土木学会北海道支部　研究発表論文集　昭和 44 年度

Green 関数の扇形平板の曲げへの応用について

正 員 ○芳　村　　仁*
正 員 本　多　祐　也**

はしがき

平板構造は土木，建築をはじめ多くの分野で用いられる構造要素でありその研究も数多くある。著者も扇形平板の曲げについてその研究成果を発表[1]してきたが板に作用する荷重が部分分布荷重とか放射方向の線荷重については未だ発表していなかった。この論文は平板の特異解（Green 関数）の応用により主として線荷重による曲げの問題を解析したものである。

1. 概　　説

平板の曲げの問題は 4 階の偏微分方程式となりその境界値問題を解くことにより解が得られる。偏微分方程式の境界値問題を解く有力な方法の一つに Green 関数による方法がある。平板については円板の曲げの問題に応用した例が発表されている[2]。しかし扇形平板の曲げの問題へ応用した研究はまだないので以下これについて述べ，数値計算例も示す。

2. 解　　法

平板の曲げの微分方程式は極座標を採用すると次式で与えられる。

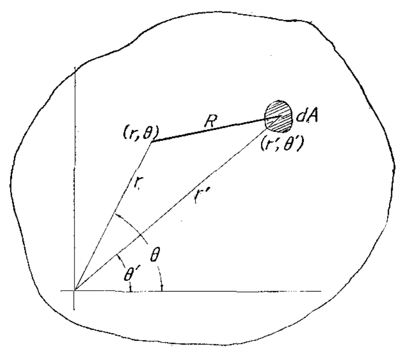
$$\left.\begin{aligned} &\Delta\Delta w(r,\theta)=\frac{q(r,\theta)}{D}\\ &\text{ここで}\\ &\Delta=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta^2}\\ &D=\text{板の曲げ剛性}\\ &\quad=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\\ &\nu=\text{ポアソン比}\\ &E=\text{弾性係数}\\ &w=\text{たわみ}\\ &q(r,\theta)=\text{分布している荷重強度} \end{aligned}\right\}\quad (1)$$

方程式 (1) の特異解すなわち Green 関数の主要解は

$$\frac{1}{8\pi D}R^2\log R \qquad (2)$$

で与えられる[3]ので特解 w_p は次式のようになる。

$$\left.\begin{aligned} &w_p=\frac{1}{8\pi}\iint_{(A)}R^2\log R\frac{q(r',\theta')}{D}dA\\ &\text{ここで}\\ &(r',\theta')=dA\text{ の座標}\\ &\quad R=(r,\theta)\text{ と }(r',\theta')\text{ との距離}\\ &\quad\ =\left[r^2+r'^2-2rr'\cos(\theta-\theta')\right]^{\frac{1}{2}}\\ &\quad A=\text{平板の領域} \end{aligned}\right\}\quad (3)$$



図—1

この特解と方程式 (1) の同次方程式の解 $w_c(r,\theta)$ を重ね合せて扇形平板の曲げの解を求めることができる。

$w_c(r,\theta)$ として次のものを採る。

$$w_c(r,\theta)=\sum_m(A_mr^m+B_mr^{-m}+C_mr^{m+2}+D_mr^{-m+2})\cos m\theta \qquad (4)$$

従って (1) の解 $w(r,\theta)$ は

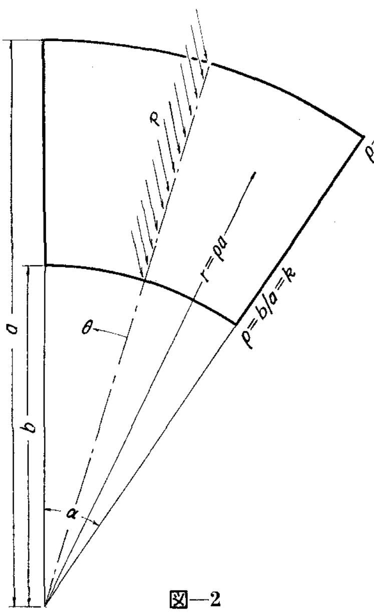
$$w(r,\theta)=w_p+w_c \qquad (5)$$

で与えられる。

3. 放射方向の線荷重を担う扇形平板の曲げ

式 (5) の中の w_p は (3) 式で与えられるがこれを求める際積分の計算が必要である。今の場合 図-2 のような線荷重の場合を扱うのであるからこの積分の中 θ に関するものは $\theta=0$（載荷点）でのみ有限な荷重強度 p でありあとの領域

* 北海道大学工学部　助教授
** 北海学園大学工学部　助教授



図—2

では 0 であるのでこの積分に当っては Dirac の δ 関数を使用する。δ 関数とは次の性質を有するものである[4]。

$$\left.\begin{array}{ll}\text{(i)} & x \neq 0 \text{ に対し } \quad \delta(x)=0 \\ \text{(ii)} & \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,dx = 1 \\ \text{(iii)} & \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot\delta(x)\,dx = f(0) \\ \text{(iv)} & \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot\delta(x-a)\,dx = f(a)\end{array}\right\} \qquad (6)$$

従って図-2 の場合の特解は線荷重の大きさを $p(r)$ とすると $q(r,\theta)$ は

$$q(r,\theta) = p(r)\cdot\delta(\theta) \qquad (7)$$

と表わすことができる。ここで $\delta(\theta)$ は (6) の性質を有する Dirac の δ 関数である。

$$R = \left[r'^2+r^2-2rr'\cos(\theta-\theta')\right]^{\frac{1}{2}}$$

であるので w_p は

$$\begin{aligned} w_p &= \frac{1}{8\pi D}\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}}\int_b^a \left\{r^2+r'^2-2rr'\cos(\theta-\theta')\right\} \\ &\quad \times \log\left\{r^2+r'^2-2rr'\cos(\theta-\theta')\right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \times p(r')\cdot\delta(\theta')\,dr'\cdot r'\cdot d\theta' \\ &= \frac{1}{16\pi D}\int_b^a p(r')(r^2+r'^2-2rr'\cos\theta) \\ &\quad \times \log(r^2+r'^2-2rr'\cos\theta)\,dr' \\ &= \frac{1}{16\pi D}\int_b^a f(r',\theta')\,dr' \qquad (8)\end{aligned}$$

となる。

ここに

$$\begin{aligned} f(r',\theta') &= p(r')(r^2+r'^2-2rr'\cos\theta) \\ &\quad \times \log(r^2+r'^2-2rr'\cos\theta)\end{aligned}$$

まず $f(r',\theta')$ を θ についてフーリェ級数に展開する。

$b<r'<r$ の場合には $r'/r=\xi<1$ であり

$$\begin{aligned} r^2+r'^2-2rr'\cos\theta &= r^2(1-\xi\cdot e^{i\theta})\cdot(1-\xi\cdot e^{-i\theta}) \\ &= r^2\left\{(1+\xi^2)-2\xi\cos\theta\right\}\end{aligned}$$

$$\log(r^2+r'^2-2rr'\cos\theta) = 2\left(\log r - \sum_m \frac{\xi^m}{m}\cos m\theta\right)^{5)}$$

$$\begin{aligned} \therefore\quad & (r^2+r'^2-2rr'\cos\theta)\cdot\log(r^2+r'^2-2rr'\cos\theta) \\ &= 2r^2\Big\{(1+\xi^2)\log r-(1+\xi^2)\xi\cos\theta-2\xi\cdot\log r\cos\theta \\ &\quad + 2\xi^2\cos^2\theta - \frac{\xi^2}{2}(1+\xi^2)\cos 2\theta+\xi^3\cos\theta\cdot\cos 2\theta \\ &\quad - \frac{\xi^3}{3}(1+\xi^2)\cos 3\theta + \frac{2}{3}\xi^4\cos\theta\cdot\cos 3\theta \\ &\quad - \frac{\xi^4}{4}(1+\xi^2)\cos 4\theta + \frac{1}{2}\xi^5\cos\theta\cdot\cos 4\theta \\ &\quad - \frac{\xi^5}{5}(1+\xi^2)\cos 5\theta + \frac{2}{5}\xi^6\cos\theta\cdot\cos 5\theta \cdots\cdots \qquad (9)\end{aligned}$$

となり次のようにかくことができる。

$$f(r',\theta) = 2r^2 p(r')\left[K_0+\sum_m K_m\cos m\theta\right] \qquad (10)$$

また

$r<r'<a$ の場合すなわち $\dfrac{r}{r'}=\dfrac{1}{\xi}=\xi'<1$ の場合は

$$f(r',\theta) = 2r'^2 p(r')\left[L_0+\sum_m L_m\cos m\theta\right] \qquad (11)$$

ここで無次元化した量を用いるため $r=\rho a$, $r'=\rho' a$ とおくと $m\geqq 2$ に対し

$$\left.\begin{aligned} K_m &= \frac{1}{m(m^2-1)}\cdot\frac{\rho'^m}{\rho^m}\left\{m+1-(m-1)\frac{\rho'^2}{\rho^2}\right\} \\ L_m &= \frac{1}{m(m^2-1)}\cdot\frac{\rho^m}{\rho'^m}\left\{m+1-(m-1)\frac{\rho^2}{\rho'^2}\right\}\end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

である。(10), (11) 式を (8) 式に代入して

$$\int_b^a f(r',\theta')\,dr' \to \int_k^1 f(\rho',\theta')\,d\rho'$$

を $p(r)=p=\mathrm{const}$ の場合について計算し扇形平板の中心角 α を半周期とするフーリェ級数展開を

$$\left.\begin{array}{l} w_p = \dfrac{2}{\alpha}\displaystyle\sum_\beta \frac{p}{8D}\cdot\gamma_\beta(\rho)\cdot\cos\beta\cdot\theta \\ \text{ここで} \\ \beta = \dfrac{n\pi}{\alpha}, \quad n=1,2,3\cdots\cdots, \quad \alpha = \text{中心角}\end{array}\right\} \qquad (13)$$

の形で表わすと $\gamma_\beta(\rho)$ の値は $\beta\geq 4$ に対し

$$\begin{aligned} \gamma_\beta(\rho) &= \frac{a^3}{\beta(\beta^2-1)}\left\{\frac{8\beta}{(\beta^2-9)}\rho^3\right. \\ &\quad \left.-\rho^\beta\left(\frac{\beta+1}{\beta-3}-\rho^2\right)-k^{\beta+1}\cdot\rho^{-\beta}\left(\rho^2-\frac{\beta-1}{\beta+3}k^2\right)\right\}\end{aligned}$$

となる。なお $\beta<4$ に対しては例えば

$$\gamma_{\beta=3}(\rho)=\frac{a^3}{72}\left\{\rho^3(3\rho^2-1)\right.$$
$$\left.-12\rho^3\log\rho+k^4\rho^{-1}(k^2\rho^{-2}-3)\right\}$$
$$\gamma_{\beta=2}(\rho)=\frac{a^3}{30}\left\{\rho^2(5\rho^2-16\rho+15)+k^3(k^2\rho^{-2}-5)\right\}$$

である。

このようにして求まった w_p と w_c を重ね合せ w_c に含まれる4ヶの未定係数を2円弧辺における境界条件から決定すれば所要の解が得られる。その条件は次のようになる。

(i) 円弧辺が単純支持のときは

$$\rho=k \text{ or } \rho=1 \text{ において } \left.\begin{aligned} w(r,\theta)&=0\\ M_r&=0\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

(ii) 円弧辺が自由辺のときは

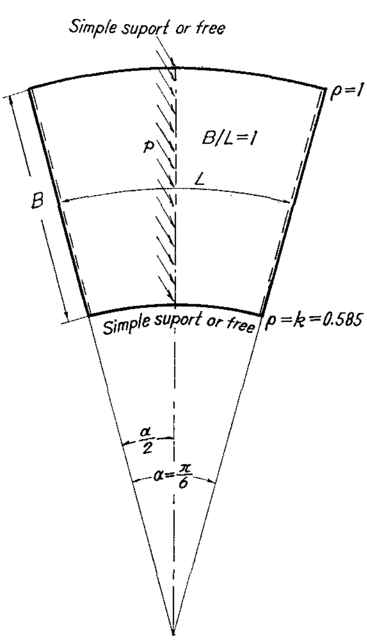
$$\rho=k \text{ or } \rho=1 \text{ において } \left.\begin{aligned} M_r&=0\\ \bar{q}_r(\text{反力})&=0\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

(iii) 円弧辺が固定のとき

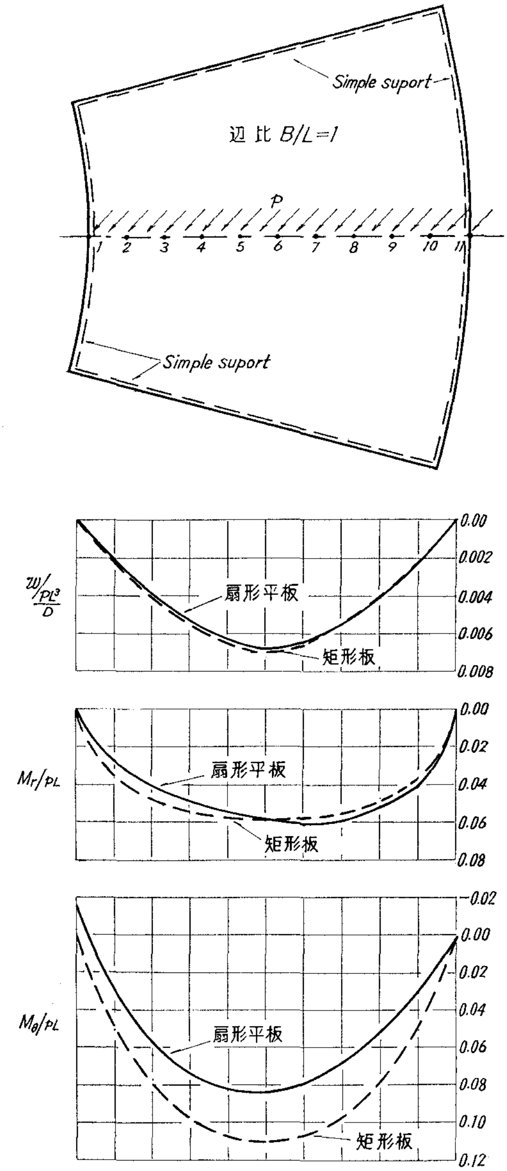
$$\rho=k \text{ or } \rho=1 \text{ において } \left.\begin{aligned} w&=0\\ \frac{\partial w}{\partial r}&=0\end{aligned}\right\} \quad (16)$$

4. 数値計算例

計算例として図-3のように中心角 $\alpha=\frac{\pi}{6}$，辺比 $\frac{B}{L}=1$ の形の扇形平板の中央に $p=\text{const}\,(\text{kg/m})$ なる線荷重が r 方向に作用している場合をとりあげる。円弧辺の条件としては単純支持の場合と自由辺の場合の2種類を取扱った。なおポアソン比は0とした。以上2種の数値計算を行ないたわみと曲げモーメント (M_r と M_θ) を求めこの値を表-1に示した。またこれを同じ条件の矩形平板（この場合は正方形板）のものとそれぞれの値を比較したのが図-4，図-5である。



図—3



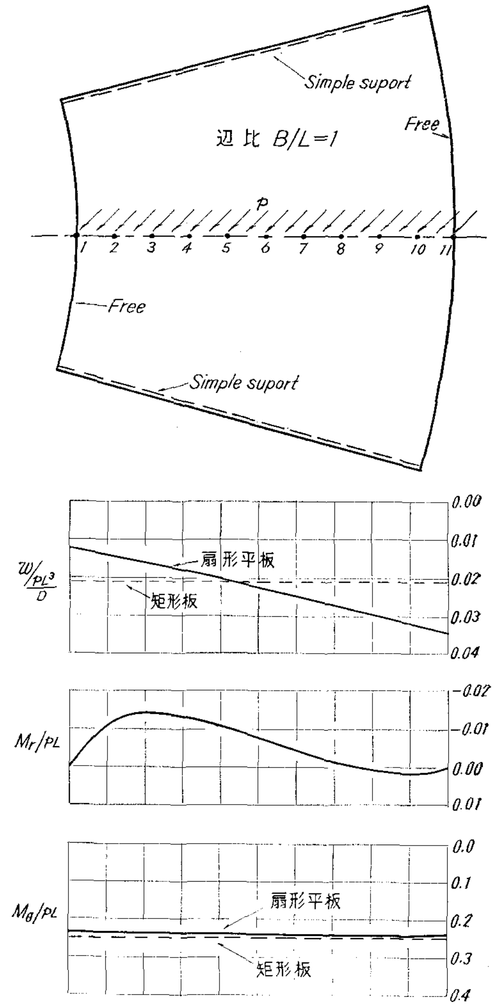
図—4

5. 結　　語

平板の Green 関数（特異解）を応用して線荷重載荷の扇形平板の曲げを扱ったがこの方法は他の載荷状態にも適用できるものである。なお等分布満載荷重の場合は筆者が先に求めたもの[1]と当然一致する。

表—1

境界条件	係数 / 点．(B=幅員)	$\frac{pL^3}{D}$ w	pL M_r	M_θ
4辺単純支持	1: 0	0.0	0.0	−0.0152
	2: 0.1B	0.00208	0.0280	0.0295
	3: 0.2B	0.00389	0.0408	0.0588
	4: 0.3B	0.00531	0.0490	0.0758
	5: 0.4B	0.00624	0.0552	0.0835
	6: 0.5B	0.00662	0.0595	0.0840
	7: 0.6B	0.00643	0.0615	0.0783
	8: 0.7B	0.00559	0.0596	0.0674
	9: 0.8B	0.00418	0.0518	0.0517
	10: 0.9B	0.00225	0.0416	0.0319
	11: 1.0B	0.0	0.0	0.0096
2直線辺単純支持，2内孤辺自由	1: 0	0.01236	0.0	0.2347
	2: 0.1B	0.01419	−0.0111	0.2357
	3: 0.2B	0.01612	−0.0140	0.2365
	4: 0.3B	0.01819	−0.0132	0.2378
	5: 0.4B	0.02040	−0.0108	0.2393
	6: 0.5B	0.02271	−0.0076	0.2408
	7: 0.6B	0.02508	−0.0043	0.2419
	8: 0.7B	0.02751	−0.0013	0.2425
	9: 0.8B	0.02995	0.0010	0.2422
	10: 0.9B	0.03238	0.0017	0.2409
	11: B	0.03480	0.0	0.2386



図—5

文　献

1) 芳村　仁：土木学会論文集 第82号，第86号，第89号 第19回応用力学連合講演会前刷.

2) Saito, Kawakami and Saito: Proceedings of the Japan National Congress for App. Mech. 1955, 1956.

3) R. Courant u. D. Hilbert: Methoden der Mathematischen Physik I., Kap. V.
または R. Courant u. D. Hilbert: Method of Mathematical Physics., Chap. V.
Timoshenko and Woinowsky-Krieger: Theory of Plates and Shells., Chapt. 10.
K. Girkmann: Flächentragwerke S. 260.

4) 寺沢寛一：自然科学者のための数学概論，応用編第3章.

5) 大井鉄郎：偏微分方程式とその応用，p. 312.