

## 帯板を要素とする応力解析法

— 平板について —

正員 能 町 純 雄\*

正員 松 岡 健 一\*\*

学生員 ○堀 米 昇 士 朗\*\*\*

## 1. ま え が き

著者等は、先に、平板問題を帯板要素に分割する方法で応力計算を行なうための一方向連立差分方程式を設定し、これが正確度の高い一種の有限要素法であることを示したが、ここでは、これを無限カンティレバー板の自由端に、点荷重がある場合に適用する。

無限カンティレバー板を分割せず、一枚の帯板と考えて計算し、この方法が近似度の良い計算方法であることを示したものである。

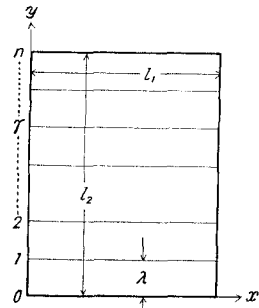


図-1

## 2. 帯板要素の解法

平板において、図-1のように座標軸  $x, y$  を取り、 $y$  方向に  $n$  枚の帯板要素に分割する。

平板の基本微分方程式は

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{N} \quad (1)$$

$\lambda \ll l_2$  として、 $w = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} W_m e^{-imx} dm$  の変換を (1) 式に適用すると、

(3) 式の各項に  $\sin \frac{n\pi}{\lambda} y dy$  をかけて、部分積分し、 $\int_0^{\lambda} W_m \sin \frac{n\pi}{\lambda} y dy = S_n[W_m]$  と Fourier 変換し、 $S_n[W_m]$  について整理すると、

$$S_n[W_m] = \left[ \frac{\left(\frac{n\pi}{\lambda}\right)}{\left\{\left(\frac{n\pi}{\lambda}\right)^2 + m^2\right\}^2} \left\{ (-1)^n \left( \frac{d^2 W_m}{dy^2} - m^2 W_m \right)_{\lambda} - \left( \frac{d^2 W_m}{dy^2} - m^2 W_m \right)_0 \right\} - \frac{\left(\frac{n\pi}{\lambda}\right)}{\left\{\left(\frac{n\pi}{\lambda}\right)^2 + m^2\right\}} \left\{ (-1)^n W_{m,\lambda} - W_{m,0} \right\} \right] \quad (4)$$

(4) 式を逆変換して  $W_m$  を求めると、

$$W_m = \frac{2}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} S_n[W_m] \sin \frac{n\pi}{\lambda} y$$

\* 室蘭工業大学 教授 工博

\*\* 室蘭工業大学 助教授 工修

\*\*\* 室蘭工業大学 大学院

$$= \frac{2}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{\left(\frac{n\pi}{\lambda}\right)}{\left\{\left(\frac{n\pi}{\lambda}\right)^2 + m^2\right\}} \left\{ (-1)^n \left( \frac{d^2 W_m}{dy^2} - m^2 W_m \right)_\lambda - \left( \frac{d^2 W_m}{dy^2} - m^2 W_m \right)_0 \right\} \right. \\ \left. - \frac{\left(\frac{n\pi}{\lambda}\right)}{\left\{\left(\frac{n\pi}{\lambda}\right)^2 + m^2\right\}} \left\{ (-1)^n W_{m,\lambda} - W_{m,0} \right\} \right] \sin \frac{n\pi}{\lambda} y \quad (5)$$

ここで,  $\eta = y/\lambda$  とすれば,

$$\frac{2}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n\pi}{\lambda}\right)}{\left\{\left(\frac{n\pi}{\lambda}\right)^2 + m^2\right\}} \sin \frac{n\pi}{\lambda} y = \frac{y \sinh m(2\lambda - y) - (2\lambda - y) \sinh my}{2\lambda^2 m (\cosh 2\lambda m - 1)} = \lambda^2 P_m(\eta) \quad (6)$$

と置くと,

$$\frac{2}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{n\pi}{\lambda}\right)}{\left\{\left(\frac{n\pi}{\lambda}\right)^2 + m^2\right\}} \sin \frac{n\pi}{\lambda} y = -\lambda^2 P_m(1-\eta) \quad (7)$$

又, 更に

$$\frac{2}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n\pi}{\lambda}\right)}{\left\{\left(\frac{n\pi}{\lambda}\right)^2 + m^2\right\}} \sin \frac{n\pi}{\lambda} y = \frac{\sinh m(\lambda - y)}{\sinh m\lambda} \\ = Q_m^*(\eta) \quad (8)$$

$$\frac{2}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{n\pi}{\lambda}\right)}{\left\{\left(\frac{n\pi}{\lambda}\right)^2 + m^2\right\}} \sinh \frac{n\pi}{\lambda} y = -Q_m^*(1-\eta) \quad (9)$$

(6) 式, (7) 式, (8) 式, (9) 式を (5) 式に代入すれば,

$$W_m = W_{m,0} Q_m^*(\eta) + W_{m,\lambda} Q_m^*(1-\eta) \\ - \lambda^2 \left\{ \frac{d^2 W_m}{dy^2} - m^2 W_m \right\}_0 P_m(\eta)$$

$$W_m = W_{m,0} \times f^{(1)}(\eta) + W_{m,\lambda} \times f^{(1)}(1-\eta) - \left( \frac{d^2 W_m}{dy^2} \right)_0 \times \lambda^2 f^{(3)}(\eta) - \left( \frac{d^2 W_m}{dy^2} \right)_\lambda \times \lambda^2 f^{(3)}(1-\eta) \quad (14)$$

簡単のために,  $d^2 w/dy^2 = -M^*/N$  と置き, (14) 式を逆変換すると, ( $N = Eh^3/12(1-\nu^2)$ ),

$$w = w_0 f^{(1)}(\eta) + w_\lambda f^{(1)}(1-\eta) + \frac{M_0^* \lambda^2}{N} f^{(3)}(\eta) + \frac{M_\lambda^* \lambda^2}{N} f^{(3)}(1-\eta) \quad (15)$$

次に,  $\Delta w$  を Fourier 変換し, (10) 式を代入すると,

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ = \int_{-\infty}^{\infty} (-m^2) W_m e^{-imx} dm + \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{d^2 W_m}{dy^2} \right) e^{-imx} dm \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \left\{ \frac{d^2 W_m}{dy^2} - m^2 W_m \right\}_0 \left\{ \lambda^2 m^2 P_m(\eta) - \lambda^2 \ddot{P}_m(\eta) \right\} \right. \\ \left. + \left\{ \frac{d^2 W_m}{dy^2} - m^2 W_m \right\}_\lambda \left\{ \lambda^2 m^2 P_m(1-\eta) - \lambda^2 \ddot{P}_m(1-\eta) \right\} \right] e^{-imx} dm \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \left\{ \frac{d^2 W_m}{dy^2} - m^2 W_m \right\}_0 Q_m^*(\eta) + \left\{ \frac{d^2 W_m}{dy^2} - m^2 W_m \right\}_\lambda Q_m^*(1-\eta) \right] e^{-imx} dm \quad (16)$$

(16) 式に (10) 式を代入し,  $d^2 w/dy^2 = -M^*/N$  と置くと,

$$-\lambda^2 \left\{ \frac{d^2 W_m}{dy^2} - m^2 W_m \right\}_\lambda P_m(1-\eta) \quad (10)$$

$P_m(\eta)$ ,  $P_m(1-\eta)$ ,  $Q_m^*(\eta)$ ,  $Q_m^*(1-\eta)$  をベルヌーイの多項式に展開して, 微小項を無視すると,

$$\left. \begin{aligned} Q_m^*(\eta) &= \lambda^2 \left\{ m^2 P_m(\eta) - \ddot{P}_m(\eta) \right\} \\ &= f^{(1)}(\eta) - \lambda^2 m^2 f^{(3)}(\eta) \\ Q_m^*(1-\eta) &= \lambda^2 \left\{ m^2 P_m(1-\eta) - \ddot{P}_m(1-\eta) \right\} \\ &= f^{(1)}(1-\eta) - \lambda^2 m^2 f^{(3)}(1-\eta) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} P_m(1-\eta) &= f^{(3)}(1-\eta) \\ P_m(\eta) &= f^{(3)}(\eta) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

ここで,

$$\left. \begin{aligned} f^{(1)}(\eta) &= 1-\eta, \quad f^{(1)}(1-\eta) = \eta \\ f^{(3)}(\eta) &= \frac{1}{6} \eta(1-\eta)(2-\eta) \\ f^{(3)}(1-\eta) &= \frac{1}{6} \eta(1-\eta^2) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

(10) 式に (11) 式, (12) 式を代入すると,

$$\begin{aligned}
\Delta w &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \left\{ \frac{d^2 W_m}{dy^2} - m^2 W_m \right\}_0 \left\{ f^{(1)}(\eta) - \lambda^2 m^2 f^{(3)}(\eta) \right\} \right. \\
&\quad \left. + \left\{ \frac{d^2 W_m}{dy^2} - m^2 W_m \right\}_\lambda \left\{ f^{(1)}(1-\eta) - \lambda^2 m^2 f^{(3)}(1-\eta) \right\} \right] e^{-imx} dm \\
&= \left\{ -\frac{M_0^*}{N} + \ddot{w}_0 \right\} f^{(1)}(\eta) + \left\{ -\frac{M_\lambda^*}{N} + \ddot{w}_\lambda \right\} f^{(1)}(1-\eta) + \left\{ -\frac{\dot{M}_0^* \lambda^2}{N} + \ddot{w}_0 \lambda^2 \right\} f^{(3)}(\eta) \\
&\quad + \left\{ -\frac{\dot{M}_\lambda^*}{N} + \ddot{w}_\lambda \lambda^2 \right\} f^{(3)}(1-\eta)
\end{aligned} \tag{17}$$

(15) 式から撓角  $\theta$  を求めると、

$$\begin{aligned}
\theta_{0,\lambda} &= \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{w_\lambda - w_0}{\lambda} + \frac{2M_0^* \lambda}{6N} + \frac{M_\lambda^* \lambda}{6N} \\
\theta_{\lambda,0} &= \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=\lambda} = \frac{w_\lambda - w_0}{\lambda} - \frac{M_0^* \lambda}{6N} - \frac{2M_\lambda^* \lambda}{6N}
\end{aligned}$$

即ち、帯板の境界  $r$  点では、

$$\left. \begin{aligned} \theta_{r,r+1} &= \frac{w_{r+1} - w_r}{\lambda} + \frac{2M_r^* \lambda}{6N} + \frac{M_{r+1}^* \lambda}{6N} \\ \theta_{r,r-1} &= \frac{w_r - w_{r-1}}{\lambda} - \frac{M_{r-1}^* \lambda}{6N} - \frac{2M_r^* \lambda}{6N} \end{aligned} \right\} \tag{18}$$

又、剪断力を  $Q$  とすれば、

$$Q = -N \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right) = -N \frac{\partial \Delta w}{\partial y}$$

即ち、帯板の境界  $r$  点では

$$\left. \begin{aligned} Q_{r,r+1} &= \frac{M_{r+1}^* - M_r^*}{\lambda} - \frac{N(\ddot{w}_{r+1} - \ddot{w}_r)}{\lambda} + \frac{2\lambda(\dot{M}_r^* - N\ddot{w}_r)}{6} + \frac{\lambda(\dot{M}_{r+1}^* - N\ddot{w}_{r+1})}{6} \\ Q_{r,r-1} &= \frac{M_r^* - M_{r-1}^*}{\lambda} - \frac{N(\ddot{w}_r - \ddot{w}_{r-1})}{\lambda} - \frac{\lambda(\dot{M}_{r-1}^* - N\ddot{w}_{r-1})}{6} - \frac{2\lambda(\dot{M}_r^* - N\ddot{w}_r)}{6} \end{aligned} \right\} \tag{19}$$

### 3. つり合条件式及び $w_r$ と $M_r^*$ の Fourier 変換

帯板の境界  $r$  点で撓角が連続していることを考慮すれば (18) 式から

$$\theta_{r,r+1} - \theta_{r,r-1} = 0$$

故に

$$\frac{w_{r+1} - 2w_r + w_{r-1}}{\lambda} + \frac{\lambda}{6N} (M_{r+1}^* + 4M_r^* + M_{r-1}^*) = 0 \tag{20}$$

荷重は  $r$  点に作用するものとし、 $P_r$  であらわせば、帯板の  $r$  点において、剪断力は等しいから (19) 式より

$$Q_{r,r+1} - Q_{r,r-1} = -P_r$$

故に、

$$\frac{M_{r+1}^* - 2M_r^* + M_{r-1}^*}{\lambda} - \frac{N}{\lambda} (\ddot{w}_{r+1} - 2\ddot{w}_r + \ddot{w}_{r-1}) + \frac{\lambda}{6} (\dot{M}_{r+1}^* + 4\dot{M}_r^* + \dot{M}_{r-1}^*) - \frac{\lambda N}{6} (\ddot{w}_{r+1} + 4\ddot{w}_r + \ddot{w}_{r-1}) = -P_r \tag{21}$$

(20) 式、(21) 式をそれぞれ  $x$  方向に Fourier 変換し、更に  $r$  方向に Fourier 定和分変換をすると、

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\lambda} \left[ \sin \frac{i\pi}{n} \left\{ (-1)^k \overline{w}_n - \overline{w}_0 \right\} + D_k S_k [\overline{w}_{r,m}] \right] - \frac{\lambda}{6N} \left[ \sin \frac{i\pi}{n} \left\{ (-1)^k \overline{M}_n^* - \overline{M}_0^* \right\} + D_k S_k [\overline{M}_{r,m}^*] \right] \\
& + \frac{\lambda}{N} S_k [\overline{M}_{r,m}^*] = 0
\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\lambda} \left[ \sin \frac{i\pi}{n} \left\{ (-1)^k \overline{M}_n^* - \overline{M}_0^* \right\} + D_k S_k [\overline{M}_{r,m}^*] \right] - \frac{\lambda}{N} \left( \frac{m\pi}{l} \right)^2 \left[ \sin \frac{i\pi}{n} \left\{ (-1)^k \overline{w}_n - \overline{w}_0 \right\} + D_k S_k [\overline{w}_{r,m}] \right] \\
& + \frac{\lambda}{6} \left( \frac{m\pi}{l} \right)^2 \left[ \sin \frac{i\pi}{n} \left\{ (-1)^k \overline{M}_n^* - \overline{M}_0^* \right\} + D_k S_k [\overline{M}_{r,m}^*] \right] - \lambda \left( \frac{m\pi}{l} \right)^2 S_k [\overline{M}_{r,m}^*] \\
& + \frac{\lambda N}{6} \left( \frac{m\pi}{l} \right)^4 \left[ \sin \frac{i\pi}{n} \left\{ (-1)^k \overline{w}_n - \overline{w}_0 \right\} + D_k S_k [\overline{w}_{r,m}] \right] - \lambda N \left( \frac{m\pi}{l} \right)^4 S_k [\overline{w}_{r,m}] + S_k [\overline{P}_{r,m}] = 0
\end{aligned} \tag{23}$$

(22) 式, (23) 式から  $S_\ell[\bar{M}_{r,m}^*]$  と  $S_\ell[\bar{w}_{r,m}]$  が求まり, 逆変換により  $w_r, M_r^*$  が求まる。

$$\left. \begin{aligned} M_r^*(x) &= \frac{2}{n} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{n-1} S_\ell[\bar{M}_{r,m}^*] \sin \frac{i\pi}{n} r \sin \frac{m\pi}{l} x \\ w_r(x) &= \frac{2}{n} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{n-1} S_\ell[\bar{w}_{r,m}] \sin \frac{i\pi}{n} r \sin \frac{m\pi}{l} x \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} M_y &= -N \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ &= M_r^*(x) - N\nu \frac{\partial^2 w_r(x)}{\partial x^2} \\ M_x &= \nu M_r^*(x) - N \frac{\partial^2 w_r(x)}{\partial x^2} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

#### 4. 境界条件

(i) 固定端の場合

$$\left. \begin{aligned} \theta_{n,n-1} &= 0 \\ w_n &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

(ii) 自由端の場合

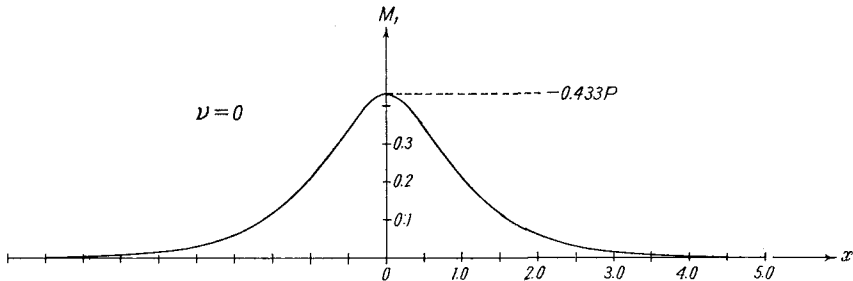
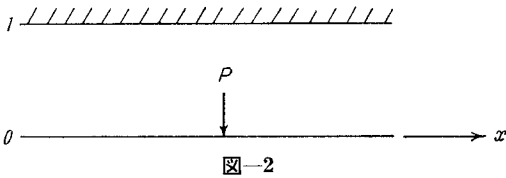
$$\left. \begin{aligned} M_0^* - N\nu\ddot{w}_0 &= 0 \\ R_0 + \left( \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right)_0 &= Q_{0,1} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

(iii) 単純支持の場合

$$\left. \begin{aligned} w_0 &= 0 & w_n &= 0 \\ M_0^* &= 0 & M_n^* &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

#### 5. 数値計算例

図-2 の様な半無限カンティレバー板の自由端に, 集中荷重  $P$  が作用する場合の固定端モーメント  $M_1$  と, 自由端のたわみ  $w_0$  を, 分割せず 1 枚の帯板として計算した。



(18) 式, (19) 式から

$$\theta_{1,0} = \frac{w_1 - w_0}{\lambda} - \frac{\lambda}{6N} (2M_1^* + M_0^*) \quad (29)$$

$$\begin{aligned} Q_{0,1} &= \frac{M_1^* - M_0^*}{\lambda} - \frac{N(\ddot{w}_1 - \ddot{w}_0)}{\lambda} + \frac{2\lambda(\dot{M}_0^* - N\ddot{w}_0)}{6} \\ &\quad + \frac{\lambda(\dot{M}_1^* - N\ddot{w}_1)}{6} \end{aligned} \quad (30)$$

(26) 式, (27) 式から, 境界条件は

$$\left. \begin{aligned} \theta_{1,0} &= 0 \\ w_1 &= 0 \\ M_0^* &= N\nu\ddot{w}_0 \\ -\frac{P}{2} &= Q_{0,1} - \left( \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right)_0 \\ &= Q_{0,1} - N(1-\nu)\ddot{\theta}_{0,1} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

(29) 式, (30) 式に (31) 式を考慮すれば, (29) 式から

$$-\frac{w_0}{\lambda} - \frac{\lambda}{6N} (2M_1^* + N\nu\ddot{w}_0) = 0 \quad (32)$$

(30) 式から

$$\begin{aligned} \frac{M_1^* - N\nu\ddot{w}_0}{\lambda} + \frac{N(2-\nu)\ddot{w}_0}{\lambda} - \frac{2N\lambda\ddot{w}_0}{6} \\ + \frac{\nu\lambda}{6} (2N\nu\ddot{w}_0 + \dot{M}_1^*) = -\frac{P}{2} \end{aligned} \quad (33)$$

(32) 式, (33) 式をそれぞれ  $x$  方向に Fourier 変換すると

$$\left( \frac{1}{\lambda} - \frac{\nu\lambda}{6} \alpha^2 \right) \bar{w}_0 + \frac{\lambda \bar{M}_1^*}{3N} = 0 \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{\nu\lambda}{6} \alpha^2 \right) \bar{M}_1^* + \left\{ \frac{2N(\nu-1)}{\lambda} \right. \\ \left. + \frac{N\lambda(\nu^2-1)}{3} \right\} \alpha^2 \bar{w}_0 = -\frac{\bar{P}}{2} \end{aligned} \quad (35)$$

(34) 式, (35) 式を  $\bar{M}_1^*, \bar{w}_0$  について解き,  $\alpha\lambda = \bar{\alpha}, \nu = 0$  と置くと,

$$\left. \begin{aligned} \bar{M}_1^* &= -\frac{\bar{P}\lambda}{2} \times \frac{9}{(\bar{\alpha}^2 + 3)^2} \\ \bar{w}_0 &= \frac{\bar{P}\lambda^3}{2N} \times \frac{3}{(\bar{\alpha}^2 + 3)^2} \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

(36) 式を逆変換すると

$$\begin{aligned} M_1^* &= -\frac{P}{2} \times \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{9}{(\bar{\alpha}^2 + 3)^2} \cos \alpha x d\bar{\alpha} \\ &= -\frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{3}x)}{4} e^{-\sqrt{3}x} \times P \end{aligned}$$

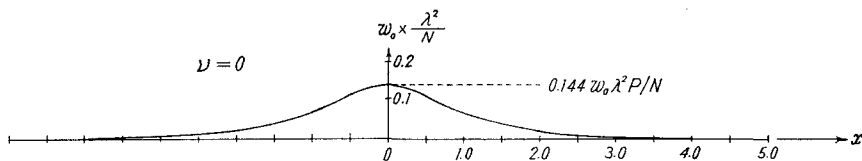


図-4 自由端におけるたわみ  $w_0$

$w=0$  だから, (25) 式から  $M=M_1^*$

$$w_0 = \frac{P\lambda^2}{2N} \times \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{3}{(\bar{a}^2+3)^2} \cos \alpha x d\bar{a}$$

$$= \frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{3}x)}{12} e^{-\sqrt{3}x} \times \frac{\lambda^2 P}{N}$$

計算結果を図-3, 図-4 に示す。

$x=0$  のとき  $M)_{\max} = -0.433P$

$x=0$  のとき  $w_0)_{\max} = (0.144 \times \lambda^2 P)/N$

即ち,  $M_{\max} = -0.465P$  に対して, 分割せず, 1 枚の帯板とみなして計算した場合でも, 本方法は  $M_{\max} = -0.433P$  で, 誤差 6.8% となり, かなり良い近似値を与えることが明らかとなった。

実用上から考えて, この程度の近似値であるならば, 充分と考える。

尚, 種々の境界条件における他の平板の応力解析計算例は他の機会に発表する。

## 6. 結 び

本方法では,  $n$  分割の場合,  $(n-1)$  個の有限級数和を求めるのみであり, 定積分変換を用いることにより, 連立方程式の元数も少なくできる。

又, 変断面にも容易に適用できる。

半無限カンティレバー板について, K. Girkmann の解

## 参 考 文 献

- 1) S. G. Nomachi; A Note on Finite Fourier Transform Concerning Finite Integration.
- 2) Timoshenko, Krieger: Theory of Plates and Shells.
- 3) Karl. Girkmann: Flächentragwerke.