

多径間吊橋の塔の曲げ剛性が断面力特性に 及ぼす影響について

正 員 佐 藤 浩 一*

1. ま え が き

さきに発表した報告¹⁾は、多径間吊橋の塔頂がローラー結合 (図-1 (a)) の場合の断面力特性について、弾性理論と撓度理論とを比較検討したものである。しかし、実際の吊橋では、塔頂において、塔とケーブルとがヒンジ結合 (図-1 (b)) となっていると考えられるが、従来、ヒンジ結合の場合の理論式がみあたらないので、本報告は、ヒンジ結合の場合、即ち、塔の曲げ剛性を考慮した場合の多径間吊橋の一般式を誘導し、ローラー結合の場合と比較検討してみた。更に、ヒンジ結合とローラー結合との相互関係、撓度理論と弾性理論との相互関係、補剛桁が連続支持と単純支持との相互関係を考察し、現在、計画中の本州四国連絡橋 (図-2) の断面諸元を用いて、数値計算を行ない、多径間長大吊橋の静力学的な観点から、総合的に比較検討してみた。

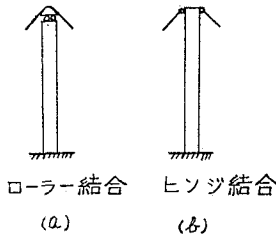


図-1 塔頂のケーブル
支承条件

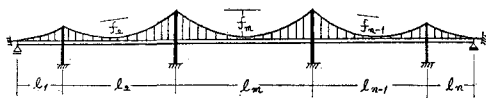


図-2 多径間吊橋の一般図

2. 吊橋の仮定と記号

本報告では、次のような仮定と記号を用いる。

2-1 仮 定

- (1) ケーブル、ハンガー、補剛桁、床版構造の自重、したがって、全体の死荷重は架設完了後ケーブルのみによって支えられる。故に、補剛桁の支点には反力は生じない。
- (2) 補剛桁及びケーブルの死荷重は等分布荷重であると

考える。したがって、ケーブルの最初の形状は放物線である。

- (3) 吊材はひずまない。また、載荷による吊材の傾斜の影響は無視される。

- (4) ケーブルは荷重に応じて、平衡多角形を自由に作りうる程度に完全に可撓であるものとする。

- (5) 補剛桁 (プレートガーダーまたはトラス構造) は、最初、水平でかつ直線をなし、その断面二次モーメントは一定で、全長をケーブルに連結された一つの桁と考える。

- (6) 補剛桁は横断面において、対称であること、せん断応力による変形は無視できる。

2-2 記 号

E_c : ケーブル材のヤング係数 (t/m²),

A_c : ケーブル材の断面積 (m²),

E : 補剛桁及び塔のヤング係数 (t/m²),

I : 補剛桁の断面二次モーメント (m⁴),

I_z : 塔の断面二次モーメント (m⁴),

l : 補剛桁の支間長 (m),

f : ケーブルの垂下曲線 $y(x)$ のサグ (m),

v : $=v(x)$ 活荷重による補剛桁の鉛直方向のたわみ (m),

g : $=g(x)$ 一定の死荷重 (t/m),

p : $=p(x)$ 活荷重 (t/m),

P : 集中荷重 (t),

H : ケーブルの水平引張力 (t) $=H_g+H_p$,

H_g : 死荷重 g によるケーブルの水平引張力 (t) $=\frac{g l^2}{8 f}$,

H_p : 活荷重によるケーブルの水平引張力 (t),

R : $l^2/8 f$ (m),

y'' : $-1/R$ (1/m),

L_c : $\int_0^L dx/\cos^3 \varphi$ (m),

φ : 水平方向に対するケーブルの傾斜角 (ラジアン),

μ : $\sqrt{H/EI}$ (1/m),

h : 塔の高さ (m),

y : 活荷重無載荷におけるケーブルの垂下曲線の座標 (m),

x : 着目点の位置の座標 (m),

* 北海道大学大学院 工修

ξ : 集中荷重 P の作用点の座標 (m),
 L : ケーブル長の水平投影長, 一般には $L = \sum l$.

3. 吊橋の微分方程式

一般に吊橋の微分方程式は, 次の通りである。

3-1 撓度理論

補剛桁のたわみの基礎方程式

$$EI \cdot v^{IV}(x) - H \cdot v''(x) = p(x) + H_p \cdot y'' \quad (1)$$

ケーブルの条件方程式

$$H_p \cdot \frac{L_c}{E_c A_c} + y'' \int_0^L v(x) dx = 0 \quad (2)$$

式 (1) と式 (2) を互に関連させながら, H_p を求め, v を求めるのであるが, ここでは実用性をそこなわない範囲でこれを線型化して, 式 (1) の H を一定として, 式 (1) と式 (2) を関連させて解いていく。なお, 種々の荷重状態における式 (1) の解は文献 (2) にまとめて示されている。

3-2 弾性理論

補剛桁のたわみの基礎方程式

$$EI \cdot v^{IV}(x) = p(x) + H_p y'' \quad (3)$$

ケーブルの条件方程式

$$H_p \cdot \frac{L_c}{E_c A_c} + y'' \int_0^L v(x) dx = 0 \quad (4)$$

式 (3) は周知の桁のたわみ曲線の微分方程式と全く同様であるので, 解はすぐに求まる。式 (3) と式 (4) を連立させて, H_p を求め, v を求めていく。

4. 多径間吊橋の理論式と解析法

図-3 は塔を省略した n 径間連続吊橋を示したものである (図-2 の略図である)。支点についている番号は n 径間連続吊橋の補剛桁の支点番号と同時に塔の番号を示している。但し, 1 と $n+1$ 番の塔は零とする。

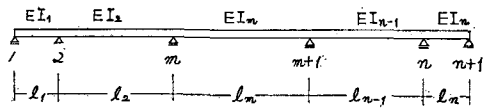


図-3 補剛桁の一般図

4-1 n 径間連続桁の解析

図-3 のような n 径間連続桁は $(n-1)$ 次不静定構造物であるから, 最初に, n 径間連続桁を解析する。周知のように中間支点 (2, 3, ..., n) を切断し, 不静定曲げモーメント $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}$ を挿入すれば, 次のような $(n-1)$ 元の仕事連立方程式を得る。

$$\begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n-1} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{n-1,1} & \delta_{n-1,2} & \dots & \delta_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{n-1} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} f_{10} \\ f_{20} \\ \vdots \\ f_{n-1,0} \end{pmatrix} \quad (5)$$

ここで

$$\delta_{i,i} = - \left\{ \frac{1}{H_{i,i}} \left(1 - \frac{\mu_i l_i}{\tanh \mu_i l_i} \right) + \frac{1}{H_{i+1,i+1}} \left(1 - \frac{\mu_{i+1} l_{i+1}}{\tanh \mu_{i+1} l_{i+1}} \right) \right\}, \quad (6)$$

但し, $i=1, 2, \dots, n-1$

$$\delta_{i,i+1} = \delta_{i+1,i} = - \frac{1}{H_{i+1,i+1}} \left(1 - \frac{\mu_{i+1} l_{i+1}}{\sinh \mu_{i+1} l_{i+1}} \right) \quad (7)$$

但し, $i=1, 2, \dots, n-2$

他の $\delta_{i,j}$ は全部零である。

f_{i0} は状態 i の時のたわみ曲線であり, 状態 i の時の第 i スパンのたわみ曲線は

$$\frac{1}{H_i} \left(\frac{\xi_i}{l_i} - \frac{\sinh \mu_i \xi_i}{\sinh \mu_i l_i} \right), \quad (8)$$

第 $i+1$ スパンのたわみ曲線は

$$\frac{1}{H_{i+1}} \left\{ 1 - \frac{\xi_{i+1}}{l_{i+1}} - \frac{\sinh \mu_{i+1} (l_{i+1} - \xi_{i+1})}{\sinh \mu_{i+1} l_{i+1}} \right\} \quad (9)$$

となり, 他のスパンは全部零となる。但し, $i=1, 2, \dots, n-1$

式 (5) は式 (10) のようになり, $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}$ は求まる。

式 (5) より

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{n-1} \end{pmatrix} = - \frac{1}{D} \begin{pmatrix} D_{11} & D_{21} & \dots & D_{n-1,1} \\ D_{12} & D_{22} & \dots & D_{n-1,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{1,n-1} & D_{2,n-1} & \dots & D_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{10} \\ f_{20} \\ \vdots \\ f_{n-1,0} \end{pmatrix}, \quad (10)$$

ここで

$$D = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \dots & \delta_{1,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{n-1,1} & \dots & \delta_{n-1,n-1} \end{vmatrix}, \quad (11)$$

また, 式 (10) の逆マトリックスの要素を次のように置換する。

$$\begin{pmatrix} D_{11} & D_{21} & \dots & D_{n-1,1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ D_{12} & D_{22} & \dots & D_{n-1,2} & 0 & D_{11} & D_{21} & \dots & D_{n-1,1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 & D_{12} & D_{22} & \dots & D_{n-1,2} & \vdots \\ D_{1,n-1} & D_{2,n-1} & \dots & D_{n-1,n-1} & 0 & D_{1,n-1} & D_{2,n-1} & \dots & D_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} D_{11} & D_{21} & \dots & D_{n1} & D_{n+1,1} \\ D_{12} & D_{22} & \dots & D_{n2} & D_{n+1,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ D_{1n} & D_{2n} & \dots & D_{nn} & D_{n+1,n} \\ D_{1,n+1} & D_{2,n+1} & \dots & D_{n,n+1} & D_{n+1,n+1} \end{pmatrix} \quad (12)$$

式 (12) とする。

なお, 補剛桁が単純支持の場合の n 径間吊橋では式 (5) から式 (12) まで全部零となる。

4-2 n 径間連続吊橋の解析

次に, n 径間連続吊橋を解析する (五径間連続吊橋を例

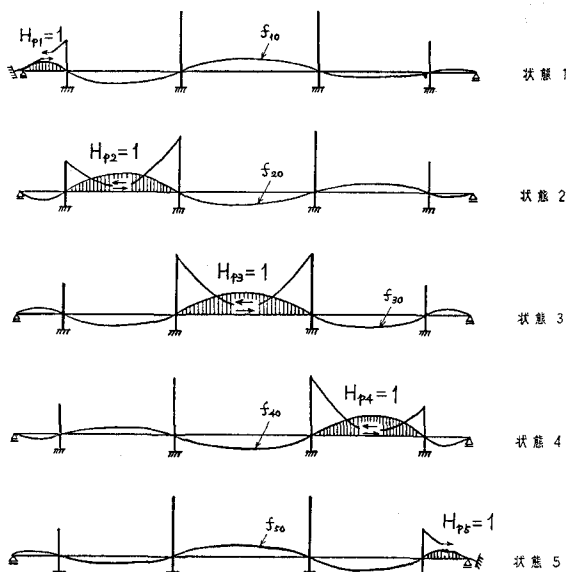


図-4 多径間吊橋の解析

にとって)。 n 径間連続吊橋は連続桁を基本系にとれば、 n 次不静定構造物となる。

故に、図-4のように、ケーブルを全部切断し、第 i スパンのケーブルに水平張力 $H_{pi}=1$ を挿入したものを状態 i とする。但し、 $i=1, 2, \dots, n$ とする。

従って、状態 i の時の $(-1) y'_i$ の等分布荷重による第 j 番目の支点モーメントは、式 (10)、式 (12) を用いて表現すれば

$${}_iM_j = -\frac{1}{R_i} \int_0^{l_i} X_j(\xi_i) d\xi_i = -\frac{1}{R_i} \cdot \frac{1}{H_i} \cdot \frac{l_i}{2} \cdot \left(1 - \frac{\tanh \frac{\mu_i l_i}{2}}{\frac{\mu_i l_i}{2}} \right) \cdot \{D_{ij} + D_{i+1j}\} \cdot \frac{1}{4} \quad (13)$$

但し、 $i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, n+1$

式 (13) の ${}_iM_j$ は n 径間連続吊橋の状態 i (図-4 参照) の時の j 支点 (図-3 参照) の支点モーメントであり、また、右辺の i は第 i スパンの基本数値である。更に、式 (13) の D_{ij} は式 (12) の D_{ij} を用いることに注意。なお、補剛桁が単純支持の場合の n 径間吊橋では式 (13) の ${}_iM_j=0$ とすればよい。

従って、 n 径間連続吊橋の場合のケーブルの水平張力 $H_{p1}, H_{p2}, \dots, H_{pn}$ に関して、次のような n 元の仕事連立方程式を得る。

$$\begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{p1} \\ H_{p2} \\ \vdots \\ H_{pn} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} f_{10} \\ f_{20} \\ \vdots \\ f_{n0} \end{pmatrix} \quad (14)$$

ここで

$$\begin{aligned} \delta_{ii} = & \frac{EI_m}{l_m} \cdot \frac{L_i}{E_c A_c} \cdot \frac{R_m}{l_m} \cdot (\mu_m l_m)^2 \\ & + \frac{H_m}{H_i} \cdot \frac{R_m}{R_i} \cdot \left(\frac{l_i}{l_m} \right)^2 \cdot 8 \cdot \frac{f_i}{l_i} \cdot \left\{ \frac{1}{12} - \frac{1}{(\mu_i l_i)^2} \left(1 - \frac{\tanh \frac{\mu_i l_i}{2}}{\frac{\mu_i l_i}{2}} \right) \right\} \\ & - \frac{H_m}{H_i} \cdot \frac{R_m}{R_i} \cdot \frac{l_i}{l_m} \cdot \frac{1}{2l_m} \cdot \left(1 - \frac{\tanh \frac{\mu_i l_i}{2}}{\frac{\mu_i l_i}{2}} \right) \cdot \{ {}_iM_{i+i} + {}_iM_{i+1} \} \\ & + \left\{ \frac{h_i^3}{3EI_{xi}} + \frac{h_{i+1}^3}{3EI_{xi+1}} \right\} \cdot \frac{H_m}{1} \cdot \frac{R_m}{l_m^2} \end{aligned} \quad (15)$$

但し、 $i=1, 2, \dots, n$ 。

$$\begin{aligned} \delta_{i \ i+1} = & -\frac{H_m}{H_{i+1}} \cdot \frac{R_m}{R_{i+1}} \cdot \frac{l_{i+1}}{l_m} \cdot \frac{1}{2l_m} \cdot \left(1 - \frac{\tanh \frac{\mu_{i+1} l_{i+1}}{2}}{\frac{\mu_{i+1} l_{i+1}}{2}} \right) \cdot \{ {}_iM_{i+1} + {}_iM_{i+2} \} \\ & - \frac{h_{i+1}^3}{3EI_{xi+1}} \cdot \frac{H_m}{1} \cdot \frac{R_m}{l_m^2}, \end{aligned} \quad (16)$$

但し、 $i=1, 2, \dots, n-1$ 。

$$\begin{aligned} \delta_{i+1 \ i} = & -\frac{H_m}{H_i} \cdot \frac{R_m}{R_i} \cdot \frac{l_i}{l_m} \cdot \frac{1}{2l_m} \cdot \left(1 - \frac{\tanh \frac{\mu_i l_i}{2}}{\frac{\mu_i l_i}{2}} \right) \cdot \{ {}_{i+1}M_i + {}_{i+1}M_{i+1} \} \\ & - \frac{h_{i+1}^3}{3EI_{xi+1}} \cdot \frac{H_m}{1} \cdot \frac{R_m}{l_m^2}, \end{aligned} \quad (17)$$

但し、 $i=1, 2, \dots, n-1$ 。

なお、式 (16) と式 (17) は表面上は異なっているが、

$\delta_{i \ i+1} = \delta_{i+1 \ i}$ は成立している。

$$\begin{aligned} \delta_{ij} = & -\frac{H_m}{H_j} \cdot \frac{R_m}{R_j} \cdot \frac{l_j}{l_m} \cdot \frac{1}{2l_m} \cdot \left(1 - \frac{\tanh \frac{\mu_j l_j}{2}}{\frac{\mu_j l_j}{2}} \right) \cdot \{ {}_iM_j + {}_iM_{j+1} \}, \end{aligned} \quad (18)$$

但し、 $i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, n$

$i \neq j-1; i \neq j; i \neq j+1$ 。

式 (15)~式 (18) までの ${}_iM_j$ は式 (13) の ${}_iM_j$ が入る。 $i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, n+1$ である。また、補剛桁が単純支持の場合の n 径間吊橋では、式 (15)~式 (18) までの ${}_iM_j=0$ とすればよいので、式 (14) は、 n 径間吊橋と n 径間連続吊橋の両方を表現していることになる。 h_i は i 番目の塔の高さ (m) (図-3 参照)、 EI_{xi} は i 番目の塔の曲げ剛性 ($t \cdot m^2$) である。

次に、式 (14) の $-f_{i0}(\xi_j)$ 曲線を求めると次のようになる。

$$-f_{i0}(\xi_j) = \frac{H_m}{H_i} \cdot \frac{R_m}{R_i} \cdot \left(\frac{l_i}{l_m} \right)^2 \cdot \left[\frac{1}{2} \left\{ \frac{\xi_i}{l_i} - \left(\frac{\xi_i}{l_i} \right)^2 \right\} - \frac{1}{(\mu_i l_i)^2} \cdot \left\{ 1 - \frac{\cosh \mu_i \left(\frac{l_i}{2} - \xi_i \right)}{\cosh \frac{\mu_i l_i}{2}} \right\} \right] + \frac{1}{l_m} \cdot \frac{H_m}{H_i} \cdot \frac{R_m}{R_i} \cdot \frac{l_i}{l_m} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{\tanh \frac{\mu_i l_i}{2}}{\frac{\mu_i l_i}{2}} \right) \cdot \left\{ X_{i-1}(\xi_j) + X_i(\xi_j) \right\}, \quad (19)$$

但し、 $X_0(\xi_j) = X_n(\xi_j) = 0$; $i = 1, 2, \dots, n$
 $j = 1, 2, \dots, n$.

この $X_i(\xi_j)$ は式 (10) によって求めたものである。

なお、補剛桁が単純支持の場合の n 径間吊橋では、式 (19) の $X_i(\xi_j) = 0$ となる。

以上の式 (15)～式 (19) でケーブルの不静定力 H_{p1} , H_{p2} , $\dots$, H_{pn} が求まる。

また、式 (14) は吊橋の第二の基礎方程式である式 (2) を各スパンごとに適用して計算したものと全く一致している。即ち、吊橋の第二の基礎方程式はケーブル定着部の距離が変化しないという条件あるいは活荷重によってケーブル微小要素の変化長の水平線への投影の総和が 0 でなければならないという条件である。この条件を図-4 で説明すれば、図-4 において、 i スパン以外のケーブルを全部切断し、ケーブルの張ってあるスパンの活荷重によるケーブルの水平張力を H_{pi} として、そのケーブルの変化長の水平線への投影の総和が第 i スパンのケーブル両端の水平移動の差である。即ち、塔の水平移動量である。

故に、式 (2) は

$$\left. \begin{aligned} H_{p1} \cdot \frac{L_{c1}}{E_{c1} A_{c1}} + y_1' \int_0^{l_1} v_1(x_1) dx_1 &= \Delta l_1, \\ H_{p2} \cdot \frac{L_{c2}}{E_{c2} A_{c2}} + y_2' \int_0^{l_2} v_2(x_2) dx_2 &= \Delta l_2, \\ &\vdots \\ H_{pn} \cdot \frac{L_{cn}}{E_{cn} A_{cn}} + y_n' \int_0^{l_n} v_n(x_n) dx_n &= \Delta l_n, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

ここで、 Δl_i は第 i スパンのケーブル両端の水平移動量。
 式 (20) を変形すれば、式 (14) と全く一致している。

5. n 径間吊橋と n 径間連続吊橋の影響線

以上の理論式より n 径間吊橋と n 径間連続吊橋のたわみ及び断面力の影響線を求める。

5-1 補剛桁のたわみの影響線

$$v(x_j, \xi_i) = v_0(x_j, \xi_i) + X_{j-1}(\xi_i) \cdot \frac{1}{H_j} \cdot \left\{ 1 - \frac{x_j}{l_j} - \frac{\sinh \mu_j (l_j - x_j)}{\sinh \mu_j l_j} \right\} + X_i(\xi_i) \cdot \frac{1}{H_j} \cdot \left\{ \frac{x_j}{l_j} - \frac{\sinh \mu_j x_j}{\sinh \mu_j l_j} \right\} - H_{pj}(\xi_i) \cdot \frac{l_j^2}{H_j R_j} \cdot \left[\frac{1}{2} \left\{ \frac{x_j}{l_j} - \left(\frac{x_j}{l_j} \right)^2 \right\} - \frac{1}{(\mu_j l_j)^2} \cdot \left\{ 1 - \frac{\cosh \mu_j \left(\frac{l_j}{2} - x_j \right)}{\cosh \frac{\mu_j l_j}{2}} \right\} \right] + \sum_{k=1}^n H_{pk}(\xi_i) \cdot k M_j \cdot \left\{ 1 - \frac{x_j}{l_j} - \frac{\sinh \mu_j (l_j - x_j)}{\sinh \mu_j l_j} \right\} \cdot \frac{1}{H_j} + \sum_{k=1}^n H_{pk}(\xi_i) \cdot k M_{j+1} \cdot \left\{ \frac{x_j}{l_j} - \frac{\sinh \mu_j x_j}{\sinh \mu_j l_j} \right\} \cdot \frac{1}{H_j}, \quad (21)$$

但し、 $i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, n$.

ここで、 $v_0(x_j, \xi_i)$ は単純桁のたわみの影響線である。

5-2 補剛桁の曲げモーメントの影響線

$$M(x_j, \xi_i) = M_0(x_j, \xi_i) + X_{j-1}(\xi_i) \cdot \frac{\sinh \mu_j (l_j - x_j)}{\sinh \mu_j l_j} + X_j(\xi_i) \cdot \frac{\sinh \mu_j x_j}{\sinh \mu_j l_j} - H_{pj}(\xi_i) \cdot \frac{1}{R_j l_j^2} \cdot \left[1 - \frac{\cosh \mu_j \left(\frac{l_j}{2} - x_j \right)}{\cosh \frac{\mu_j l_j}{2}} \right] + \sum_{k=1}^n H_{pk}(\xi_i) \cdot k M_j \cdot \frac{\sinh \mu_j (l_j - x_j)}{\sinh \mu_j l_j} + \sum_{k=1}^n H_{pk}(\xi_i) \cdot k M_{j+1} \cdot \frac{\sinh \mu_j x_j}{\sinh \mu_j l_j}, \quad (22)$$

但し、 $i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, n$.

ここで、 $M_0(x_j, \xi_i)$ は単純桁の曲げモーメントの影響線である。

5-3 補剛桁のせん断力の影響線

$$Q(x_j, \xi_i) = Q_0(x_j, \xi_i) - X_{j-1}(\xi_i) \cdot \mu_j \cdot \frac{\cosh \mu_j (l_j - x_j)}{\sinh \mu_j l_j} + X_j(\xi_i) \cdot \mu_j \cdot \frac{\cosh \mu_j x_j}{\sinh \mu_j l_j} - H_{pj}(\xi_i) \cdot \frac{1}{R_j l_j} \cdot \frac{\sinh \mu_j \left(\frac{l_j}{2} - x_j \right)}{\cosh \frac{\mu_j l_j}{2}} + \sum_{k=1}^n H_{pk}(\xi_i) \cdot k M_j \cdot (-\mu_j) \cdot \frac{\cosh \mu_j (l_j - x_j)}{\sinh \mu_j l_j} + \sum_{k=1}^n H_{pk}(\xi_i) \cdot k M_{j+1} \cdot \mu_j \cdot \frac{\cosh \mu_j x_j}{\sinh \mu_j l_j}, \quad (23)$$

但し、 $i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, n$.

ここで、 $Q_0(x_j, \xi_j)$ は単純桁のせん断力の影響線である。式 (21), 式 (22), 式 (23) を通じて、 j は着目のスパンであり、 x は着目点、 i は載荷スパンであり、 ξ は載荷点である。また、 $X_j(\xi_i)$ は式 (10) で求めたものであり、 $H_{pj}(\xi_i)$, $\sum_{k=1}^n H_{pk}(\xi_i)$ は式 (14) で求めたものである。また、 ${}_k M_j$ は式 (13) で求めたものが入る。文献 (2) に $v_0(x_j, \xi_j)$, $M_0(x_j, \xi_j)$, $Q_0(x_j, \xi_j)$ がまとめて表示されている。

6. μ 径間吊橋の理論式の相互関係

式 (23) までの理論式は、ヒンジ結合で撓度理論を用いた、補剛桁が連続桁の場合であるが、次にヒンジ結合とローラー結合との相互関係、撓度理論と弾性理論との相互関係、補剛桁が連続支持と単純支持との相互関係を考察してみる。

6-1 吊橋の理論式の種類

吊橋の理論式の相互関係は、大きく次のように分類でき、便宜上、理論式を ①, ②, …, ⑧ と番号をつける。

ヒンジ結合	撓度理論	補剛桁が連続支持 …… ①
		補剛桁が単純支持 …… ②
	弾性理論	補剛桁が連続支持 …… ③
		補剛桁が単純支持 …… ④
ローラー結合	撓度理論	補剛桁が連続支持 …… ⑤
		補剛桁が単純支持 …… ⑥
	弾性理論	補剛桁が連続支持 …… ⑦
		補剛桁が単純支持 …… ⑧

式 (23) までの理論式は ①, ② に相当しているが、これらを用いて、②, ③, ④, ⑤, ⑥, ⑦, ⑧ の理論式との間にどのような関係が存在しているか、以下 3 項目にわけて考察してみる。

6-2 ヒンジ結合とローラー結合との相互関係

ヒンジ結合の理論式は式 (14) で求まるが、この式 (14) において、 $H_{p1}=H_{p2}=\dots=H_{pn}=H_p$ とおき、 $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \partial_{ij} = N$ とし、 $-\sum_{i=1}^n f_{i0}(\xi) = Z(\xi)$ とすれば、 $N \cdot H_p(\xi) = Z(\xi)$ となり

$$H_p(\xi) = \frac{Z(\xi)}{N} \quad (24)$$

で表現することができる。これは文献 (1) に示してあるローラー結合の場合の $H_p(\xi)$ を求める式である。この式 (24) を式 (21), 式 (22), 式 (23) の $H_{pj}(\xi_i)$ に $H_p(\xi_i)$ とし、また、 $\sum_{k=1}^n H_{pk}(\xi_i)$ に $H_p(\xi_i)$ として代入し、更に、 $H_j = H$ とすれば、ローラー結合の場合のたわみの影響線、曲げモーメントの影響線、せん断力の影響線となる (文献 (1) 参照)。なお、式 (14) の ∂_{ij} の中には塔の曲げ剛性 (EI_{2i}) を考慮した項が入っているが、 $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \partial_{ij} = N$ と sum up すると互に打消し合って N の中には入っていない。

6-3 撓度理論と弾性理論との相互関係

撓度理論と弾性理論の微分方程式と条件方程式は式 (1), 式 (2), 式 (3), 式 (4) で表現することができる。

式 (1) と式 (3) を比較すれば、式 (3) は式 (1) の左辺の第 2 項の H を零としたものに等しい。故に、式 (1) を解けば、 $\sinh$, $\cosh$, $\tanh$ などの超越関数が $\mu = \sqrt{H/EI}$ を含んだ形で入ってくるが、式 (3) は周知の桁のたわみ曲線と全く同様であるので、解には超越関数は含まれていない。ここで式 (1) の解と式 (3) の解との間にどのような関係があるか、具体的な例をもって示せば、単純桁に等分布荷重が作用した時の式 (1) の解は式 (25) である (文献 (2) 参照)。

$$p \cdot \frac{l^2}{H} \cdot \left[\frac{1}{2} \left\{ \frac{x}{l} - \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right\} - \frac{1}{(\mu l)^2} \cdot \left\{ 1 - \frac{\cosh \mu \left(\frac{l}{2} - x \right)}{\cosh \frac{\mu l}{2}} \right\} \right] \quad (25)$$

また、式 (3) の解は式 (26) である。

$$p \cdot \frac{l^4}{24EI} \cdot \left\{ \frac{x}{l} - 2 \left(\frac{x}{l} \right)^3 + \left(\frac{x}{l} \right)^4 \right\} \quad (26)$$

式 (25) において、 $H = \mu^2 EI$ として、 $\mu \rightarrow 0$ にすれば式 (26) となる。即ち

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} p \cdot \frac{l^2}{H} \cdot \left[\frac{1}{2} \left\{ \frac{x}{l} - \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right\} - \frac{1}{(\mu l)^2} \cdot \left\{ 1 - \frac{\cosh \mu \left(\frac{l}{2} - x \right)}{\cosh \frac{\mu l}{2}} \right\} \right] \\ = p \cdot \frac{l^4}{24EI} \cdot \left\{ \frac{x}{l} - 2 \left(\frac{x}{l} \right)^3 + \left(\frac{x}{l} \right)^4 \right\} \quad (27)$$

である。

以上は一例にすぎないが、種々の荷重状態における式 (1) の解を S_1 とし、式 (3) の解を S_3 とすれば

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} S_1 = S_3 \quad (28)$$

式 (28) を式 (5)~式 (27) まで適用すれば、撓度理論から弾性理論に変換することができる。

6-4 連続支持と単純支持との相互関係

補剛桁が連続支持の場合の吊橋解析において、撓度理論と弾性理論の両理論式の中に、 ${}_k M_j$, $X_j(\xi_i)$ の項が含まれているが、これらの項を全部零とすればよい。詳しくは式 (5)~式 (28) までの各理論式を参照。

6-5 吊橋の理論式の変換方法

6-2 から 6-4 まで理論式の相互関係を考察したが、以上を列挙して、理論式の変換方法をまとめると

(1) ヒンジ結合からローラー結合に変換するには

$H_{p1}=H_{p2}=\cdots=H_{pn}=H_p$ とし、 $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \delta_{ij}=N$ とし、
 $-\sum_{i=1}^n f_{i0}(\xi)=Z(\xi)$ とすればよい。撓度理論と弾性理論の両理論、更に、連続支持、単純支持の両方に適用できる。

(2) 撓度理論から弾性理論に変換するには

撓度理論で求まる断面力などを S_D とし、弾性理論で求まる断面力などを S_E とすれば $\lim_{\mu \rightarrow 0} S_D = S_E$ となり、弾性理論に変換することができる。ヒンジ結合とローラー結合、更に、連続支持と単純支持の両方に適用できる。

(3) 連続支持から単純支持に変換するには

理論式の iM_j 、 $X_j(\xi_i)$ の項を零とすればよい。ヒンジ結合とローラー結合、更に、撓度理論と弾性理論の両方に適用できる。

以上より、吊橋の理論式は①、②、③、④、⑤、⑥、⑦、⑧までであるが、①の理論式を用いて、最高3回の変換を行なうことによって、②、③、④、⑤、⑥、⑦、⑧は①の特殊の場合と考えることができる。

7. 数値計算による理論式の相互関係

数値計算例としては、現在、計画中の本州四国連絡橋を例にとり、①、②、③、④、⑤、⑥、⑦、⑧を五径間吊橋、五径間連続吊橋として、表-1のような断面諸元を用いた。なお、影響線の形はヒンジ結合の場合もローラー結合の場合とほとんど同じであるので、ここでは省略する。文献(1) 参照。

表-1 断 面 諸 元

	第 1 径 間	第 2 径 間	第 3 径 間	第 4 径 間	第 5 径 間	ロ ー ラ ー 結 合 ヒ ン ジ 結 合 共 通
l	500 m	1250 m	1500 m	1250 m	500 m	
f	15.152 m	94.697 m	136.364 m	94.697 m	15.152 m	
I	2.151 m ⁴	2.37 m ⁴	2.543 m ⁴	2.37 m ⁴	2.151 m ⁴	
$E=2.1 \times 10^7 \text{ t/m}^2$, $E_c=2.0 \times 10^7 \text{ t/m}^2$, $A_c=0.72594 \text{ m}^2$, $H_g=32794 \text{ t}$						ヒ ン ジ 結 合 の 場 合 の み
$K=1$	I_z	2.37 m ⁴	2.543 m ⁴	2.543 m ⁴	2.37 m ⁴	
	h	79.9 m	190.42 m	190.42 m	79.9 m	
$K=2$	I_c	4.74 m ⁴	5.086 m ⁴	5.086 m ⁴	4.74 m ⁴	
	h	79.9 m	190.42 m	190.42 m	79.9 m	
$K=3$	I_z	7.11 m ⁴	7.629 m ⁴	7.629 m ⁴	7.11 m ⁴	
	h	79.9 m	190.42 m	190.42 m	190.42 m	

7-1 ローラー結合の場合のたわみ

図-5はローラー結合の場合の五径間吊橋（破線）、五径間連続吊橋（実線）において、集中荷重 $P=1 \text{ t}$ が中央径間中

央点に作用した時の中央径間中央点のたわみの値を示したものである。横軸に H_g を対数目盛でとり、縦軸はたわみを算術目盛でとってある。なお、補剛桁の断面二次モー

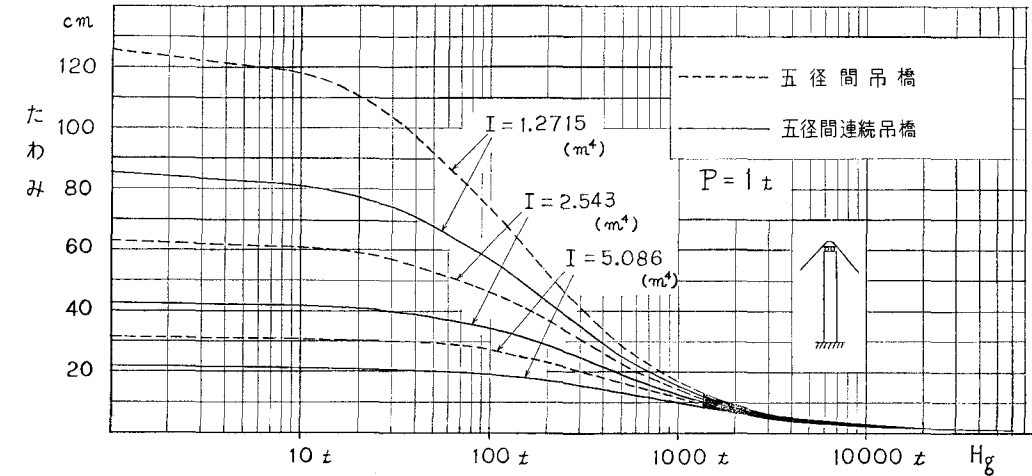


図-5 中央径間中央点のたわみの値

ントをいろいろ変化させてある。

図-5よりわかることは $H_0 \rightarrow 0$ の時は弾性理論であり、 $H_0 = 32794 \text{ t}$ の時は撓度理論であるから、補剛桁の断面二次モーメントを変化させると、弾性理論では非常に大きな差があり、撓度理論 ($H_0 = 32794 \text{ t}$) ではほとんど差がない。なお、図-5は弾性理論と撓度理論とがどのようにつながっているかを示している。

7-2 ローラー結合の場合の曲げモーメント

図-6は図-5と同様であり、縦軸は曲げモーメントを算術目盛でとってある。

図-6よりわかることは、弾性理論では断面二次モーメントが変化しても、曲げモーメントは変化しないが、撓度理論では、変化しており、断面二次モーメントが小さければ曲げモーメントは小さくなる。なお、連続支持の場合も単純支持の場合もほとんど同じになる。

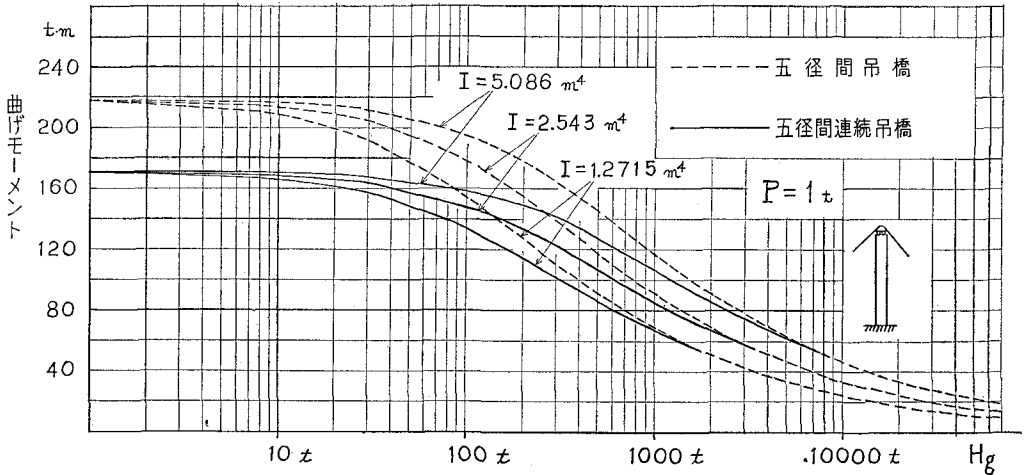


図-6 中央径間中央点の曲げモーメントの値

7-3 ローラー結合とヒンジ結合のたわみの比較

図-7の破線はローラー結合の場合であり、実線はヒンジ結合の場合の中央径間中央点のたわみの値である。横軸は H_0 を対数目盛、縦軸はたわみの値である。

図-7よりわかることは、弾性理論ではヒンジ結合とロー

ラー結合では非常に差があり、塔の曲げ剛性の影響が非常に大であることがわかる。一方、撓度理論ではほとんど差がないことがわかる。撓度理論では、塔の曲げ剛性の影響はほとんどないことがわかる。

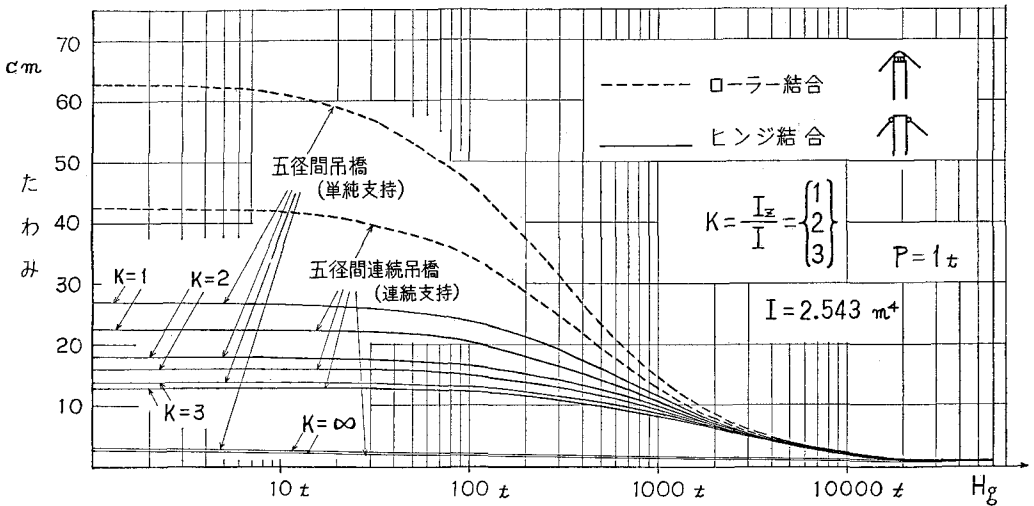


図-7 中央径間中央点のたわみの値

7-4 ローラー結合とヒンジ結合の場合の 曲げモーメントの比較

図-8は図-7と同様であり、縦軸は曲げモーメントの値である。図-7と同様に、撓度理論では、ローラー結合の場合もヒンジ結合の場合も、連続支持の場合も単純支持の場合もほとんど同じ値である。なお、弾性理論では非常に差

があるのは図-7の場合と同様である。

7-5 ヒンジ結合の場合の塔頂のたわみ

図-9は第2径間中央点に集中荷重 $P=1t$ が作用した時の第3塔 (図-3参照) の塔頂のたわみの値である。

図-9からわかることは、撓度理論ではほとんど差がないが、弾性理論では非常に差がある。

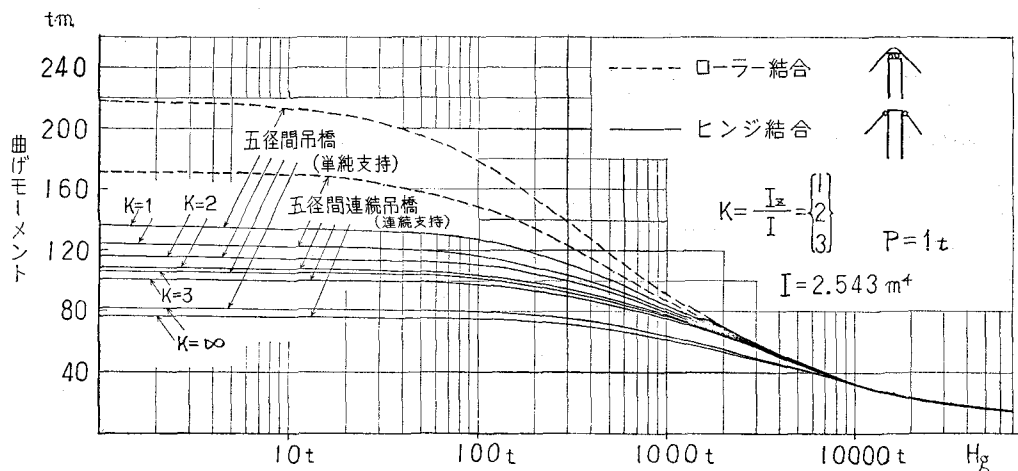


図-8 中央径間中央点の曲げモーメントの値

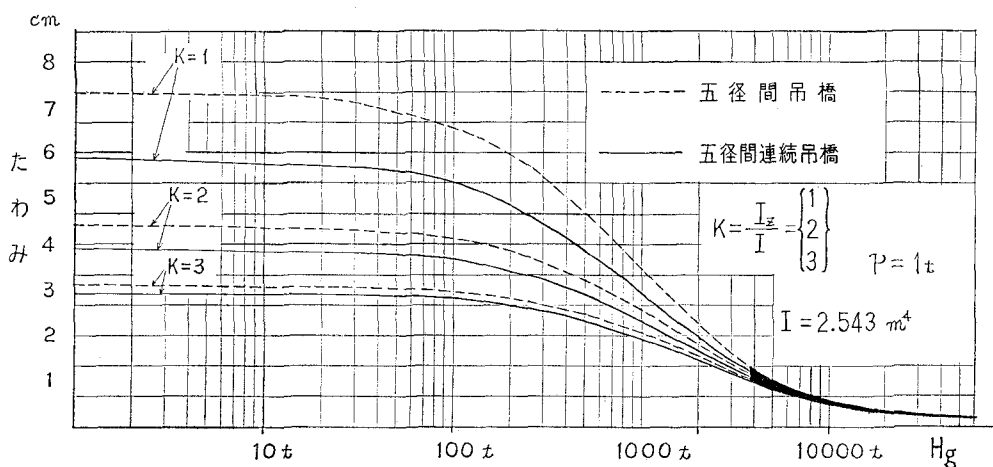


図-9 第3塔の塔頂のたわみの値 (ヒンジ結合)

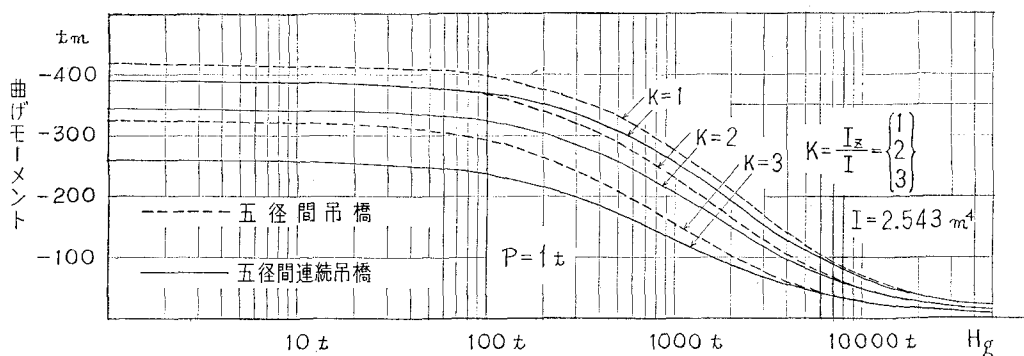


図-10 第3塔の固定端の曲げモーメントの値 (ヒンジ結合)

7-6 ヒンジ結合の場合の固定端の曲げモーメント

図-10は第2径間中央点に集中荷重 $P=1t$ が作用した時の第3塔 (図-3 参照) の固定端の曲げモーメントの値である。

図-10からわかることは、撓度理論ではほとんど差がないが、弾性理論では非常に差があることがわかる。

以上の図-5~図-10までを総合的に調べると、弾性理論では塔の曲げ剛性の影響は大であるが、撓度理論では塔の曲げ剛性の影響はほとんどない。また補剛桁は単純支持にしても連続支持にしてもほとんど差がない。

8. あとがき

本論文において行なった主なる事項は次の通りである。

(1) 塔の曲げ剛性を考慮した n 径間連続吊橋の撓度理論の一般式を誘導した。

(2) それによって、塔の曲げ剛性を無視した n 径間連続吊橋の撓度理論の一般式との相互関係を比較することができた。

(3) 更に、撓度理論と弾性理論との相互関係、連続支持と単純支持との相互関係も比較することができた。

(4) 従来の塔の曲げ剛性を無視した吊橋の理論 (弾性、撓度) は塔の曲げ剛性を考慮した吊橋の理論 (弾性、撓度) の特別の場合であることがわかった。

(5) 以上の理論式を用いて、中央径間が1500 m ぐらいの多径間長大吊橋の静力学的解析を行なった結果、撓度理論においては、塔の曲げ剛性は断面力特性にほとんど影響を及ぼさない。

(6) 故に、中央径間が1500 m ぐらいの多径間長大吊橋の静力学的解析では、塔の曲げ剛性を無視した場合の撓度理論を用い、補剛桁は単純支持として計算してよい。

なお、図-5から図-10までの作図は、ぼう大な電子計算によって行なわれたものである。

終わりに本論文作成にあたり北大渡辺 昇教授の種々の有用な御助言に対し深く感謝いたします。

参 考 文 献

- 1) 渡辺 昇・佐藤浩一:「多径間吊橋の弾性理論と撓度理論との比較について」, 第24回年次学術講演会, I-161.
- 2) Hawranek; Steinhardt:「Theorie und Berechnung der Stahlbrücken」. Springer-Verlag 1958.
邦訳 橋 善雄・小松定夫「鋼橋の理論と計算」, 山海堂.
- 3) Moppert, H:「Statische und dynamische Berechnung erdverankerter Hängebrücken mit Hilfe von Greenschen Funktionen und Integralgleichungen」. Veröffentlichungen des Deutschen Stahlbau-Verbandes, H. 9. Köln, 1955.
- 4) 渡辺 昇:「橋の影響線の理論と計算法」, 現代社.
- 5) 吉野太郎一:「鋼橋の理論と計算」, 石崎書店.
- 6) Klöppel, K., u. K. H. Lie:「Berechnung von Hängebrücken nach der Theorie II. Ordnung unter Berücksichtigung der Nachgiebigkeit der Hänger」. Stahlbau Bd. 14 (1941) S. 85.
- 7) Lie, K. H.:「Praktische Berechnung von Hängebrücken nach der Theorie II. Ordnung」. Stahlbau Bd. 14 (1941) S. 65, 78.
- 8) Bohny, F.: Hängebrücken über mehrere Öffnungen」. Bautechnik Bd. 15 (1937).
- 9) 平井 敦:「鋼橋 III」, 技報堂.
- 10) 土木学会:「本州四国連絡橋技術調査報告書」.