

# 対称性のある骨組構造の変形法による 解析方法の研究 (第1報)

正 員 渡 辺 昇\*  
正 員 ○薄 木 征 三\*\*  
学生員 日 野 英 彦\*\*\*

## 1. ま え が き

骨組構造物をマトリックス法(直接剛性法)を用いて解く場合、節点数が数十、数百になると非常に大きな多元連立方程式を解く必要が生じる。このような場合、大型電子計算機が手近に使えるなら問題はないが、そうでない場合、あるいは中型程度の電子計算機しかない場合は方程式の元数を小さくする工夫を必要とする。特に構造物が対称形ならば元数を半分程度、従って DIMENSION で言うならば 1/4 程度に減少させることが可能である。この問題については文献 1) 等にも若干説明されているが、対称形の種類によって取り扱いが異なる点があるので、以下簡単な対称構造物を例にとりて説明したい。

## 2. 記 号

以下で用いる記号の意味はつぎのとおりである。

$\{X\}$ : 外力(反力を含む)列ベクトル,

$[K]$ : 剛性マトリックス,

$\{u\}$ : 節点変位列ベクトル,

$A_i E_i$ : 部材  $i$  の伸び剛性,

$l_i$ : 部材  $i$  の長さ,

$\lambda_i, \mu_i$ : 部材  $i$  の  $x$  軸,  $y$  軸に対する方向余弦。

## 3. 対称トラスの剛性マトリックス

### 3-1 対称荷重の作用する場合 (Case 1)

具体的な例をあげて説明するのが理解が容易と思われるので Case 1 として 図-1(a) に示すような対称トラスを考察する。この場合は対称軸上に部材が無い場合である。直接剛性法によって構造全体に対する剛性マトリックスは

$$\{X\} = [K] \{u\} \quad (1)$$

図-1(a) の場合は節点数が 5 コであるので  $[K]$  は  $10 \times 10$  次の正方マトリックスである。

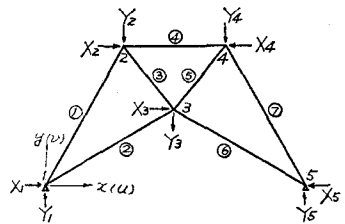


図-1(a)

これを境界条件として与えられた零変位ベクトル  $\{u_\beta\}$  と、未知変位ベクトル  $\{u_\alpha\}$  の部分に分けて表わすと、

$$\begin{Bmatrix} X_\alpha \\ X_\beta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{\alpha\alpha} & K_{\beta\alpha} \\ K_{\beta\alpha} & K_{\beta\beta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_\alpha \\ u_\beta=0 \end{Bmatrix}, \quad (2)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} \{X_\alpha\} &= [X_2 \ Y_2 \ X_3 \ Y_3 \ X_4 \ Y_4]^T, \\ \{X_\beta\} &= [X_1 \ Y_1 \ X_5 \ Y_5]^T, \\ \{u_\alpha\} &= [u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3 \ u_4 \ v_4]^T, \\ \{u_\beta\} &= [u_1 \ v_1 \ u_5 \ v_5]^T, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

である。

又、 $[K]$  の内容を簡単に表示するために次のような記号を導入する。例えば部材 ① については

$$\begin{bmatrix} (A_1 E_1 / l_1) \cdot \lambda_1^2 \\ (A_1 E_1 / l_1) \cdot \mu_1^2 \\ (A_1 E_1 / l_1) \cdot \lambda_1 \mu_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \textcircled{1} \\ \Delta \\ \textcircled{1} \end{bmatrix}$$

部材 2, 3, ..., 7 についても同様とする。

従って  $[K]$  は次式のように表わされる。

\* 北海道大学工学部土木工学科 教授

\*\* 北海道大学工学部土木工学科 助手

\*\*\* 北海道大学大学院修士課程

$$[K] = \begin{bmatrix} \textcircled{1}+\textcircled{2} & \textcircled{1}+\textcircled{2} & -\textcircled{1} & -\textcircled{1} & -\textcircled{2} & -\textcircled{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \textcircled{1}+\textcircled{2} & \triangle+\triangle & -\textcircled{1} & -\triangle & -\textcircled{2} & -\triangle & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\textcircled{1} & -\textcircled{1} & \textcircled{1}+\textcircled{3} & \textcircled{1}+\textcircled{3} & -\textcircled{3} & -\textcircled{3} & -\textcircled{4} & -\textcircled{4} & 0 & 0 \\ -\textcircled{1} & -\triangle & \textcircled{1}+\textcircled{3} & \triangle+\triangle & -\textcircled{3} & -\triangle & -\textcircled{4} & -\triangle & 0 & 0 \\ -\textcircled{2} & -\textcircled{2} & -\textcircled{3} & -\textcircled{3} & \textcircled{2}+\textcircled{3} & \textcircled{2}+\textcircled{3} & -\textcircled{5} & -\textcircled{5} & -\textcircled{6} & -\textcircled{6} \\ -\textcircled{2} & -\triangle & -\textcircled{3} & -\triangle & \textcircled{2}+\textcircled{3} & \triangle+\triangle & -\textcircled{5} & -\triangle & -\textcircled{6} & -\triangle \\ 0 & 0 & -\textcircled{4} & -\triangle & -\textcircled{5} & -\textcircled{5} & \textcircled{4}+\textcircled{7} & \textcircled{4}+\textcircled{7} & -\textcircled{7} & -\textcircled{7} \\ 0 & 0 & -\textcircled{4} & -\triangle & -\textcircled{5} & -\triangle & \textcircled{4}+\textcircled{7} & \triangle+\triangle & -\textcircled{7} & -\triangle \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\textcircled{6} & -\textcircled{6} & -\textcircled{7} & -\textcircled{7} & \textcircled{7}+\textcircled{6} & \textcircled{7}+\textcircled{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\textcircled{6} & -\triangle & -\textcircled{7} & -\triangle & \textcircled{7}+\textcircled{6} & \triangle+\triangle \end{bmatrix} \quad (5)$$

列と列、行と行の入れ換えを行えば

$$[K_{\alpha\alpha}] = \begin{bmatrix} \textcircled{1}+\textcircled{3} & \textcircled{1}+\textcircled{3} & -\textcircled{3} & -\textcircled{3} & -\textcircled{4} & -\textcircled{4} \\ \textcircled{1}+\textcircled{3} & \triangle+\triangle & -\textcircled{3} & -\triangle & -\textcircled{4} & -\triangle \\ -\textcircled{3} & -\textcircled{3} & \textcircled{2}+\textcircled{3} & \textcircled{2}+\textcircled{3} & -\textcircled{5} & -\textcircled{5} \\ -\textcircled{3} & -\triangle & \textcircled{2}+\textcircled{3} & \triangle+\triangle & -\textcircled{5} & -\triangle \\ -\textcircled{4} & -\triangle & -\textcircled{5} & -\textcircled{5} & \textcircled{4}+\textcircled{7} & \textcircled{4}+\textcircled{7} \\ -\textcircled{4} & -\triangle & -\textcircled{5} & -\triangle & \textcircled{4}+\textcircled{7} & \triangle+\triangle \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$[K_{\beta\beta}] = \begin{bmatrix} -\textcircled{1} & -\textcircled{1} & -\textcircled{2} & -\textcircled{2} & 0 & 0 \\ -\textcircled{1} & -\triangle & -\textcircled{2} & -\triangle & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\textcircled{6} & -\textcircled{6} & -\textcircled{7} & -\textcircled{7} \\ 0 & 0 & -\textcircled{6} & -\triangle & -\textcircled{7} & -\triangle \end{bmatrix} \quad (7)$$

$[K_{\alpha\beta}] = [K_{\beta\alpha}]^T$ , 及び  $[K_{\beta\beta}]$  は今の場合, 計算には影響がない (支点が零変位であるから) ので省略する。

$[K_{\alpha\alpha}]$ ,  $[K_{\beta\alpha}]$  が知られると, 未知変位  $\{u_\alpha\}$  及び支点反力  $\{X_\beta\}$  は式 (2) より

$$\{u_\alpha\} = [K_{\alpha\alpha}]^{-1} \cdot \{X_\alpha\}, \quad (8)$$

$$\{X_\beta\} = [K_{\beta\alpha}] \{u_\alpha\} = [K_{\beta\alpha}] [K_{\alpha\alpha}]^{-1} \cdot \{X_\alpha\} \quad (9)$$

から求められる。

荷重が対称の場合は, 荷重及び反力については,

$$\begin{Bmatrix} X_4 \\ Y_4 \\ X_5 \\ Y_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -X_2 \\ Y_2 \\ -X_1 \\ Y_1 \end{Bmatrix} \quad (10)$$

変位については

$$\begin{Bmatrix} u_4 \\ v_4 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -u_2 \\ v_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (11)$$

となる。

構造が対称であることは式 (4) の約束を用いると

$$\begin{bmatrix} \textcircled{1} & \triangle & \textcircled{1} \\ \textcircled{2} & \triangle & \textcircled{2} \\ \textcircled{3} & \triangle & \textcircled{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \textcircled{7} & \triangle & -\textcircled{7} \\ \textcircled{6} & \triangle & -\textcircled{6} \\ \textcircled{5} & \triangle & -\textcircled{5} \end{bmatrix} \quad (12)$$

以上によって  $[K_{\alpha\alpha}]$  と  $[K_{\beta\alpha}]$  について列と列を加え,  $u_3$  の列を除いたものを各々  $[K'_{\alpha\alpha}]$ ,  $[K'_{\beta\alpha}]$  とすると

$$[K'_{\alpha\alpha}] = \begin{bmatrix} \textcircled{1}+\textcircled{3} & \textcircled{1}+\textcircled{3} & -\textcircled{3} \\ \textcircled{1}+\textcircled{3} & \triangle+\triangle & -\triangle \\ 0 & 0 & 0 \\ -2\textcircled{3} & -2\triangle & 2\triangle+2\triangle \\ -\textcircled{1}-\textcircled{3} & -\textcircled{1}-\textcircled{3} & \textcircled{3} \\ \textcircled{1}+\textcircled{3} & \triangle+\triangle & -\triangle \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$[K_{\alpha\alpha}] = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & -\Delta & -\Delta \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -\Delta & -\Delta \end{bmatrix} \quad (14)$$

全体を書くと

$$\begin{Bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ X_3 \\ Y_3 \\ -X_2 \\ Y_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \textcircled{1}+\textcircled{3} & 1+3 & -3 \\ +2\textcircled{4} & \Delta+\Delta & -\Delta \\ 1+3 & \Delta+\Delta & -\Delta \\ +2\textcircled{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2\textcircled{3} & -2\Delta & 2(\Delta+\Delta) \\ -\textcircled{1}-\textcircled{3} & -1-3 & 3 \\ -2\textcircled{4} & 1+3 & \Delta+\Delta \\ -2\textcircled{4} & \Delta+\Delta & -\Delta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ V_3 \end{Bmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ -X_1 \\ Y_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & -\Delta & -\Delta \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -\Delta & -\Delta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ V_3 \end{Bmatrix} \quad (16)$$

式(15)で、 $\textcircled{4}=\Delta=0$ であることに注意すると第1, 第2行は、各々第5, 第6行と同一であり、第3行は  $X_3=0$  であるから自動的に満足している。

式(16)で第1, 第2行は各々第3, 第4行と同一である。従って式(15), (16)は各々下記の式(17), (18)と同値である。

$$\begin{Bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Y_3/2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \textcircled{1}+\textcircled{3} & 1+3 & -3 \\ +2\textcircled{4} & \Delta+\Delta & -\Delta \\ 1+3 & \Delta+\Delta & -\Delta \\ -3 & \Delta & \Delta+\Delta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ V_3 \end{Bmatrix} \quad (17)$$

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & -\Delta & -\Delta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ V_3 \end{Bmatrix} \quad (18)$$

以上の過程をプログラミングの中で行なうことは、容易でないし、非効率なので別の方法で導いてみよう。

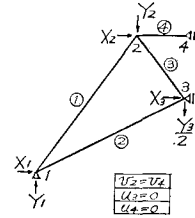


図-1(b)

図-1(a)のかわりに図-1(b)のようなモデルを考える。図-1(b)で部材①, ②, ③の全ての定数 ( $AE/L$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$ ) は図-1(a)の対応する部材と同一であり、部材④は長さが  $1/2$  となっている。図-1(b)においては、

$$\begin{cases} \{X_\alpha\} = [X_2 & Y_2 & Y_3 & Y_4]^T, \\ \{X_\beta\} = [X_1 & Y_1 & X_3 & X_4]^T, \\ \{u_\alpha\} = [u_2 & v_2 & v_3 & v_4]^T, \\ \{u_\beta\} = [u_1 & v_1 & u_3 & u_4]^T \end{cases} \quad (19)$$

であるから、図-1(b)の構造全体の剛性マトリックス  $[K]$  は、式(20)となる。

$$[K] = \begin{bmatrix} \textcircled{1}+\textcircled{2} & 1+2 & -1 & -1 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ 1+2 & \Delta+\Delta & -1 & -\Delta & -2 & -\Delta & 0 & 0 \\ -1 & -1 & \textcircled{1}+\textcircled{3} & 1+3 & -3 & -3 & -2\textcircled{4} & -2\textcircled{4} \\ -1 & -\Delta & 1+3 & \Delta+\Delta & -3 & -\Delta & -2\textcircled{4} & -2\Delta \\ -2 & -2 & -3 & -3 & \textcircled{2}+\textcircled{3} & 2+3 & 0 & 0 \\ -2 & -\Delta & -3 & -\Delta & 2+3 & \Delta+\Delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\textcircled{4} & -2\textcircled{4} & 0 & 0 & 2\textcircled{4} & 2\textcircled{4} \\ 0 & 0 & -2\textcircled{4} & -2\Delta & 0 & 0 & 2\textcircled{4} & 2\Delta \end{bmatrix} \quad (20)$$

$[K_{\alpha\alpha}]$ ,  $[K_{\beta\alpha}]$  は式(21), (22)のようである。

$$[K_{\alpha\alpha}] = \begin{bmatrix} \textcircled{1}+\textcircled{3} & 1+3 & -3 & -2\textcircled{4} \\ +2\textcircled{4} & \Delta+\Delta & -\Delta & -2\Delta \\ 1+3 & \Delta+\Delta & -\Delta & -2\Delta \\ +2\textcircled{4} & \Delta+\Delta & 0 & 0 \\ -3 & -\Delta & \Delta+\Delta & 0 \\ -2\textcircled{4} & -2\Delta & 0 & 2\Delta \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$[K_{\beta\alpha}] = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & -\Delta & -\Delta & 0 \\ -3 & -3 & 2+3 & 0 \\ -2\textcircled{4} & -2\textcircled{4} & 0 & 2\textcircled{4} \end{bmatrix} \quad (22)$$

式(21), (22)で  $v_4=v_2$  として列と列を加えあわせて全体

を書くと、

$$\begin{Bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Y_3/2 \\ Y_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \textcircled{1} + \textcircled{3} & \textcircled{1} + \textcircled{3} & -\textcircled{3} \\ \textcircled{1} + \textcircled{3} & \textcircled{1} + \textcircled{3} & -\textcircled{3} \\ -\textcircled{3} & -\textcircled{3} & \textcircled{1} + \textcircled{3} \\ -2\textcircled{4} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ V_3 \end{Bmatrix} \quad (23)$$

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_3 \\ X_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\textcircled{1} & -\textcircled{1} & -\textcircled{2} \\ -\textcircled{1} & -\textcircled{1} & -\textcircled{1} \\ -\textcircled{3} & -\textcircled{3} & \textcircled{2} + \textcircled{3} \\ -2\textcircled{4} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ V_3 \end{Bmatrix} \quad (24)$$

式(23)で  $\textcircled{4} = \textcircled{1} = 0$  とし、 $Y_4 = 0$  とおくと第4行は自動的に満たされている。従って式(23)は式(25)に等しい。

$$\begin{Bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Y_3/2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \textcircled{1} + \textcircled{3} & \textcircled{1} + \textcircled{3} & -\textcircled{3} \\ \textcircled{1} + \textcircled{3} & \textcircled{1} + \textcircled{3} & -\textcircled{3} \\ -\textcircled{3} & -\textcircled{3} & \textcircled{1} + \textcircled{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ V_3 \end{Bmatrix} \quad (25)$$

式(24)の第1, 第2行は式(18)に等しい。第3, 第4行は図-1(a)を図-1(b)にモデル化したことによる仮定の反力である。

このようなモデル化は、図-1(a)のような節点数の少ない構造ではその効果は少ないが、例えば図-2(a)のような屋根構造の場合は図-2(b)のようにモデル化できる。前者の場合は節点数は25、後者のそれは14であり、従って  $[K]$  の大きさは前者が  $50 \times 50$ 、後者は  $28 \times 28$  でほぼ  $1/4$

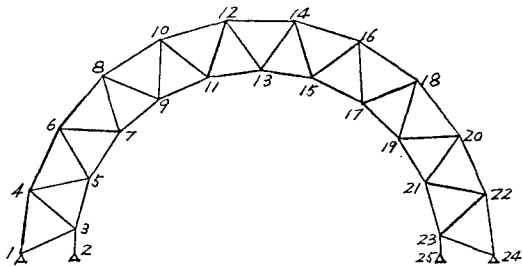


図-2(a)

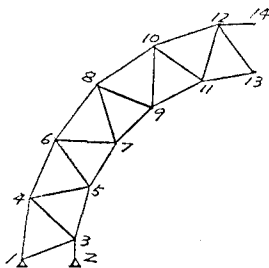


図-2(b)

となる。

### 3-2 対称荷重の作用する場合 (Case 2)

3-1で取りあげた対称形他に図-3(a)に示すような場合がある。つまりこの場合は対称軸に垂直材が1本ある場合である。これは図-3(b)のようにモデル化される。このCase2の場合は式(21), (22)に相当するマトリックス  $[K_{aa}]$ ,  $[K_{\beta a}]$  のみでよく、式(23)以下に至る過程での  $v_4 = v_2$  とするような操作は不要である。注意しなければならないのは、対称軸に一致する部材断面積及び荷重を  $1/2$  とすることである。

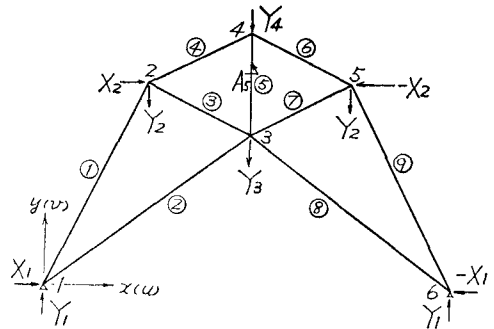


図-3(a)

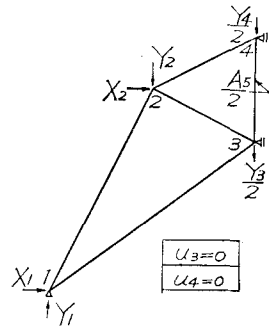


図-3(b)

### 3-3 逆対称荷重の作用する場合 (Case 1)

図-1(a)と同じ構造で荷重が逆対称に作用する場合を図-4(a)に示す。これは図-4(b)のようにモデル化されマトリックスを導くことは割愛するが式(20), (21), (22)に相当するものを導び、 $u_4 = u_2$  として式(23)以下に相当するものを導くとよい。

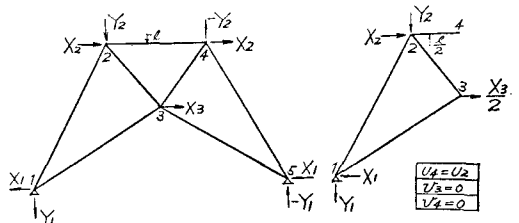


図-4(a)

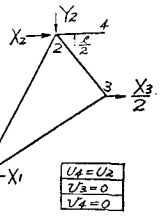


図-4(b)

図-1(a)と図-4(b)の結果を加え合えると図-5に示す一般の非対称荷重が作用する場合の結果が得られる。

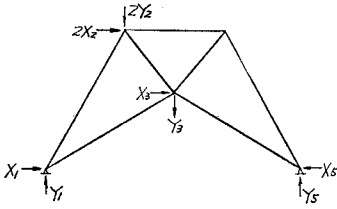


図-5

### 3-4 逆対称荷重の作用する場合 (Case 2)

図-3(a)と同じ構造に荷重が逆対称に作用する場合を図-

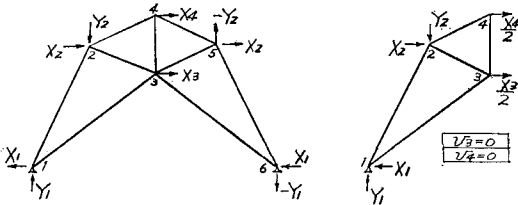
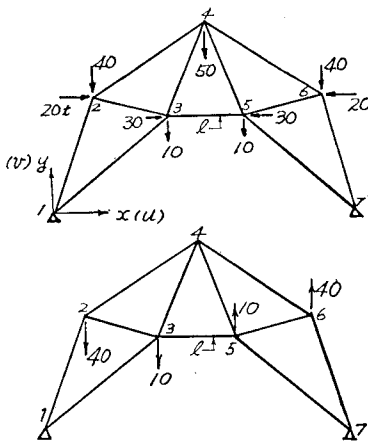
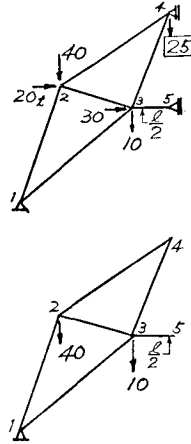


図-6(a)

図-6(b)



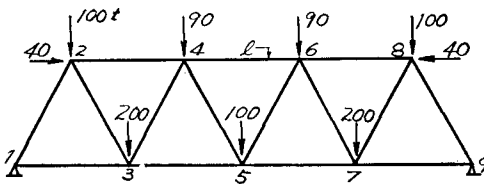
=



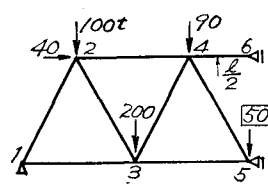
|             |
|-------------|
| $U_4 = 0$   |
| $U_5 = 0$   |
| $U_3 = U_6$ |

|             |
|-------------|
| $U_4 = 0$   |
| $U_5 = 0$   |
| $U_6 = U_3$ |

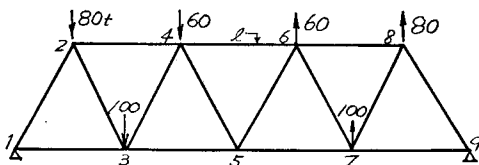
図-8



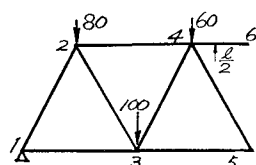
=



|             |
|-------------|
| $U_5 = 0$   |
| $U_6 = 0$   |
| $U_6 = U_4$ |



=



|             |
|-------------|
| $U_5 = 0$   |
| $U_6 = 0$   |
| $U_6 = U_4$ |

図-9

6(a)に示す。これは図-6(b)のようにモデル化される。この場合は、3.2で述べたのと同様の操作でよい。

なお3.3,3.4のいずれの場合も真中の部材には軸力が生じない。

図-3(b)と図-6(b)を加え合えると図-7が得られる。

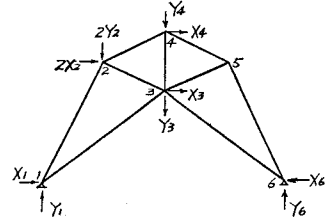


図-7

### 4. 種々の対称構造の例

図-8, 9, 10には種々の対称構造に対称荷重と逆対称荷重の作用する場合について、マトリックス  $[K_{aa}]$  において操作すべき対称条件を右端の  $\square$  内に示す。

図-11 は2軸対称構造の場合であって対称軸上の部材の

断面積、荷重共 1/2 になることは 1 軸対称の場合からも容易に類推されるであろう。

に作用する場合の軸力を示す。この場合は対称軸(面)で部材を切断して 2.1 に従って解析してもよいが (b) 図の □ 内のような条件にしても同じことである。この方が節点数

図-12 は立体トラスの場合であり、単位荷重が  $z$  軸方向

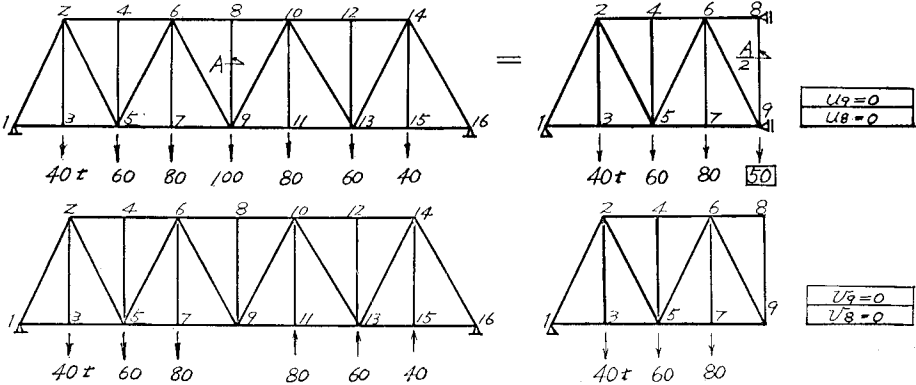


図-10

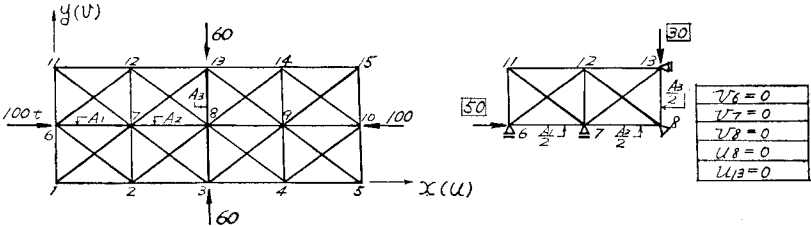


図-11

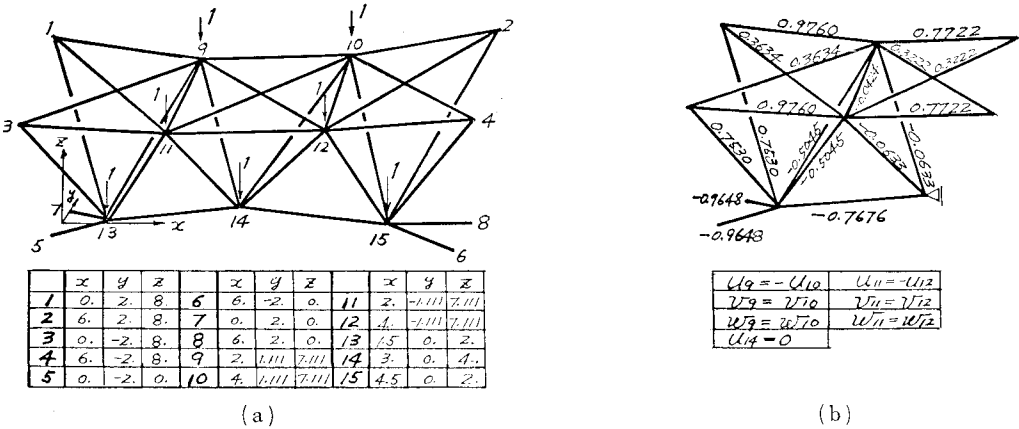


図-12

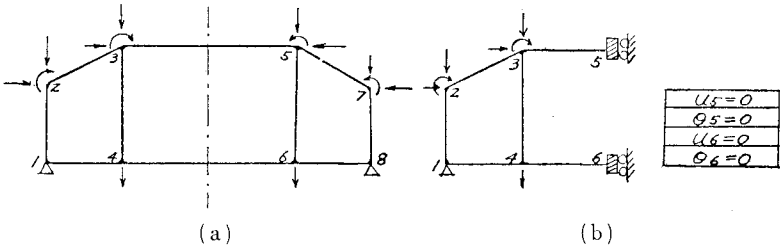


図-13

が増えない点において簡単である。

図-13(a)はラーメンの場合であって、トラスの場合からも類推されるように図-13(b)のように単純化される。

## 5. あとがき

図-1 から図-11 までは、ピン節点の平面トラスの場合、図-12 はピン節点の立体トラスの場合、図-13 は剛節点の平面ラーメンの場合について、それぞれ対称性を利用した簡

便化をはかった。いずれも、計算結果については、電子計算によって検算してある。利用していただければ幸いであると思う。

## 文 献

- 1) 「マトリックス法による構造力学の解法」 H. C. マーチン, 吉識雅夫訳.