'_{11}[59.7515665 - 130.030913\lambda - 16.071111b'_{13} - 7.5377777b'_{31} - 3.5555555b'_{33}] \\ & + b'_{13}[2.4685714b'_{13} + 10.3822221b'_{31} + 12.8365714b'_{33} - 51.0902771\lambda] \\ & + b'_{31}[22.2171428b'_{31} + 41.3622855b'_{33} + 28.99843\lambda] \\ & + b'_{33}[47.6081636b'_{33} + 33.3166038\lambda] = 66\lambda \end{aligned}$$

が得られる。同様な式が $rs=13, 31$ および 33 とおくことによって得られる。それを各々の λ に対して解くと、たわみの係数は Table 1 の様に求められる。

$y=0$ の断面において、 l を 8 分割した各点におけるたわ

Table 1. Values of deflection coefficients b_{mn}

λ	$-b_{11}/h$	b_{13}/h	$-b_{31}/h$	$-b_{33}/h$
0.366	1.1176	0.01421	0.00528	0.00067
0.275	0.6219	0.00829	0.00187	0.00049
0.183	0.3135	0.00485	0.00029	0.00031
0.0915	0.1236	0.00199	-0.00017	0.00015
0	0	0	0	0

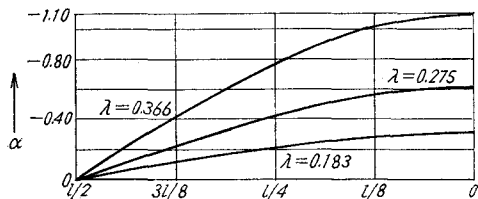


Fig. 3. Deflection curves at the $y=0$ section by non-linear theory $w=ah$, $\nu=0.30$.

み w の計算結果を Fig. 3 に示す。また、線形理論によった場合のたわみ曲線を Fig. 4 に示す。Fig. 5 には非線形理論と線形理論とにより、 λ の 5 個の値に対して求めた板

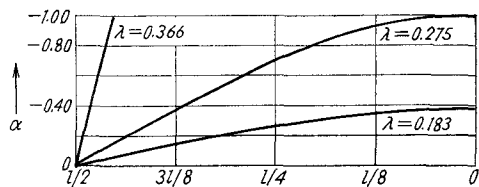


Fig. 4. Deflection curves at the $y=0$ section by linear theory $w=ah$, $\nu=3.0$.

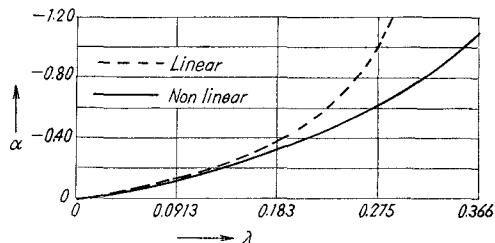


Fig. 5. Comparison between the deflection by non-linear theory and by linear theory $w=ah$, $\nu=0.30$.

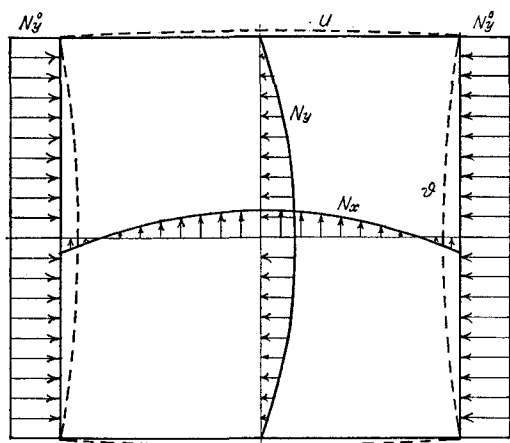


Fig. 6. Direct stress distributions and edge displacements by non-linear theory $\lambda=0.366$.

中央点のたわみを示す。

Fig. 3~Fig. 5 の λ は式 (38) から得られる値であり、 $\lambda=0.366$ ($\nu=0.30$) は一方向圧縮の正方形板の座屈値に対応する。Fig. 4 の線形理論による $\lambda=0.366$ の場合のたわみ曲線は、尺度の関係で図示されていないが、有限値を取り、板中央点で $w_c = -6.03h$ となる。

Fig. 5 に示した線形理論と一つの非線形項を考慮した非線形理論とによる板中央点の λ に対するたわみの曲線は、 $\lambda \leq 0.183$ の範囲において大凡一致している。

Table 1 によりたわみの係数が決定されたので、式 (18) の C_{mn} が求められる。したがって、式 (19), (8) から直応力およびせん断応力が求められる。また、軸方向変位 u および接線方向変位 v は式 (12) から求められる。

Fig. 6 には、非線形理論により求めた、 $\lambda=0.366$ に対する直応力 $[N_x]_{x=0}$, $[N_y]_{y=0}$ の分布および端変位 $[u]_{x=\pm l/2}$, $[v]_{y=\pm b/2}$ の分布を示す。

Fig. 6 によると、 $x=0$ の断面における軸方向直応力 N_x がかなり大きな値を示している。このことは、たわみが引張応力に寄与するためである。たわみが大きくなると N_x は大きくなり、逆に N_y は小さくなる。 $y=\pm b/2$ における N_x は一定値 $N_y^0 = -0.30N_y^0$ となり、圧縮応力である。

6. 結 語

平板の線形理論によると、初期たわみを持った矩形板の

一方向圧縮の座屈現象は、たわみについての式で、たわみが無限大となるような N_y^0 すなわち式 (42) から求められる N_y^0 をもって座屈値としている。式 (42) で正方形板として、 $r=s=1$ とすると $(N_y^0/h) = (E\pi^2/3(1-\nu^2)(h/b)^2)$ すなわち、式 (38) から $\nu=0.30$ の場合には $\lambda=0.366$ が得られる。

一方、扁平殻の理論によると、線形理論による場合でも式 (41) に示される様に曲率半径を含む項が存在するため $\lambda=0.366$ としても、たわみは有限値となる。このことは一見、曲率の存在が座屈荷重を増加させる様に思われるがさらに詳しい研究をまたねばならない。軸方向圧縮の場合には、曲率の影響が座屈荷重の増加に寄与することは、S. Timoshenko³⁾ によって報告されている。

Fig. 5 に示した様に、線形理論と非線形理論とによる板中央点のたわみの曲線は、 $\lambda \leq 0.183$ の範囲ではほぼ一致している。このことは、線形理論が微小変形の仮定に基づいていることから考えて、至極当然の結果ではあるが、小さな λ の値、換言すると、小さな N_y^0/Eh の場合には、もちろん中央ライズ H の大きさも関係するが、線形理論でも十分満足すべき結果が得られることを示すと考えられる。

Fig. 6 に示した直応力の分布から考えて、 λ が大きくなるに従い N_x もかなり大きくなることがわかる。したがって、座屈荷重の決定には、式 (6a) および (6b) で省略した非線形項をも考慮した有限変形理論を忠実に踏襲することにより得られた、荷重—たわみ曲線、荷重—ひずみ曲線あるいは荷重—ひずみ差曲線等による方法が考えられる。

終りに、本研究に関して種々の御助言を賜った北海道大学の酒井忠明教授に深謝の意を表する次第であります。

参 考 文 献

- 1) N. Yamaki: "Postbuckling Behaviour of Rectangular Plates with small Initial Curvature Loaded in Edge Compression". Journal of Appl. Mech., September, 1959, pp. 407-414.
- 2) 奥村 勇: "扁平円筒部分殻の解析について". 第 19 回応用力学連合講演会論文抄録集, 昭和 44 年 10 月 3 日, pp. 207-208.
- 3) S. Timoshenko and J. Gere: "Theory of Elastic Stability". 2nd Ed., Kōgakusha, pp. 485-487.
- 4) 坪井善勝: "曲面構造, シェルの理論とその応用". 丸善, 昭和 40 年, pp. 153-160.