

# 連続板の不静定荷重群による一解法

正 員 菅 原 登\*

## 1. ま え が き

連続長方形板については, E. Bittner, G. Fischer, K. Girkmann, U. Wegner, S. Woinowsky-Krieger 等の研究がある。これらの研究は, 基本的には不静定力として曲げモーメントを選び, 撓み角の関係の条件からこの不静定力を求めて解析を進めている。

ここでは, 中間の剛線支持を無限数の点支持の集合と考え, この点支持の間に Lastgruppen を挿入して不静定力を求めた。すなわち, 直交関数である正弦関数を Lastgruppen として選び, 弾性方程式からこの不静定力を求め, 重ね合わせの法則にしたがって撓み曲面の解を誘導した。

簡単な例として, 相対する 2 辺が単純支持され他の 2 辺も単純支持されている等方性の長方形板において, 中間に 1 個の剛線支持を有する連続板の曲げモーメント影響面について述べる。

## 2. 相対する 2 辺が単純支持され他の 2 辺も単純支持されている長方形板に線荷重または集中荷重が作用するときの解

等方性板の撓み曲面  $w$  の満足する基礎微分方程式は次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} &= \frac{p}{K} \\ \text{ここに } p: &\text{ 平板上の任意点に作用する荷重強度} \\ K: &\text{ 平板の曲げ剛度で, 厚さを } h, \text{ 弾性係数を } E, \text{ Poisson's ratio を } \mu \text{ と} \\ &\text{すれば } K = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

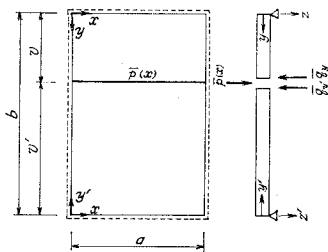


図-1

図-1 の平板において,  $y=v, y'=v'$  に

$$\left. \begin{aligned} \bar{p}(x) &= \sum_n \bar{p}_n \sin \alpha_n x \\ \text{ここに } \bar{p}_n: &\text{ 任意の定数, } \alpha_n = \frac{n\pi}{a}, n=1, 2, 3, \dots \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

が荷重として作用するとき, 平板を  $y=v, y'=v'$  で切り離して考えると, 2 つに分けた平板の撓み曲面には荷重が作用していないから, 式 (1) に属する同次微分方程式の一般解が有効である。したがって,  $y=0, y'=0$  の境界条件と  $y=v, y'=v'$  の連続条件から撓み曲面の解が求められる。

式 (1) に属する同次微分方程式の一般解は, M. Levy の方法により

$$w = \sum_n Y_n(y) \sin \alpha_n x \quad (3)$$

と置いて, 式 (1) に属する同次微分方程式に代入すると

$$\alpha_n^4 Y_n(y) - 2\alpha_n^2 \frac{d^2 Y_n(y)}{dy^2} + \frac{d^4 Y_n(y)}{dy^4} = 0 \quad (4)$$

となる。また,  $D = \frac{d}{dy}$  とすると

$$(a_n^2 - D^2)^2 = 0 \quad (5)$$

となるから,  $D$  は 2 組の等根となる。これを  $+\alpha_n, -\alpha_n, -\alpha_n, +\alpha_n$  とすれば独立解として

\* 北見工業大学 助教授

$$\cosh \alpha_n y, \quad y \sinh \alpha_n y, \quad \sinh \alpha_n y, \quad y \cosh \alpha_n y \quad (6)$$

が得られる。したがって、境界条件より決定される定数を  $A_n, B_n, C_n, D_n$  とし、 $w$  の微分式が整理のときに好都合であるように  $\alpha_n$  を付加すると、式 (1) に属する同次微分方程式の一般解は次のように表わされる。

$$w = \sum_n \frac{1}{\alpha_n^2} (A_n \cosh \alpha_n y + B_n \alpha_n y \sinh \alpha_n y + C_n \sinh \alpha_n y + D_n \alpha_n y \cosh \alpha_n y) \sin \alpha_n x \quad (7)$$

式 (7) から次の微分式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= \sum_n \frac{1}{\alpha_n} (A_n \cosh \alpha_n y + B_n \alpha_n y \sinh \alpha_n y + C_n \sinh \alpha_n y + D_n \alpha_n y \cosh \alpha_n y) \cos \alpha_n x \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= - \sum_n (A_n \cosh \alpha_n y + B_n \alpha_n y \sinh \alpha_n y + C_n \sinh \alpha_n y + D_n \alpha_n y \cosh \alpha_n y) \sin \alpha_n x \\ \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} &= - \sum_n \alpha_n \left[ (A_n + B_n) \sinh \alpha_n y + B_n \alpha_n y \cosh \alpha_n y \right. \\ &\quad \left. + (C_n + D_n) \cosh \alpha_n y + D_n \alpha_n y \sinh \alpha_n y \right] \sin \alpha_n x \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= \sum_n \frac{1}{\alpha_n} \left[ (A_n + B_n) \sinh \alpha_n y + B_n \alpha_n y \cosh \alpha_n y \right. \\ &\quad \left. + (C_n + D_n) \cosh \alpha_n y + D_n \alpha_n y \sinh \alpha_n y \right] \sin \alpha_n x \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= \sum_n \left[ (A_n + 2B_n) \cosh \alpha_n y + B_n \alpha_n y \sinh \alpha_n y \right. \\ &\quad \left. + (C_n + 2D_n) \sinh \alpha_n y + D_n \alpha_n y \cosh \alpha_n y \right] \sin \alpha_n x \\ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} &= \sum_n \alpha_n \left[ (A_n + 3B_n) \sinh \alpha_n y + B_n \alpha_n y \cosh \alpha_n y \right. \\ &\quad \left. + (C_n + 3D_n) \cosh \alpha_n y + D_n \alpha_n y \sinh \alpha_n y \right] \sin \alpha_n x \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

境界条件としては、座標系  $(x, y)$  によって表わされる平板において、 $y=0$  の辺が単純支持の場合は、幾何学的には境界の方向における撓み、撓み角、撓み曲面の曲率は 0 であり、力学的には境界に垂直な方向の曲げモーメントは 0 である。すなわち

$$\langle w \rangle = 0 \quad (9)$$

$$\langle m_y \rangle = 0, \quad \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0 \quad \text{から}$$

$$\left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (10)$$

である。式 (9), (10) の条件を式 (7), (8) に代入して

$$A_n = 0, \quad B_n = 0 \quad (11)$$

となる。同様に座標系  $(x, y')$  によって表わされる平板において、 $y'=0$  の辺も単純支持の場合は

$$A'_n = 0, \quad B'_n = 0 \quad (12)$$

となる。したがって、式 (11), (12) の定数を有する撓み曲面  $w, w'$  は次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq y \leq v \text{ の領域で} \\ w &= \sum_n \frac{1}{\alpha_n^2} (C_n \sinh \alpha_n y + D_n \alpha_n y \cosh \alpha_n y) \sin \alpha_n x \\ 0 \leq y' \leq v' \text{ の領域で} \\ w' &= \sum_n \frac{1}{\alpha_n^2} (C'_n \sinh \alpha_n y' + D'_n \alpha_n y' \cosh \alpha_n y') \sin \alpha_n x \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

連続条件としては、 $y=v, y'=v'$  において、両撓み曲面は連続しなければならないから、幾何学的には切り離れた線の方向における撓み、撓み角、撓み曲率は等しく、この関係は切り離れた線に垂直な方向についてもなりたつ。力学的にはせん断力  $\bar{q}_y, \bar{q}_{y'}$  の和は荷重  $\bar{p}(x)$  に等しい。すなわち

$$\langle w \rangle = \langle w' \rangle, \quad \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) = - \left( \frac{\partial w'}{\partial y'} \right) \quad (14)$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = \left(\frac{\partial^2 w'}{\partial y'^2}\right), \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = \left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2}\right), \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right) = -\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x \partial y'}\right), \quad \bar{q}_y + \bar{q}_{y'} = \bar{p}(x) \text{ から}$$

$$(\Delta w) = (\Delta w'), \quad \left(\frac{\partial(\Delta w)}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial(\Delta w')}{\partial y'}\right) = -\sum_n \frac{\bar{p}_n}{K} \sin \alpha_n x \quad (15)$$

である。式 (14), (15) の条件を式 (7), (8) に代入して

$$\left. \begin{aligned} C_n \sinh \alpha_n v + D_n \alpha_n v \cosh \alpha_n v - C'_n \sinh \alpha_n v' - D'_n \alpha_n v' \cosh \alpha_n v' &= 0 \\ C_n \cosh \alpha_n v + D_n (\cosh \alpha_n v + \alpha_n v \sinh \alpha_n v) \\ &\quad + C'_n \cosh \alpha_n v' + D'_n (\cosh \alpha_n v' + \alpha_n v' \sinh \alpha_n v') = 0 \\ 2D_n \sinh \alpha_n v - 2D'_n \sinh \alpha_n v' &= 0 \\ 2D_n \cosh \alpha_n v + 2D'_n \cosh \alpha_n v' &= -\frac{\bar{p}_n}{K \alpha_n} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

となる。式 (16) から未知定数を求めると

$$\left. \begin{aligned} C_n &= \frac{\bar{p}_n \sinh \alpha_n v'}{2K \alpha_n \sinh \alpha_n b} (1 + \alpha_n b \coth \alpha_n b - \alpha_n v' \coth \alpha_n v') \\ D_n &= -\frac{\bar{p}_n \sinh \alpha_n v'}{2K \alpha_n \sinh \alpha_n b} \\ C'_n &= \frac{\bar{p}_n \sinh \alpha_n v}{2K \alpha_n \sinh \alpha_n b} (1 + \alpha_n b \coth \alpha_n b - \alpha_n v \coth \alpha_n v) \\ D'_n &= -\frac{\bar{p}_n \sinh \alpha_n v}{2K \alpha_n \sinh \alpha_n b} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

が得られるから、相対する 2 辺が単純支持され他の 2 辺も単純支持されている長方形板に、線荷重または集中荷重が作用するときの撓み曲面  $w$ ,  $w'$  の解は、式 (17) を式 (13) に代入して次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq y \leq v \text{ の領域で} \\ w &= \frac{1}{2K} \sum_n \frac{\bar{p}_n \sinh \alpha_n v' \sinh \alpha_n y}{\alpha_n^3 \sinh \alpha_n b} (1 + \alpha_n b \coth \alpha_n b - \alpha_n v' \coth \alpha_n v' - \alpha_n y \coth \alpha_n y) \sin \alpha_n x \\ &= \frac{1}{2K} \sum_n \frac{\bar{p}_n}{\alpha_n^3 \sinh \alpha_n b} \Phi(v', y) \sin \alpha_n x \\ \text{ここに } \Phi(v', y) &= \sinh \alpha_n v' \sinh \alpha_n y (1 + \alpha_n b \coth \alpha_n b - \alpha_n v' \coth \alpha_n v' - \alpha_n y \coth \alpha_n y) \\ 0 \leq y' \leq v' \text{ の領域で} \\ w' &= \frac{1}{2K} \sum_n \frac{\bar{p}_n \sinh \alpha_n v \sinh \alpha_n y'}{\alpha_n^3 \sinh \alpha_n b} (1 + \alpha_n b \coth \alpha_n b - \alpha_n v \coth \alpha_n v - \alpha_n y' \coth \alpha_n y') \sin \alpha_n x \\ &= \frac{1}{2K} \sum_n \frac{\bar{p}_n}{\alpha_n^3 \sinh \alpha_n b} \Phi(v, y') \sin \alpha_n x \\ \text{ここに } \Phi(v, y') &= \sinh \alpha_n v \sinh \alpha_n y' (1 + \alpha_n b \coth \alpha_n b - \alpha_n v \coth \alpha_n v - \alpha_n y' \coth \alpha_n y') \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

ここで、 $y=v$ ,  $y'=v'$  に正弦荷重  $\sin \alpha_i x$  が作用するときは、周期  $2a$  の  $x$  の奇関数としての Fourier 級数で表わすと

$$\bar{p}(x) = \sum_n \bar{p}_n \sin \alpha_n x = \frac{2}{a} \sum_n \left( \int_0^a \sin \alpha_i x \sin \alpha_n x dx \right) \sin \alpha_n x = \left\{ \begin{array}{ll} \sin \alpha_n x & i = n \\ 0 & i \neq n \end{array} \right\} \quad (19)$$

$$\text{ここに } \alpha_i = \frac{i\pi}{a}, \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{a}, \quad i, n = 1, 2, 3, \dots$$

であるから式 (18) に

$$\bar{p}_n = \frac{2}{a} \int_0^a \sin \alpha_i x \sin \alpha_n x dx \quad (20)$$

を代入すればよい。また、 $x=u$ ,  $y=v$  ( $y=v'$ ) の点に集中荷重  $P$  が作用するときは、Fourier 級数展開して

$$\bar{p}(x) = \frac{2P}{a} \sum_n \sin \alpha_n u \sin \alpha_n x \quad (21)$$

であるから式 (18) に

$$\bar{p}_n = \frac{2P}{a} \sin \alpha_n u \quad (22)$$

を代入すればよい。

このようにして、撓み曲面が求められるから、線荷重または集中荷重が作用するときの断面力、反力等を求めることができる。

### 3. 2 径間連続長方形板の撓み曲面影響面

図-2 は中間に 1 個の剛線支持を有する 2 径間連続長方形板であるが、中間の剛線支持を無限数の点支持の集合と考えるとき、これは、無限数の点支持を有する連続板としての取り扱いをすることができる。すなわち、中間の点支持を除いて、相対する 2 辺が単純支持され他の 2 辺も単純支持されている長方形板を基本系とし、代わりに不静定力として、直交関数である正弦関数  $X_i = \sin \alpha_i x$  を挿入する。

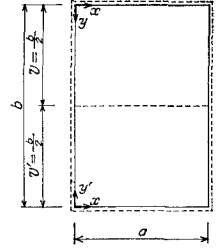


図-2

2 径間連続長方形板の上を、垂直荷重  $P=1$  が作用して移動するときの不静定力影響面、は次の弾性方程式から得られる。

$$AX + PD = 0$$

ここに

$$A = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \cdots & \delta_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \delta_{m1} & \cdots & \delta_{mm} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_m \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \delta_{10} \\ \vdots \\ \delta_{m0} \end{pmatrix}$$

$\delta_{ij}$  = 基本系において、 $X_j = \sin \alpha_j x$  の力と  $X_i = \sin \alpha_i x$  による撓みとの間でなす仕事

$\delta_{i0}$  = 基本系において、 $X_i = \sin \alpha_i x$  による撓み曲面図に相当

$i, j = 1, 2, 3, \dots$

(23)

ここで、 $\delta_{ij}$  は式 (18) の  $\bar{p}_n$  に式 (20) を代入して得た撓みに  $\sin \alpha_j x$  を乗じて、区間  $(0, a)$  にて積分して求められる。このとき、式 (23) の matrix  $A$  は対角線要素のみが値をもち、それ以外の要素は 0 であるから

$$\delta_{ij} = \frac{1}{2K} \int_0^a \left[ \sum_n \frac{\frac{2}{a} \int_0^a \sin \alpha_i x \sin \alpha_n x dx}{\alpha_n^3 \sinh \alpha_n b} \sinh \alpha_n \frac{b}{2} \sinh \alpha_n \frac{b}{2} \left( 1 + \alpha_n b \coth \alpha_n b \right. \right. \\ \left. \left. - \alpha_n \frac{b}{2} \coth \alpha_n \frac{b}{2} - \alpha_n \frac{b}{2} \coth \alpha_n \frac{b}{2} \right) \sin \alpha_n x \right] \sin \alpha_j x dx \\ = \begin{cases} \frac{a}{4K \alpha_i^3 \sinh \alpha_i b} \Phi \left( \frac{b}{2}, \frac{b}{2} \right) & i = j = n \\ 0 & i \neq j \neq n \end{cases} \quad (24)$$

$$\text{ここに } \Phi \left( \frac{b}{2}, \frac{b}{2} \right) = \sinh^2 \alpha_i \frac{b}{2} \left( 1 + \alpha_i b \coth \alpha_i b - 2 \alpha_i \frac{b}{2} \coth \alpha_i \frac{b}{2} \right)$$

$$\alpha_i = \frac{i\pi}{a}, \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{a}, \quad i, j, n = 1, 2, 3, \dots$$

となる。また、 $\delta_{i0}$  は式 (18) の  $\bar{p}_n$  に式 (20) を代入して直ちに求められるから、座標系  $(x, y)$  の領域に載荷されたときの不静定力影響面 „ $X_i$ ” は、 $\delta_{i0}$  の  $(x, y)$  を  $(u, v)$  に、同様に座標系  $(x, y')$  の領域に載荷されたときの不静定力影響面 „ $X_i'$ ” は、 $\delta_{i0}$  の  $(x, y')$  を  $(u, v')$  に置き換えて

$0 \leq v \leq \frac{b}{2}$  の領域で

$$„X_i'” = -\frac{\delta_{i0}}{\delta_{ii}} = -\frac{2 \sinh \alpha_i \frac{b}{2} \sinh \alpha_i v}{a \Phi \left( \frac{b}{2}, \frac{b}{2} \right)} \left( 1 + \alpha_i b \coth \alpha_i b - \alpha_i \frac{b}{2} \coth \alpha_i \frac{b}{2} \right. \\ \left. - \alpha_i v \coth \alpha_i v \right) \sin \alpha_i u = -\frac{2}{a \Phi \left( \frac{b}{2}, \frac{b}{2} \right)} \Phi \left( \frac{b}{2}, v \right) \sin \alpha_i u$$

$$\text{ここに } \Phi \left( \frac{b}{2}, v \right) = \sinh \alpha_i \frac{b}{2} \sinh \alpha_i v \left( 1 + \alpha_i b \coth \alpha_i b \right. \\ \left. - \alpha_i \frac{b}{2} \coth \alpha_i \frac{b}{2} - \alpha_i v \coth \alpha_i v \right)$$

$0 \leq v' \leq \frac{b}{2}$  の領域で

(25)

$$\begin{aligned}
\text{,,}X_i\text{''} = -\frac{\delta_{i0}}{\delta_{ii}} = -\frac{2 \sinh \alpha_i \frac{b}{2} \sinh \alpha_i v'}{a \Phi\left(\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right)} \left(1 + \alpha_i b \coth \alpha_i b - \alpha_i \frac{b}{2} \coth \alpha_i \frac{b}{2} \right. \\
\left. - \alpha_i v' \coth \alpha_i v'\right) \sin \alpha_i u = -\frac{2}{a \Phi\left(\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right)} \Phi\left(\frac{b}{2}, v'\right) \sin \alpha_i u \quad (25)
\end{aligned}$$

ここに  $\Phi\left(\frac{b}{2}, v'\right) = \sinh \alpha_i \frac{b}{2} \sinh \alpha_i v' \left(1 + \alpha_i b \coth \alpha_i b - \alpha_i \frac{b}{2} \coth \alpha_i \frac{b}{2} - \alpha_i v' \coth \alpha_i v'\right)$

として summation のつかない形で、それぞれ単独に求められる。したがって、図-2のような2径間連続長方形板の上を、垂直荷重  $P=1$  が作用して移動するとき、着目点が座標系  $(x, y)$  の領域にある場合の撓み曲面影響面  $\text{,,}w(x, y)\text{''}$  は、重ね合わせの法則により

$$\begin{aligned}
0 \leq v \leq y \text{ の領域で} \quad \text{,,}w(x, y)\text{''} &= \text{,,}w_{(x, y)}^0\text{''} + \sum_i w(x, y)_i \text{,,}X_i\text{''} \\
y \leq v \leq \frac{b}{2} \text{ の領域で} \quad \text{,,}w(x, y)\text{''} &= \text{,,}w_{(x, y)}^0\text{''} + \sum_i w(x, y)_i \text{,,}X_i\text{''} \\
0 \leq v' \leq \frac{b}{2} \text{ の領域で} \quad \text{,,}w(x, y)\text{''} &= \text{,,}w_{(x, y)}^0\text{''} + \sum_i w(x, y)_i \text{,,}X_i'\text{''}
\end{aligned} \quad (26)$$

ここに  $\text{,,}w_{(x, y)}^0\text{''}$ ,  $\text{,,}w_{(x, y)}^0\text{''}$  = 基本系において、任意点の  $P=1$  による撓み曲面影響面  
 $\text{,,}w(x, y)_i\text{''}$  = 基本系において、 $X_i = \sin \alpha_i x$  による撓み曲面図の点  $(x, y)$  の値

から求められ、式 (18), (20), (22), (25), (26) より次のようになる。

$$\begin{aligned}
0 \leq v \leq y \text{ の領域で} \\
\text{,,}w(x, y)\text{''} &= \frac{1}{Ka} \left[ \sum_n \frac{\sin \alpha_n u \sin \alpha_n x}{\alpha_n^3 \sinh \alpha_n b} \Phi(v, y') - \sum_i \frac{\sin \alpha_i u \sin \alpha_i x}{\alpha_i^3 \sinh \alpha_i b \Phi\left(\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right)} \Phi\left(\frac{b}{2}, v\right) \right. \\
&\quad \left. \sinh \alpha_i \frac{b}{2} \sinh \alpha_i y \left(1 + \alpha_i b \coth \alpha_i b - \alpha_i \frac{b}{2} \coth \alpha_i \frac{b}{2} - \alpha_i y \coth \alpha_i y\right) \right] \\
&= \frac{1}{Ka} \left[ \sum_n \frac{\sin \alpha_n u \sin \alpha_n x}{\alpha_n^3 \sinh \alpha_n b} \Phi(v, y') - \sum_i \frac{\sin \alpha_i u \sin \alpha_i x}{\alpha_i^3 \sinh \alpha_i b \Phi\left(\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right)} \Phi\left(\frac{b}{2}, v\right) \Phi\left(\frac{b}{2}, y\right) \right] \\
\text{ここに} \quad \Phi\left(\frac{b}{2}, y\right) &= \sinh \alpha_i \frac{b}{2} \sinh \alpha_i y \left(1 + \alpha_i b \coth \alpha_i b - \alpha_i \frac{b}{2} \coth \alpha_i \frac{b}{2} - \alpha_i y \coth \alpha_i y\right) \quad (27) \\
y \leq v \leq \frac{b}{2} \text{ の領域で} \\
\text{,,}w(x, y)\text{''} &= \frac{1}{Ka} \left[ \sum_n \frac{\sin \alpha_n u \sin \alpha_n x}{\alpha_n^3 \sinh \alpha_n b} \Phi(v, y) - \sum_i \frac{\sin \alpha_i u \sin \alpha_i x}{\alpha_i^3 \sinh \alpha_i b \Phi\left(\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right)} \Phi\left(\frac{b}{2}, v\right) \Phi\left(\frac{b}{2}, y\right) \right] \\
0 \leq v' \leq \frac{b}{2} \text{ の領域で} \\
\text{,,}w(x, y)\text{''} &= \frac{1}{Ka} \left[ \sum_n \frac{\sin \alpha_n u \sin \alpha_n x}{\alpha_n^3 \sinh \alpha_n b} \Phi(v', y) - \sum_i \frac{\sin \alpha_i u \sin \alpha_i x}{\alpha_i^3 \sinh \alpha_i b \Phi\left(\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right)} \Phi\left(\frac{b}{2}, v'\right) \Phi\left(\frac{b}{2}, y\right) \right]
\end{aligned}$$

ここで、 $i=n$  とすれば式 (27) は数学的には第1項、第2項をまとめることができるが、第1項は集中荷重に関する項であり、また、第2項は線荷重に関する項で収斂の度合が異なるので、数値計算上から2つの項に分けた級数解の形として表わす。

同様に着目点が座標系  $(x, y')$  の領域にある場合の撓み曲面影響面  $\text{,,}w'_{(x, y)}\text{''}$  も求められる。

このようにして、撓み曲面影響面が求められるから、断面力、反力等の影響面を求めることができる。

#### 4. 計 算 例

図-2のような2径間連続板において、着目点が座標系  $(x, y)$  の領域にある場合の曲げモーメント影響面  $\text{,,}m_x(x, y)\text{''}$ ,  $\text{,,}m_y(x, y)\text{''}$  は

$$,,m_{x(x,y)}'' = -K \left( \frac{\partial^2 ,,w''}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 ,,w''}{\partial y^2} \right), \quad ,,m_{y(x,y)}'' = -K \left( \frac{\partial^2 ,,w''}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 ,,w''}{\partial x^2} \right) \quad (28)$$

であるか

$$\left. \begin{aligned} &0 \leq v \leq y \text{ の領域で} \\ &,,m_{x(x,y)}'' = -K \left[ \left( \frac{\partial^2 ,,w_{(x,y)}^0}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 ,,w_{(x,y)}^0}{\partial y^2} \right) + \sum_i \left( \frac{\partial^2 w_{(x,y)} \epsilon}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w_{(x,y)} \epsilon}{\partial y^2} \right) ,,X_i'' \right] \\ &y \leq v \leq \frac{b}{2} \text{ の領域で} \\ &,,m_{x(x,y)}'' = -K \left[ \left( \frac{\partial^2 ,,w_{(x,y)}^0}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 ,,w_{(x,y)}^0}{\partial y^2} \right) + \sum_i \left( \frac{\partial^2 w_{(x,y)} \epsilon}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w_{(x,y)} \epsilon}{\partial y^2} \right) ,,X_i'' \right] \\ &0 \leq v' \leq \frac{b}{2} \text{ の領域で} \\ &,,m_{x(x,y)}'' = -K \left[ \left( \frac{\partial^2 ,,w_{(x,y)}^0}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 ,,w_{(x,y)}^0}{\partial y^2} \right) + \sum_i \left( \frac{\partial^2 w_{(x,y)} \epsilon}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w_{(x,y)} \epsilon}{\partial y^2} \right) ,,X_i'' \right] \\ &\text{ここに } i=1, 2, 3, \dots \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

$$\left. \begin{aligned} &0 \leq v \leq y \text{ の領域で} \\ &,,m_{y(x,y)}'' = -K \left[ \left( \frac{\partial^2 ,,w_{(x,y)}^0}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 ,,w_{(x,y)}^0}{\partial x^2} \right) + \sum_i \left( \frac{\partial^2 w_{(x,y)} \epsilon}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w_{(x,y)} \epsilon}{\partial x^2} \right) ,,X_i'' \right] \\ &y \leq v \leq \frac{b}{2} \text{ の領域で} \\ &,,m_{y(x,y)}'' = -K \left[ \left( \frac{\partial^2 ,,w_{(x,y)}^0}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 ,,w_{(x,y)}^0}{\partial x^2} \right) + \sum_i \left( \frac{\partial^2 w_{(x,y)} \epsilon}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w_{(x,y)} \epsilon}{\partial x^2} \right) ,,X_i'' \right] \\ &0 \leq v' \leq \frac{b}{2} \text{ の領域で} \\ &,,m_{y(x,y)}'' = -K \left[ \left( \frac{\partial^2 ,,w_{(x,y)}^0}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 ,,w_{(x,y)}^0}{\partial x^2} \right) + \sum_i \left( \frac{\partial^2 w_{(x,y)} \epsilon}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w_{(x,y)} \epsilon}{\partial x^2} \right) ,,X_i'' \right] \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

から求められ、式 (27) の微分式を式 (29), (30) に代入すると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} &0 \leq v \leq y \text{ の領域で} \\ &,,m_{x(x,y)}'' = \frac{1}{a} \left\{ \sum_n \frac{\sin \alpha_n u \sin \alpha_n x}{\alpha_n \sinh \alpha_n b} \left[ (1-\mu) \Phi(v, y') + 2\mu \sinh \alpha_n v \sinh \alpha_n y' \right] \right. \\ &\quad \left. - \sum_i \frac{\sin \alpha_i u \sin \alpha_i x}{\alpha_i \sinh \alpha_i b \Phi\left(\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right)} \Phi\left(\frac{b}{2}, v\right) \left[ (1-\mu) \Phi\left(\frac{b}{2}, y\right) + 2\mu \sinh \alpha_i \frac{b}{2} \sinh \alpha_i y \right] \right\} \\ &y \leq v \leq \frac{b}{2} \text{ の領域で} \\ &,,m_{x(x,y)}'' = \frac{1}{a} \left\{ \sum_n \frac{\sin \alpha_n u \sin \alpha_n x}{\alpha_n \sinh \alpha_n b} \left[ (1-\mu) \Phi(v', y) + 2\mu \sinh \alpha_n v' \sinh \alpha_n y \right] \right. \\ &\quad \left. - \sum_i \frac{\sin \alpha_i u \sin \alpha_i x}{\alpha_i \sinh \alpha_i b \Phi\left(\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right)} \Phi\left(\frac{b}{2}, v'\right) \left[ (1-\mu) \Phi\left(\frac{b}{2}, y\right) + 2\mu \sinh \alpha_i \frac{b}{2} \sinh \alpha_i y \right] \right\} \\ &0 \leq v' \leq \frac{b}{2} \text{ の領域で} \\ &,,m_{x(x,y)}'' = \frac{1}{a} \left\{ \sum_n \frac{\sin \alpha_n u \sin \alpha_n x}{\alpha_n \sinh \alpha_n b} \left[ (1-\mu) \Phi(v', y) + 2\mu \sinh \alpha_n v' \sinh \alpha_n y \right] \right. \\ &\quad \left. - \sum_i \frac{\sin \alpha_i u \sin \alpha_i x}{\alpha_i \sinh \alpha_i b \Phi\left(\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right)} \Phi\left(\frac{b}{2}, v'\right) \left[ (1-\mu) \Phi\left(\frac{b}{2}, y\right) + 2\mu \sinh \alpha_i \frac{b}{2} \sinh \alpha_i y \right] \right\} \\ &\text{ここに } \alpha_i = \frac{i\pi}{a}, \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{a}, \quad i, n=1, 2, 3, \dots \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

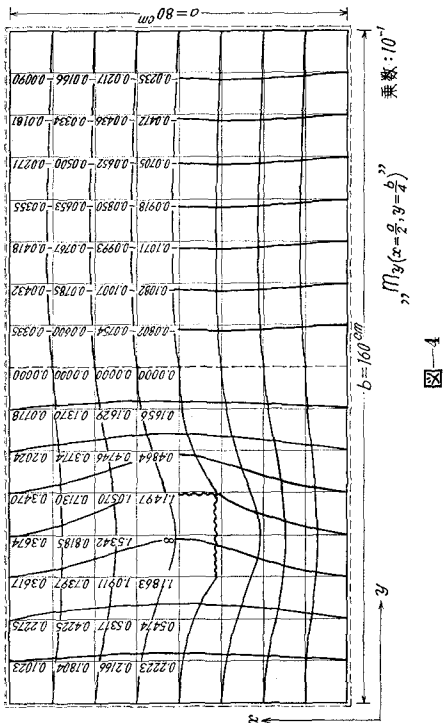


图-4

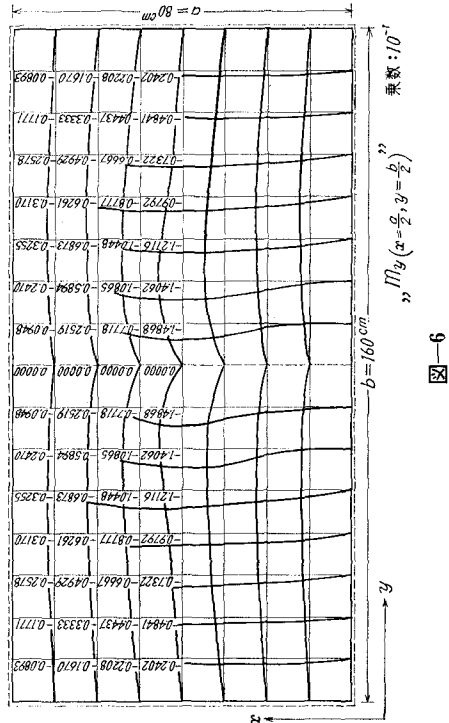


图-5

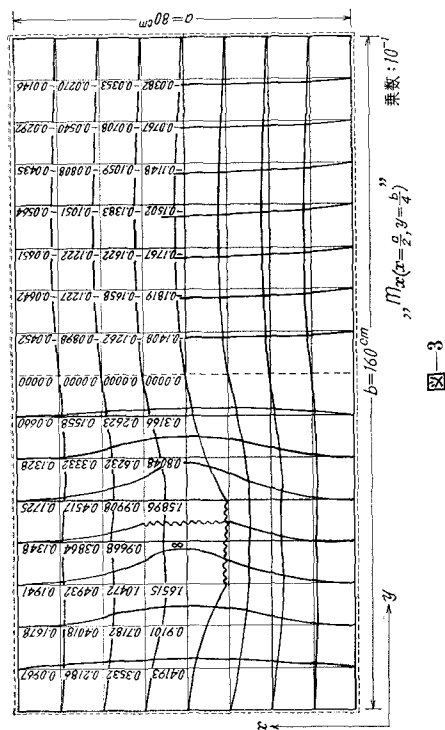


图-3

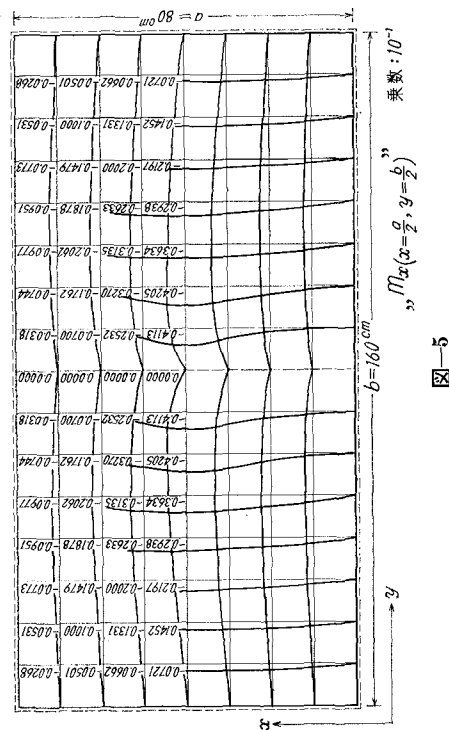


图-6

$0 \leq v \leq y$  の領域で

$$,,m_{y(x,y)}'' = -\frac{1}{a} \left\{ \sum_n \frac{\sin \alpha_n u \sin \alpha_n x}{\alpha_n \sinh \alpha_n b} \left[ (1-\mu) \Phi(v, y') - 2 \sinh \alpha_n v \sinh \alpha_n y' \right] \right. \\ \left. + \sum_i \frac{\sin \alpha_i u \sin \alpha_i x}{\alpha_i \sinh \alpha_i b \Phi\left(\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right)} \Phi\left(\frac{b}{2}, v\right) \left[ (1-\mu) \Phi\left(\frac{b}{2}, y\right) - 2 \sinh \alpha_i \frac{b}{2} \sinh \alpha_i y \right] \right\}$$

$y \leq v \leq \frac{b}{2}$  の領域で

$$,,m_{y(x,y)}'' = -\frac{1}{a} \left\{ \sum_n \frac{\sin \alpha_n u \sin \alpha_n x}{\alpha_n \sinh \alpha_n b} \left[ (1-\mu) \Phi(v', y) - 2 \sinh \alpha_n v' \sinh \alpha_n y \right] \right. \\ \left. + \sum_i \frac{\sin \alpha_i u \sin \alpha_i x}{\alpha_i \sinh \alpha_i b \Phi\left(\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right)} \Phi\left(\frac{b}{2}, v\right) \left[ (1-\mu) \Phi\left(\frac{b}{2}, y\right) - 2 \sinh \alpha_i \frac{b}{2} \sinh \alpha_i y \right] \right\}$$

$0 \leq v' \leq \frac{b}{2}$  の領域で

$$,,m_{y(x,y)}'' = -\frac{1}{a} \left\{ \sum_n \frac{\sin \alpha_n u \sin \alpha_n x}{\alpha_n \sinh \alpha_n b} \left[ (1-\mu) \Phi(v', y) - 2 \sinh \alpha_n v' \sinh \alpha_n y \right] \right. \\ \left. + \sum_i \frac{\sin \alpha_i u \sin \alpha_i x}{\alpha_i \sinh \alpha_i b \Phi\left(\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right)} \Phi\left(\frac{b}{2}, v'\right) \left[ (1-\mu) \Phi\left(\frac{b}{2}, y\right) - 2 \sinh \alpha_i \frac{b}{2} \sinh \alpha_i y \right] \right\}$$

(32)

式 (31), (32) の数値計算を行なうための program を作成し、一例として、 $a=80$  cm (8 分割で計算)、 $b=160$  cm (16 分割で計算)、 $\mu=0.3$  のとき、着目点  $\left(x=\frac{a}{2}, y=\frac{b}{4}\right)$ 、 $\left(x=\frac{a}{2}, y=\frac{b}{2}\right)$  における曲げモーメント影響面を求めて図に描くと 図-3~図-6 のようになる。

また、曲げモーメントの数値は、第 1 項については  $n=13$ 、第 2 項については  $i=7$  で充分収斂することを確認した。すなわち、 $n=11$ 、 $i=5$  についての計算結果と比較して、着目点  $\left(x=\frac{a}{2}, y=\frac{b}{2}\right)$  における曲げモーメント影響面のうち、着目点に極く接近した数点に載荷したときのみ数 % の差があったが、それ以外では有効数字 4 桁位まで一致した。

さらに、ここに誘導した解とは別に、不静定力として曲げモーメントを選んだ場合の解を誘導して数値計算を行なったが、結果は完全に一致した。

なお、これらの計算は東京大学大型計算機センターにおける HITAC 5020 (HARP 5020 Compiler) によった。

## 5. あとがき

簡単な例として、等方性の 2 径間連続長方形板について述べたが、基本系に選んだ平板が解析的に解を得ることのできるものであれば、全く同様に解くことができる。

また、これを拡張して、一般に  $n$  径間連続板についても、それぞれの中間支持の間に Lastgruppen を挿入して機械的に解くことができる。これについては機会を改めて発表の予定である。

## 参 考 文 献

- 1) E. Bittner: Platten und Behälter. Springer, 1965.
- 2) K. Girkmann: Flächentragwerke. Springer, 1956.
- 3) A. Hawranek, O. Steinhardt: Theorie und Berechnung der Stahlbrücken. Springer, 1958.
- 4) S. Timoshenko a. S. Woinowsky-Krieger: Theory of Plates and Shells. McGraw-Hill, 1959.