

帯板を要素とする応力解析法

— 二次元応力について —

正 員 能 町 純 雄*

正 員 松 岡 健 一**

学生員 ○田 島 照 義***

1. ま え が き

帯板を要素とする折板構造に対して、能町教授¹⁾は先に平面保持を基とする変位せん断方程式を設定し、箱桁等の各問題に有効に応用できることを示した。またこれを用いて尾崎助教²⁾は実用的な各断面形箱桁の応力性状の検討をしている。この変位せん断方程式の変位式の積分にやや不明の点があるのを改良し、新たな変位公式を設立した。

この公式の応用として剛性の異なる二部分からなる合成桁の問題をとりあげ、従来不明であった接着部分のせん断力の分布、同部の浮き上り応力、さらに曲げ応力の分布を解明することができた。

2. 帯板の変位せん断方程式

矩形帯板部材について、図-1のように座標 x, y をとり、それぞれの方向の変位を u, v とする。 x 方向のせん断力を T , y 方向の法線力を S とし、図の方向を正とする。

x 方向の力のつり合いより

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

y 方向の力のつり合いより

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

ここで座標 x, y を

$$\left. \begin{aligned} x &= \xi l & 0 \leq \xi \leq 1 \\ y &= \eta h & 0 \leq \eta \leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

とおく。応力関数を ϕ とすると

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad \nabla^4 \phi = 0 \quad (4)$$

上式を長辺 l , 短辺 h の領域で無次元化して

$$\begin{aligned} \nabla^4 &= \frac{\partial^4}{\partial \xi^4 l^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2 l^2 h^2} \\ &+ \frac{\partial^4}{\partial \eta^4 h^4} \doteq \frac{\partial^4}{\partial y^4} \quad (\because l^2 \gg h^2) \end{aligned} \quad (5)$$

のようになるから

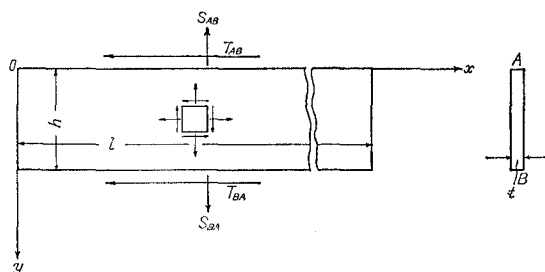


図-1

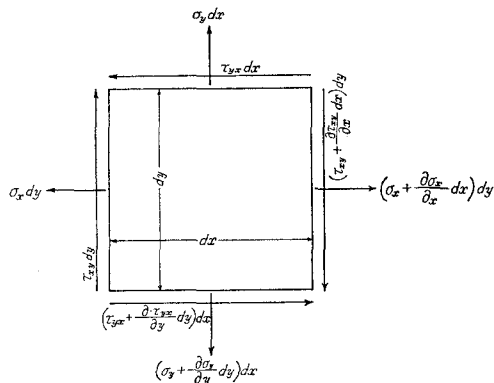


図-2

* 室蘭工業大学 教授 工博

** 室蘭工業大学 助教授 工修

*** 室蘭工業大学 大学院

1), 2) 室蘭工業大学 土木工学科

$$\frac{\partial^4 \sigma_y}{\partial y^4} = 0$$

従って σ_y は次のようになる。

$$t \sigma_y = S_{AB}(1-\eta) + S_{BA}\eta + K_A f^{(3)}(1-\eta) + K_B f^{(3)}(\eta) \quad (6)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} f^{(3)}(\eta) &= (\eta - \eta^3)/6 \\ f^{(3)}(1-\eta) &= (2\eta - 3\eta^2 + \eta^3)/6 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

また

$$\begin{aligned} F^4(\sigma_x + \sigma_y) &= 0 \\ \therefore \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x + \sigma_y) &= 0 \\ \therefore t(\sigma_x + \sigma_y) &= (t\sigma_{xA} + S_{AB})(1-\eta) + (t\sigma_{xB} + S_{BA})\eta \end{aligned} \quad (8)$$

(6) と (8) より

$$t\sigma_x = t\sigma_{xA}(1-\eta) + t\sigma_{xB}\eta - K_A f^{(3)}(1-\eta) - K_B f^{(3)}(\eta) \quad (9)$$

x による偏微分を $\cdot$ で表すと, (2) は

$$t_{xy} = -\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \quad (10)$$

(6) に (10) を代入して

$$-t t_{xy} = \frac{S_{BA} - S_{AB}}{h} + \frac{K_A f^{(2)}(1-\eta)}{h} + \frac{K_B f^{(2)}(\eta)}{h} \quad (11)$$

(11) に $\eta=0, 1$ を代入し, 両辺に h を乗ずると

$$h \dot{T}_{AB} = S_{AB} - S_{BA} - (2K_A + K_B)/6 \quad (12)$$

$$h \dot{T}_{BA} = S_{BA} - S_{AB} - (K_A + 2K_B)/6 \quad (13)$$

また, (1) を x で微分すると

$$\ddot{\sigma}_x + \frac{\partial t_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (14)$$

(11) に (8) を代入し $\eta=0, 1$ とすると

$$\left. \begin{aligned} t h^2 \ddot{\sigma}_{xA} + K_A &= 0 & \therefore K_A &= -t h^2 \ddot{\sigma}_{xA} \\ t h^2 \ddot{\sigma}_{xB} + K_B &= 0 & \therefore K_B &= -t h^2 \ddot{\sigma}_{xB} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

(16) を (12), (13) に代入すると

$$h \dot{T}_{AB} = t h^2 (2\ddot{\sigma}_{xA} + \ddot{\sigma}_{xB})/6 + S_{AB} - S_{BA} \quad (17)$$

$$h \dot{T}_{BA} = t h (\ddot{\sigma}_{xA} + 2\ddot{\sigma}_{xB})/6 + S_{BA} - S_{AB} \quad (18)$$

応力と歪の関係より

$$t\sigma_x = \frac{Et}{1-\nu^2} \left(\dot{u} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (19)$$

$$t\sigma_y = \frac{Et}{1-\nu^2} \left(\nu \dot{u} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (20)$$

$$\therefore \sigma_x - \nu \sigma_y = E \dot{u} \quad (21)$$

よって

$$\ddot{\sigma}_{xA} = E \ddot{u}_A + \nu \frac{\ddot{S}_{AB}}{t} \quad (22)$$

$$\ddot{\sigma}_{xB} = E \ddot{u}_B + \nu \frac{\ddot{S}_{BA}}{t} \quad (23)$$

(22), (23) を (17), (18) に代入すると次の変位せん断方程式を得る。

$$\dot{T}_{AB} = \frac{Eth}{6} (2\ddot{u}_A + \ddot{u}_B) + \frac{\nu h}{6} (2\ddot{S}_{AB} + \ddot{S}_{BA}) + \frac{S_{AB} - S_{BA}}{h} \quad (24)$$

$$\dot{T}_{BA} = \frac{Eth}{6} (2\ddot{u}_B + \ddot{u}_A) + \frac{\nu h}{6} (2\ddot{S}_{BA} + \ddot{S}_{AB}) + \frac{S_{BA} - S_{AB}}{h} \quad (25)$$

次に, (19), (20) より

$$E \frac{\partial v}{\partial y} = \sigma_y - \nu \sigma_x$$

$$\therefore Et \frac{\partial v}{\partial y} = (S_{AB} - \nu t \sigma_{xA}) (1 - \eta) + (S_{BA} - \nu t \sigma_{xB}) \eta + (1 + \nu) \left\{ K_A f^{(3)} (1 - \eta) + K_B f^{(3)} (\eta) \right\} \quad (26)$$

(26) に σ_{xA} , σ_{xB} を代入して, 0 から h まで積分すると

$$\frac{Etv}{h} = \left\{ S_{AB} (1 - \nu^2) - \nu Et \dot{u}_A \right\} \left(\eta - \frac{\eta^2}{2} \right) + \left\{ S_{BA} (1 - \nu^2) - \nu Et \dot{u}_B \right\} \frac{\eta^2}{2} + (1 + \nu) \left\{ \frac{K_A}{6} \left(\eta^2 - \eta^3 + \frac{\eta^4}{4} \right) + \frac{K_B}{6} \left(\frac{\eta^2}{2} - \frac{\eta^4}{4} \right) \right\} + \frac{Et v_A}{h} \quad (27)$$

さらに 0 から h まで積分して

$$\frac{Et}{h^2} \int_0^h v dy = \frac{1}{6} \left\{ (1 - \nu^2) (2S_{AB} + S_{BA}) - \nu Et (2\dot{u}_A + \dot{u}_B) \right\} + (1 + \nu) \left(\frac{K_A}{45} + \frac{7}{360} K_B \right) + \frac{Et v_A}{h} \quad (28)$$

(27) に $\eta=1$ を代入して

$$Et (v_B - v_A) / h = \left\{ (1 - \nu^2) (S_{AB} + S_{BA}) - \nu Et (\dot{u}_A + \dot{u}_B) \right\} / 2 + (1 + \nu) (K_A + K_B) / 24 \quad (29)$$

(28), (29) より K_A , K_B はの項は小さいので省略すると

$$\frac{Et}{h^2} \int_0^h v dy = \frac{1}{6} \left\{ (1 - \nu^2) (2S_{AB} + S_{BA}) - \nu Et (2\dot{u}_A + \dot{u}_B) \right\} + \frac{Et v_A}{h} \quad (30)$$

$$\frac{Et}{h^2} \int_0^h v dy = -\frac{1}{6} \left\{ (1 - \nu^2) (S_{AB} + 2S_{BA}) - \nu Et (\dot{u}_A + 2\dot{u}_B) \right\} + \frac{Et v_B}{h} \quad (31)$$

$$\frac{Et}{h} (v_B - v_A) = \frac{1}{2} \left\{ (1 - \nu^2) (S_{AB} + S_{BA}) - \nu Et (\dot{u}_A + \dot{u}_B) \right\} \quad (32)$$

ここで

$$\tau_{xy} = G \left(\dot{v} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad \left(G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \right) \quad (33)$$

(33) を (2) に代入して

$$-\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = G \left(\ddot{v} + \frac{\partial \dot{v}}{\partial y} \right) \quad (34)$$

(6) を (34) に代入し y で 0 から h まで積分すると

$$S_{AB} - S_{BA} = Gt \int_0^h \ddot{v} dy + Gt (\dot{u}_B - \dot{u}_A) \quad (35)$$

(35) に (30) を代入して $\int_0^h v dy$ を消去すると

$$\frac{Gh^2}{6E} \left\{ (1 - \nu^2) (\ddot{S}_{2AB} + \ddot{S}_{BA}) - \nu Et (2\ddot{u}_A + \ddot{u}_B) \right\} + Ght \dot{v}_A = S_{AB} - S_{BA} + Gt (\dot{u}_A - \dot{u}_B) \quad (36)$$

よって

$$Ght \dot{v}_A = S_{AB} - S_{BA} + Gt (\dot{u}_A - \dot{u}_B) - \frac{Gh^2}{6E} \left\{ (1 - \nu^2) (2\ddot{S}_{AB} + \ddot{S}_{BA}) - \nu Et (2\ddot{u}_A + \ddot{u}_B) \right\} \quad (37)$$

(35) に (32) を代入して

$$Ght \dot{v}_B = S_{AB} - S_{BA} + Gt (\dot{u}_A - \dot{u}_B) + \frac{Gh^2}{6E} \left\{ (1 - \nu^2) (2\ddot{S}_{BA} + \ddot{S}_{AB}) - \nu Et (2\ddot{u}_B + \ddot{u}_A) \right\} \quad (38)$$

(37) $\times 2 + (38)$ より

$$Gt (2\dot{v}_A + \dot{v}_B) = 3(S_{AB} - S_{BA}) + 3Gt (\dot{u}_A - \dot{u}_B) - \frac{Gh^2}{2E} \left\{ (1 - \nu^2) \ddot{S}_{AB} - \nu Et \ddot{u}_A \right\} \quad (39)$$

(37) $+(38) \times 2$ より

$$Gt (\ddot{v}_A + 2\ddot{v}_B) = 3(S_{AB} - S_{BA}) + 3Gt (\dot{u}_A - \dot{u}_B) + \frac{Gh^2}{2E} \left\{ (1 - \nu^2) \ddot{S}_{BA} - \nu Et \ddot{u}_B \right\} \quad (40)$$

上式は先に設定した変位式のあいまいな部分を明確にした式である。また前 (9) 式中の第 3, 第 4 項は, いわゆる「shear lag」として知られている項である。

3. 合成桁の解析

図-3 のような剛性の異なる二部からなる合成桁について, 前記の変位せん断方程式を用い二層間の法線力 S , せん断力 T , および曲げ応力 σ_x の式を導く。 $\nu=0$ とする。

$T_{01}=0$ より

$$\frac{1}{6} E_1 t h_1 (2\ddot{w}_0 + \ddot{w}_1) + \frac{1}{h_1} (S_0 - S_1) = 0 \quad (41)$$

$T_{10} + T_{12} = 0$ より

$$\frac{1}{6} E_1 t h_1 (\ddot{w}_0 + 2\ddot{w}_1) + \frac{1}{6} E_2 t h_2 (2\ddot{w}_1 + \ddot{w}_2) + \frac{S_1 - S_0}{h_1} + \frac{S_1 - S_2}{h_2} \quad (42)$$

$T_{21}=0$ より

$$\frac{1}{6} E_2 t h_2 (\ddot{w}_1 + 2\ddot{w}_2) + \frac{S_2 - S_1}{h_2} = 0 \quad (43)$$

$v_{10} = v_{12}$ より

$$\frac{1}{G_1 t h_1} (S_0 - S_1) + \frac{\dot{w}_0 - \dot{w}_1}{h_1} + \frac{h}{6 E_1 t} (2\dot{S}_1 + \dot{S}_0) = \frac{1}{G_2 t h_2} (S_1 - S_2) + \frac{\dot{w}_1 - \dot{w}_2}{h_2} - \frac{h}{6 E_2 t} (2\dot{S}_1 + \dot{S}_2) \quad (44)$$

1) S_1

(41) より

$$\ddot{w}_0 + \frac{1}{2} \ddot{w}_1 = -\frac{3}{E_1 t h_1^2} (S_0 - S_1) \quad (45)$$

(43) より

$$\ddot{w}_2 + \frac{1}{2} \ddot{w}_1 = \frac{3}{E_2 t h_2^2} S_1 \quad (S_2 = 0) \quad (46)$$

(42) に (45), (46) を代入して

$$(E_1 t h_1 + E_2 t h_2) \ddot{w}_1 + 6 \left\{ S_1 \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \right) - \frac{S_0}{h_1} \right\} = 0 \quad (47)$$

(44) を x で 2 度微分し, (45), (46) を代入すると

$$-\frac{3}{2} \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \right) \ddot{w}_1 + \frac{3}{E_1 t h_1^3} (S_1 - S_0) - \frac{1}{G_1 t h_1} (\dot{S}_1 - \dot{S}_0) + \frac{h_1}{6 E_1 t} (\dot{S}_0 + 2\dot{S}_1) - \frac{\dot{S}_1}{G_2 t h_2} + \frac{3}{E_2 t h_2^3} S_1 + \frac{h_2}{3 E_2 t \dot{S}_1} = 0 \quad (48)$$

(47) を (48) に代入して

$$-\frac{9}{t} \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \right) \frac{1}{E_1 h_1 + E_2 h_2} \left\{ \frac{S_0}{h_1} - S_1 \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \right) \right\} - \frac{3}{E_1 t h_1^3} (S_0 - S_1) + \frac{1}{G_1 t h_1} (\dot{S}_0 - \dot{S}_1) + \frac{h_1}{6 E_1 t} (\dot{S}_0 + 2\dot{S}_1) - \frac{\dot{S}_1}{G_2 t h_2} + \frac{3}{E_2 t h_2^3} S_1 + \frac{h_2}{3 E_2 t} \dot{S}_1 = 0 \quad (49)$$

両辺に $E_1 h_1 + E_2 h_2$ を乗じて S_1, S_2 について整理すると

$$\begin{aligned} & S_1 \left\{ \frac{9}{t} \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \right)^2 + \frac{3}{E_1 t h_1^3} (E_1 h_1 + E_2 h_2) + \frac{3}{E_2 t h_2^3} (E_1 h_1 + E_2 h_2) \right\} - \dot{S}_1 \left\{ \frac{2}{E_1 t h_1} (E_1 h_1 + E_2 h_2) \right. \\ & \quad \left. + \frac{2}{E_2 t h_2} (E_1 h_1 + E_2 h_2) \right\} + \dot{S}_1 \left\{ \frac{h_1}{3 E_1 t} (E_1 h_1 + E_2 h_2) + \frac{h_2}{3 E_2 t} (E_1 h_1 + E_2 h_2) \right\} \\ & = S_0 \left\{ \frac{9}{t h_1} \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \right) + \frac{3}{E_1 t h_1^3} (E_1 h_1 + E_2 h_2) \right\} - \dot{S}_0 \frac{2}{E_1 t h_1} (E_1 h_1 + E_2 h_2) - \dot{S}_0 \frac{h_1}{6 E_1 t} (E_1 h_1 + E_2 h_2) \end{aligned} \quad (50)$$

ここに $\frac{E_2 t h_2}{E_1 t h_1} = \gamma$ とおき有限フーリエ変換を行なう。

$$\begin{aligned} & \tilde{S}_1 \left[9 \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \right)^2 + \frac{3}{h_1^3} (1 + \gamma) + \frac{3}{h_2^3} \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right) + 2 \left(2 + \gamma + \frac{1}{\gamma} \right) M^2 + \frac{1}{3} \left\{ h_1^2 (1 + \gamma) + h_2^2 \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right) \right\} M^4 \right] \\ & = \tilde{S}_0 \left[9 \frac{1}{h_1} \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \right) + \frac{3}{h_1^3} (1 + \gamma) + 2 (1 + \gamma) M^2 - \frac{h_1^2}{6} (1 + \gamma) M^4 \right] \end{aligned} \quad (51)$$

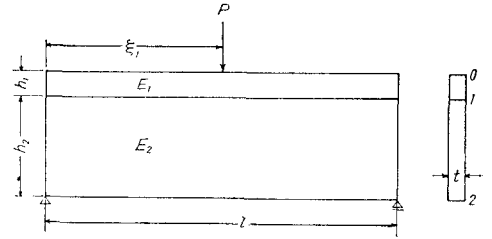


図-3

ただし

$$\tilde{S}_1 = \int_0^l S_1 \sin \frac{m\pi x}{l} dx, \quad \tilde{S}_0 = \int_0^l S_0 \sin \frac{m\pi x}{l} dx$$

$$m = 1, 2, 3, \dots$$

各 M^n ($n=0, 2, 4$) の係数を次の如くおく。

$$\tilde{S}_1 = (a + bM^2 + cM^4) = \tilde{S}_0 (d + eM^2 - fM^4) \quad (52)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} a &= 9 \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \right)^2 + \frac{3}{h_1^2} (1 + \gamma) + \frac{3}{h_2^2} \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right) \\ b &= 2 (2 + \gamma + 1/\gamma) \\ c &= \frac{1}{3} \left\{ h_1^2 (1 + \gamma) + h_2^2 \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right) \right\} \\ d &= \frac{9}{h_1} \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \right) + \frac{3}{h_1^2} (1 + \gamma) \\ e &= 2 (1 + \gamma) \\ f &= \frac{h_1^2}{6} (1 + \gamma) \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

すると

$$\tilde{S}_1 = -\frac{f}{c} \tilde{S}_0 \left\{ 1 - \left(\frac{b}{c} + \frac{e}{f} \right) \frac{M^2}{M^4 + \frac{b}{c} M^2 + \frac{a}{c}} - \left(\frac{a}{c} + \frac{d}{f} \right) \frac{1}{M^4 + \frac{b}{c} M^2 + \frac{a}{c}} \right\} \quad (54)$$

となる。集中荷重 P が $x = \xi_1 l$ に作用する場合について解くに、 $\tilde{S}_0 = -P \sin m\pi \xi_1$ を (54) に代入して逆変換を行なうと

$$S_1 = -\frac{f}{c} S_0 - \frac{f}{c} Pl \left(\frac{b}{c} + \frac{e}{f} \right) \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\pi^2} \frac{m^2 + \alpha^2 - \beta^2}{(m^2 + \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2 \beta^2} \sin m\pi \xi_1 \sin m\pi \xi \right. \\ \left. + \frac{j - (\alpha^2 - \beta^2)}{2\alpha\beta} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\pi^2} \frac{2\alpha\beta}{(m^2 + \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2 \beta^2} \sin m\pi \xi_1 \sin m\pi \xi \right\} \quad (55)$$

ただし

$$\alpha = \pm \frac{l}{\pi} \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{c} + \frac{b}{4c}}}$$

$$\beta = \pm \frac{l}{\pi} \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{c} - \frac{b}{4c}}}$$

$$j = \frac{l^2}{\pi^2} \frac{af + cd}{bf + ce}$$

(55) を閉じた形に書くと

$$S_1 = \frac{f}{c} P \left[1 - \frac{l}{2\pi(\alpha^2 + \beta^2)} \left(\frac{f}{c} + \frac{e}{f} \right) \left\{ \alpha \Phi - \beta \Psi + \frac{j - \alpha^2 + \beta^2}{2\alpha\beta} (\alpha \Psi + \beta \Phi) \right\} \right] \quad (56)$$

ただし $\xi_1 \geq \xi$ で

$$\Phi = \left\{ \sinh \alpha \pi (2 + \xi - \xi_1) \cos \beta \pi (\xi - \xi_1) - \sinh \alpha \pi (2 - \xi - \xi_1) \cos \beta \pi (\xi + \xi_1) + \sinh \alpha \pi (\xi_1 - \xi) \cos \beta \pi (2 + \xi - \xi_1) - \sinh \alpha \pi (\xi_1 + \xi) \cos \beta \pi (2 - \xi - \xi_1) \right\} / \left(\cosh 2\alpha \pi - \cos 2\beta \pi \right) \quad (57)$$

$$\Psi = \left\{ \cosh \alpha \pi (2 + \xi - \xi_1) \sin \beta \pi (\xi_1 - \xi) - \cosh \alpha \pi (2 - \xi - \xi_1) \sin \beta \pi (\xi_1 + \xi) + \cosh \alpha \pi (\xi_1 - \xi) \sin \beta \pi (2 + \xi - \xi_1) - \cosh \alpha \pi (\xi_1 + \xi) \sin \beta \pi (2 - \xi - \xi_1) \right\} / \left(\cosh 2\alpha \pi - \cos 2\beta \pi \right) \quad (58)$$

2) T_1

(25) を用いて

$$\dot{T}_{10} = \frac{E_1 t h_1}{6} (2\tilde{w}_1 + \tilde{w}_0) + \frac{S_1 - S_0}{h_1} \quad (59)$$

(45), (47) より

$$2\ddot{u}_1 + \ddot{u}_0 = \frac{3}{E_1 t h_1} (S_1 + P) - \frac{9}{E_1 t h_1} \frac{1}{\tilde{\gamma} + 1} \left\{ \frac{P}{h_1} + S_1 \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \right) \right\} \quad (60)$$

(60) に (59) を代入して

$$\dot{T}_{10} = \frac{3}{2h_1} (S_1 + P) - \frac{3}{2(\tilde{\gamma} + 1)} \left\{ \frac{P}{h_1} + S_1 \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \right) \right\} \quad (61)$$

有限フーリエ変換を施すと

$$-M \int_0^l T_{10} \cos \frac{m\pi x}{l} dx = \frac{3}{2h_1} (\tilde{S}_1 + \tilde{P}) - \frac{3}{2(\tilde{\gamma} + 1)} \left\{ \frac{\tilde{P}}{h_1} + \tilde{S} \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \right) \right\} \quad (62)$$

(62) に (54) を代入して整理すると

$$\begin{aligned} \int_0^l T_{10} \cos \frac{m\pi x}{l} dx &= \frac{-3P}{2(\tilde{\gamma} + 1)} \left\{ \frac{f}{c} \left(\frac{\tilde{\gamma}}{h_1} - \frac{1}{h_2} \right) + \frac{1}{h_1} \right\} \frac{1}{M} \sin m\pi \xi_1 + \frac{3fP}{2c} \left(\frac{b}{c} + \frac{e}{f} \right) \frac{1}{\tilde{\gamma} + 1} \\ &\times \left(\frac{\tilde{\gamma}}{h_1} - \frac{1}{h_2} \right) \left\{ \frac{M}{M^4 + \frac{b}{c} M^2 + \frac{a}{c}} \sin m\pi \xi_1 + \frac{af + cd}{bf + ce} \frac{\sin m\pi \xi_1}{M \left(M^4 + \frac{b}{c} M^2 + \frac{a}{c} \right)} \right\} \end{aligned} \quad (63)$$

逆変換して

$$\begin{aligned} T_{10} &= \frac{3P}{l(\tilde{\gamma} + 1)} \left\{ \frac{f}{c} \left(\frac{\tilde{\gamma}}{h_1} - \frac{1}{h_2} \right) + \frac{1}{h_1} \right\} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{M} \sin m\pi \xi_1 \cos m\pi \xi \\ &+ \frac{3P(bf + ce)}{c^2 l (\tilde{\gamma} + 1)} \left(\frac{\tilde{\gamma}}{h_1} - \frac{1}{h_2} \right) \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{M}{M^4 + \frac{b}{c} M^2 + \frac{a}{c}} \sin m\pi \xi_1 \cos m\pi \xi + \frac{af + cd}{bf + ce} \sum_{m=1}^{\infty} \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{M \left(M^4 + \frac{b}{c} M^2 + \frac{a}{c} \right)} \sin m\pi \xi_1 \cos m\pi \xi \right\} \end{aligned} \quad (64)$$

(64) を閉じた形に書くと

$$\begin{aligned} T_{10} &= -\frac{3P}{\tilde{\gamma} + 1} \left[(1 - \xi_1) \left\{ \frac{\tilde{\gamma}}{h_1} \left(1 + \frac{f}{c} \right) - \frac{f}{ch_2} \right\} - \frac{(bf + ce) l^2}{4\alpha \beta \pi^2 c^2 (\alpha^2 + \beta^2)} \left(\frac{\tilde{\gamma}}{h_1} - \frac{1}{h_2} \right) \left[\frac{\alpha \Psi' + \beta \Phi'}{2\pi} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \left\{ 1 - \frac{l^2}{\pi^2} \left(\frac{af + cd}{bf + ce} \right) \frac{(\alpha^2 - \beta^2)}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} \right\} + \frac{\alpha \beta l^2}{\pi^2 (\alpha^2 + \beta^2)} \left(\frac{af + cd}{bf + ce} \right) \left\{ 2(1 - \xi_1) - \frac{1}{\pi (\alpha^2 + \beta^2)} (\alpha \Phi' - \beta \Psi') \right\} \right] \right] \end{aligned} \quad (66)$$

ただし

$$\begin{aligned} \Phi' &= \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}, \quad \Psi' = \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \\ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m\pi} \sin m\pi \xi_1 \cos m\pi \xi &= \begin{cases} 1 - \xi_1, & \xi_1 \geq \xi \\ -\xi_1, & \xi \geq \xi_1 \end{cases} \end{aligned}$$

3) σ_x

(47) より

$$\ddot{u}_1 = -\frac{6}{\tilde{\gamma} + 1} \frac{1}{E_1 t h_1} \left\{ \frac{P}{h_1} + S_1 \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \right) \right\} \quad (67)$$

有限フーリエ変換を施すと

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{u}}_1 &= \int_0^l \ddot{u}_1 \sin \frac{m\pi x}{l} dx = -M^2 \ddot{\tilde{u}}_1 \\ \therefore \ddot{\tilde{u}}_1 &= \frac{6}{\tilde{\gamma} + 1} \frac{1}{E_1 t h_1} \left\{ \frac{P}{h_1 M^2} \sin m\pi \xi_1 + \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \right) \frac{\tilde{S}_1}{M^2} \right\} \end{aligned} \quad (68)$$

(68) に (54) を代入して逆変換を施すと

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= \frac{6}{\tilde{\gamma} + 1} \frac{P}{E_1 t h_1} \left[\frac{1}{h_1 l} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2 \sin m\pi \xi_1 \sin m\pi \xi}{M^2} + \frac{f}{c} \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \right) \frac{1}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2 \sin m\pi \xi_1 \sin m\pi \xi}{M^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2f}{cl} \left(\frac{b}{c} + \frac{e}{f} \right) \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \right) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin m\pi \xi_1 \sin m\pi \xi}{M^4 + \frac{b}{c} M^2 + \frac{a}{c}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2(af + cd)}{c^2 l} \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \right) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin m\pi \xi_1 \sin m\pi \xi}{M^2 \left(M^4 + \frac{b}{c} M^2 + \frac{a}{c} \right)} \right] \end{aligned} \quad (69)$$

(69) を閉じた形に書くと

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 = & \frac{6}{\gamma+1} \frac{Pl}{E_1 t h_1} \left[\xi(1-\xi_1) \left\{ \frac{1}{h_1} + \frac{f}{c} \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \right) \right\} - \frac{f l^2}{4 \alpha \beta \pi^3 (\alpha^2 + \beta^2) c} \left(\frac{b}{c} + \frac{e}{f} \right) \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \right) \right. \\ & \times (\alpha \Psi + \beta \Phi) - \frac{(\alpha f + c d) l^4}{2 \alpha \beta \pi^4 (\alpha^2 + \beta^2)^2 c^2} \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \right) \\ & \left. \times \left\{ 2 \alpha \beta \xi (1-\xi_1) - \frac{\alpha \beta}{\pi} (\alpha \Phi - \beta \Psi) \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} - \frac{(\alpha^2 - \beta^2)}{2 \pi (\alpha^2 + \beta^2)} (\alpha \Psi + \beta \Phi) \right\} \right] \end{aligned} \quad (70)$$

$\dot{u}_1$ に弾性係数 E を乗ずると断面 1 の σ_x が求められる。

4. 数値計算例

$l = 40, 50, 60 \text{ cm}$ $P = 1 \text{ kg}$ $\xi_1 = 0.5$
 $E_1 = 270000 \text{ kg/cm}^2$ $h_1 = 2 \text{ cm}$
 $E_2 = 2100000 \text{ kg/cm}^2$ $h_2 = 8 \text{ cm}$
 $t = 1 \text{ cm}$

として、室蘭工業大学電子計算機室の FACOM-231 で計算した。一般に用いられる値との差をグラフで示す。ただし σ_{xs} は曲げ応力そのものである。

5. 考 察

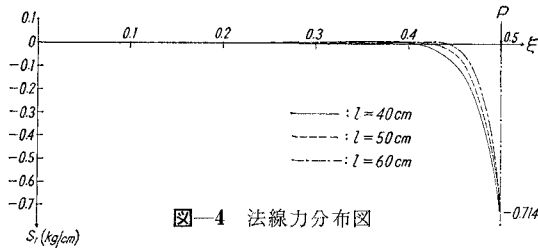
以上、改良した変位せん断方程式を先ず示したが、これを合成桁に応用し $l=40, 50, 60 \text{ cm}$ について荷重を支間中央にかけた場合の接着部分のせん断力、浮き上り応力曲げ応力の分布を求めることができた。

これを要約すれば次のようである。せん断力については、載荷点より 4 cm 付近に極大値が現われ、そこから支点と載荷点に向い逓減している。その極大値は単純計算で求めた値の 3% 程度である。浮き上り応力については、載荷点より 5 cm 付近に載荷点直下の法線力の 0.8% 程度現われる。曲げ応力は載荷点より 1.5 cm 付近に最大値現われ、載荷点直下では最大値の $13 \sim 20\%$ 減であるが、その減少量は 0.147 kg/cm^2 とと略一定である。これらの極値はすべて支間距離に関係なく、載荷点より一定距離の点で起っているのは断面構成によるのであろう。いずれも局部集中荷重の影響によるものと思われる。

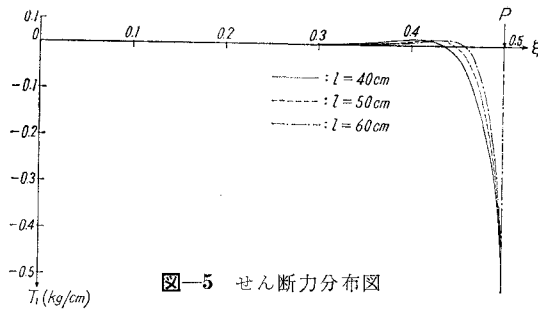
今後は種々の境界条件、影響線、分布荷重等について検討し、さらに箱桁に応用したいと考えている。

参 考 文 献

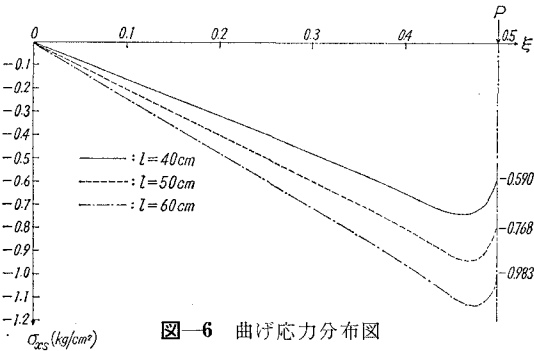
- 1) Sumio G. Nomachi: On Torsion Bending of Thin-Walled Beam with Deformable Rectangular Cross Section, Proceeding of the Fifteenth Japan National Congress for Applied Mechanics, 1965.



図—4 法線力分布図



図—5 せん断力分布図



図—6 曲げ応力分布図