

斜 角 格 子 桁 橋 の 一 解 析 法

正 員 稼 農 知 徳*

要 旨

本文は斜橋構造において、各主桁に直角に荷重分配横桁を配置した斜角格子桁橋について解析し、簡単な一つの解析方法を示した。また、計算例として3主桁、1横桁の斜角格子桁の曲げモーメント、せん断力およびたわみ影響面を計算している。

1. ま え が き

現在すでに、斜桁橋の架設は至る所にみられ、特に市街地における高架橋では云うに及ばず、地方における小支間橋梁においても斜桁橋がしばしば架設されている。そして設計に使用する理論解析方法も、内外に多くの研究、発表がなされている。特に、斜角格子桁橋の解析は多少煩雑となり、多くは電子計算機利用によっているがたとえ電子計算機を利用する場合でも理論式が簡易な方がより効果的なことは論をまたない。本文では、曲線格子桁橋に関する解析の中で任意バネ係数を有する弾性支承上連続桁の支承反力公式を誘導したので、その一つの応用例として、斜角格子桁橋の解析を試みたものである。この解析方法は直角格子桁における F. Leonhardt および H. Homberg の方法を拡張したものに相当するが、今回は各主桁のねじり剛性を無視し、荷重分配横桁は各主桁と直角に配置した斜角格子桁を対象としたものである。

2. 解 析 方 法

図-1 のような任意形状の斜角格子桁で各主桁に直交する一本の横桁が配置された場合について説明する。主桁のねじり剛性を無視しているから、主桁と横桁とはヒンジ結合となっている。今主桁 c と横桁との交点における格点力を不静定量にとり、図-2を参照して、不静定量 X を求める。

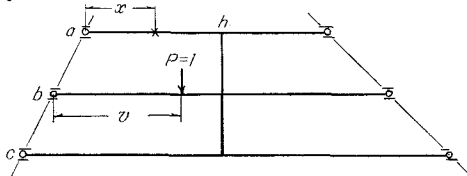


図-1 任意形状斜角格子桁

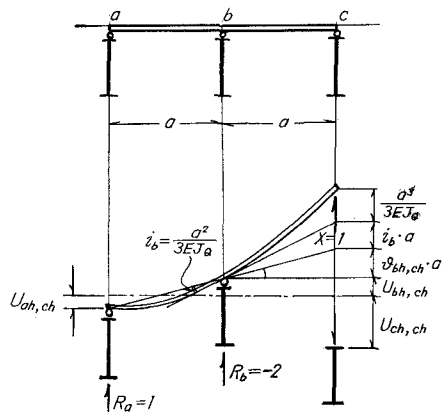


図-2 $X=1$ による変形量

状態 $X=1$

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11} &= 1 \times u_{ch,ch} + (-1) \\ &\times \left\{ u_{bh,ch} + \vartheta_{bh,ch} \cdot a + i_b \cdot a - \frac{a^3}{3EJ_Q} \right\} \\ &= u_{ch,ch} - u_{bh,ch} - \vartheta_{bh,ch} \cdot a + \frac{2a^3}{3EJ_Q} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

状態 $X=0$

$$\left. \begin{aligned} \delta_{10} &= u_{h,av} \quad P=1 \text{ が主桁 } a \text{ に作用したとき} \\ \delta_{10} &= u_{h,bv} \quad P=1 \text{ が主桁 } b \text{ に作用したとき} \\ \delta_{10} &= u_{h,cv} \quad P=1 \text{ が主桁 } c \text{ に作用したとき} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

次に垂直バネ係数 ω_t [cm/kg] を式 (3) のようにとる。

$$\left. \begin{aligned} \omega_a &= f_{ah,ah} \\ \omega_b &= f_{bh,bh} = \frac{1}{r_b} \cdot \omega_a \\ \omega_c &= f_{ch,ch} = \frac{1}{r_c} \cdot \omega_a \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

このバネ係数を用いて式 (1), (2) を書き換えるが、図-2を参照して、式 (4), (5) が得られるから、

$$\left. \begin{aligned} u_{ah,ch} &= 1 \times f_{ah,ah} = \omega_a \\ u_{bh,ch} &= -2 \times f_{bh,bh} = -\frac{2}{r_b} \omega_a \\ u_{ch,ch} &= 1 \times f_{ch,ch} = \frac{1}{r_c} \omega_a \\ \vartheta_{ch,ch} &= -\left(1 + \frac{2}{r_b}\right) \frac{\omega_a}{a} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

* 北海道大学工学部 助教授

$$\left. \begin{aligned} u_{h,av} &= 1 \times f_{h,av} = \omega a \cdot \rho_{h,av} \\ u_{h,bv} &= -2 \times f_{h,bv} = -\frac{2}{r_b} \cdot \omega a \cdot \rho_{h,bv} \\ u_{h,cv} &= 1 \times f_{h,cv} = \frac{1}{r_c} \cdot \omega a \cdot \rho_{h,cv} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ここで $\rho_{h,kv}$ を単位曲げ曲線と云う。

結局式 (1), (2) は式 (7), (8) となる。

$$\partial_{11} = \omega a \left[1 + \frac{4}{r_b} + \frac{1}{r_c} + \frac{2a^3}{3EJ_Q} \right]$$

曲げ格子剛度 z を式 (6) のように定義して、

$$z = 6 \frac{EJ_Q}{a^3} \cdot \omega a \quad (6)$$

$$\partial_{11} = \omega a \left[1 + \frac{4}{r_b} + \frac{1}{r_c} + \frac{4}{z} \right] \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} \partial_{10} &= \omega a \cdot \rho_{h,av} \\ \partial_{10} &= -\frac{2}{r_b} \cdot \omega a \cdot \rho_{h,bv} \\ \partial_{10} &= \frac{1}{r_c} \cdot \omega a \cdot \rho_{h,cv} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

故に不静定格点力 X は式 (9) となる。

$$\left. \begin{aligned} X &= -\frac{1}{N} \cdot \rho_{h,av} \\ X &= \frac{2}{r_b N} \cdot \rho_{h,bv} \\ X &= -\frac{1}{r_c N} \cdot \rho_{h,cv} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\text{ただし } N = 1 + \frac{4}{r_b} + \frac{1}{r_c} + \frac{4}{z}$$

この不静定格点力をみると、弾性沈下可能支承上連続桁支承反力の $\rho_{h,kv}$ 倍になっており、また $\rho_{h,kv}$ は各主桁において、横桁取付点を剛支点とする連続桁の支点反力となっている。すなわち、格子桁の不静定格点力は橋軸方向には剛支点上連続桁の支点反力と、横断方向には弾性支承上連続桁の支承反力との積であるということが出来る。

従って並列主桁が多くなっても弾性沈下可能支承上連続桁の支承反力を求めておけば、不静定格点力はすぐに求められる。今、弾性沈下可能支承上連続桁の支承反力を C_{ik} とすると、不静定格点力影響面は式 (10) となる。

$$X_{ih,kv} = \rho_{h,kv} \cdot C_{ik} \quad (10)$$

断面力および変形量の影響面は、式 (11) となる。

$$S_{ix,kv} = S_{ix,kv}^0 + S_{ix,h} \cdot \rho_{h,kv} \cdot C_{ik} \quad (11)$$

ここで $k \neq i$ に対しては $S_{ix,kv}^0 = 0$, $C_{ik} = B_{ik}$

$k = i$ に対しては $S_{ix,kv}^0 = S_{ix,iv}^0$, $C_{ii} = B_{ii} - 1$

$S_{ix,kv}^0$ は単純桁の影響線

$S_{ix,h}$ は横桁取付点に単位荷重が作用した時の断面力図又は変形図の点 x の値である。

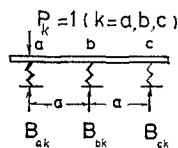


図-3

表-1 3-弾性支承上の桁

影響値	$P_k=1$ による	係 数			分 母
		・1	$\cdot \frac{1}{r_b}$	$\cdot \frac{1}{r_c}$	
支 承 反 力	$B_{aa}-1$	-1			: N
	B_{ab}		2		: N
	B_{ac}			-1	: N
	B_{ak}				
支 承 反 力	B_{ba}	2			: N
	$B_{bb}-1$		-4		: N
	B_{bc}			2	: N
	B_{bk}				
支 承 反 力	B_{ca}	-1			: N
	B_{cb}		2		: N
	$B_{cc}-1$			-1	: N
	B_{ck}				

$$\text{分母: } N = 1 + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} + \frac{4}{z}$$

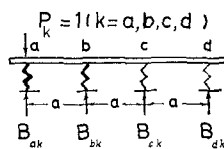


図-4

表-2 4-弾性支承上の桁

影響値	$P_k=1$ による	係 数					分 母
		・1	$\cdot \frac{1}{r_b}$	$\cdot \frac{1}{r_c}$	$\cdot \frac{1}{r_d}$	$\cdot \frac{1}{z}$	
支 承 反 力	$B_{aa}-1$		-1	-4	-1	-4	: N
	B_{ab}			6	2	9	: $r_b \cdot N$
	B_{ac}				-1	-6	: $r_c \cdot N$
	B_{ad}					1	: $r_d \cdot N$
	B_{ak}						
支 承 反 力	B_{ba}			6	2	9	: N
	$B_{bb}-1$	-1		-9	-4	-24	: $r_b \cdot N$
	B_{bc}	2			2	21	: $r_c \cdot N$
	B_{bd}	-1			3	-6	: $r_d \cdot N$
	B_{bk}						
支 承 反 力	B_{ca}		3		-1	-6	: N
	B_{cb}	2			2	21	: $r_b \cdot N$
	$B_{cc}-1$	-4	-9		-1	-24	: $r_c \cdot N$
	B_{cd}	2	6			9	: $r_d \cdot N$
	B_{ck}						
支 承 反 力	B_{da}		-2	-2		1	: N
	B_{db}	-1		3		-6	: $r_b \cdot N$
	B_{dc}	2	6			9	: $r_c \cdot N$
	$B_{dd}-1$	-1	-4	-1		-4	: $r_d \cdot N$
	B_{dk}						

3. 弾性沈下可能支承上連続桁支承反力公式

曲げ格子剛度 z およびバネ係数比 r_i を用い垂直荷重 P による支承反力 B_{ik} を3主桁, 4主桁について表-2に示すが5主桁以上については頁数の関係で割愛する。

4. 斜角格子桁の例

図-5のような斜角格子桁を解析する。

$$\beta = \left(1 - \frac{2a}{l} \cot \theta\right), \quad \beta' = \left(1 + \frac{2a}{l} \cot \theta\right) \quad (12)$$

横桁取付点の垂直変位:

$$\left. \begin{aligned} f_{ah, ah} &= \frac{l^3}{48EJ_a} \cdot \beta^2 \cdot \beta'^2 \\ f_{bh, bh} &= \frac{l^3}{48EJ_b} \\ f_{ch, ch} &= \frac{l^3}{48EJ_c} \cdot \beta^2 \beta'^2 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

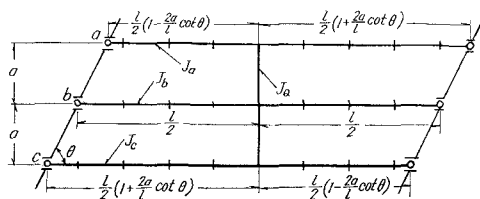


図-5 斜角格子桁

バネ係数 ω_i とバネ係数比 r_i :

$$\left. \begin{aligned} \omega_a &= f_{ah, ah} \\ \omega_b &= \frac{1}{r_b} \omega_a \\ \omega_c &= \frac{1}{r_c} \omega_a \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r_b} &= \frac{1}{\beta^2 \cdot \beta'^2} \cdot \frac{J_a}{J_b} \\ \frac{1}{r_c} &= \frac{J_a}{J_c} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

曲げ格子剛度 z :

$$z = \left(\frac{l}{2a}\right)^3 \cdot \frac{J_Q}{J_a} \cdot \beta^2 \cdot \beta'^2 \quad (16)$$

単位曲げ曲線 $\rho_{h, kv}$:

$$\left. \begin{aligned} \rho_{h, av} &= \frac{1}{\beta^2 \cdot \beta'^2} \cdot \frac{v}{l} \cdot \left\{4 - \beta'^2 - 4 \left(\frac{v}{l}\right)^2\right\} \\ 0 \leq v \leq \frac{l}{2} \cdot \beta \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} \rho_{h, av} &= \frac{1}{\beta \cdot \beta'^2} \cdot \frac{v'}{l} \cdot \left\{4 - \beta^2 - 4 \left(\frac{v'}{l}\right)^2\right\} \\ \frac{l}{2} \cdot \beta \leq v \leq l \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \rho_{h, bv} &= \frac{v}{l} \cdot \left\{3 - 4 \left(\frac{v}{l}\right)^2\right\} & 0 \leq v \leq \frac{l}{2} \\ \rho_{h, bv} &= \frac{v'}{l} \cdot \left\{3 - 4 \left(\frac{v'}{l}\right)^2\right\} & \frac{l}{2} \leq v \leq l \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} \rho_{h, cv} &= \frac{1}{\beta \cdot \beta'^2} \cdot \frac{v}{l} \cdot \left\{4 - \beta^2 - 4 \left(\frac{v}{l}\right)^2\right\} \\ 0 \leq v \leq \frac{l}{2} \cdot \beta' \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \rho_{h, cv} &= \frac{1}{\beta^2 \cdot \beta'} \cdot \frac{v'}{l} \cdot \left\{4 - \beta'^2 - 4 \left(\frac{v'}{l}\right)^2\right\} \\ \frac{l}{2} \cdot \beta' \leq v \leq l \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

5. 数値計算例

図-6のような形状寸法の斜角格子桁に対する数値計算を示す。各主桁の支間は等支間で $l=28$ m, 主桁間隔 $a=3.2$ m, 斜角度 $\theta=55^\circ$, 主桁断面二次モーメントは各主桁等しく $J_a=J_b=J_c=J$ として, 横桁の断面二次モーメント J_Q との比を $J_Q/J=1/3$ とした。影響線縦距の計算格点は示方書規定による線荷重載荷に便利ように図-6に示す格点について計算した。

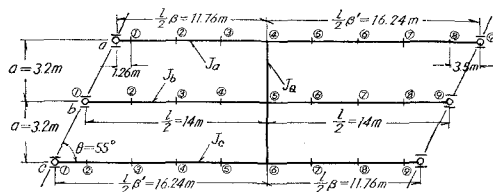


図-6 斜角格子桁形状寸法

まず, 式(12)より $\beta=0.84$, $\beta'=1.16$ 又式(15)より

$$\frac{1}{r_b} = \frac{1}{0.84^2 \times 1.16^2} = 1.0532, \quad \frac{1}{r_c} = 1$$

そして式(16)より曲げ格子剛度 $z=26.5017$ が求められる。従って弾性支承反力公式より表-3のよう支承反力が求められる。

表-3 弾性支承反力 B_{ik}

$B_{aa}=0.8429$	$B_{ab}=0.3310$	$B_{ac}=-0.1571$
$B_{ba}=0.3143$	$B_{bb}=0.3380$	$B_{ba}=0.3143$
$B_{ca}=-0.1571$	$B_{cb}=0.3310$	$B_{cc}=0.8429$

表-4 各主桁単位曲げ曲線 $\rho_{h, kv}$

格点 主桁	1	2	3	4	5	6	7	8	9	乗数
a	0.1454	0.5273	0.8312	1.0000	0.9928	0.8347	0.5671	0.2314	0	—
b	0	0.3672	0.6875	0.9141	1.0000	0.9141	0.6875	0.3672	0	—
c	0	0.2314	0.5671	0.8347	0.9928	1.0000	0.8312	0.5273	0.1454	—

表—5 た わ み $\delta_{ix,h}$

格点 主桁	1	2	3	4	5	6	7	8	9	乗 数
a	0.2876	1.0429	1.6441	1.9780	1.9638	1.6510	1.1216	0.4578	0	$\times 10^{-2} \cdot l^3/EJ$
b	0	0.7650	1.4323	1.9043	2.0833	1.9043	1.4323	0.7650	0	"
c	0	0.4578	1.1216	1.6510	1.9638	1.9780	1.6441	1.0429	0.2876	"

表—6 曲 げ モー メ ン ト $M_{ix,h}$

格点 主桁	1	2	3	4	5	6	7	8	9	乗 数
a	0.0261	0.0986	0.1711	0.2436	0.1911	0.1386	0.0861	0.0336	0	$\times l$
b	0	0.0625	0.1250	0.1875	0.2500	0.1875	0.1250	0.0625	0	"
c	0	0.0336	0.0861	0.1386	0.1911	0.2436	0.1711	0.0986	0.0261	"

表—7 セ ン 断 力 $Q_{ix,h}$

格点 主桁	1	2	3	4	5	6	7	8	9	乗 数
a	0.5800	0.5800	0.5800	0.5800 -0.4200	-0.4200	-0.4200	-0.4200	-0.4200	-0.4200	—
b	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000 -0.5000	-0.5000	-0.5000	-0.5000	-0.5000	—
c	0.4200	0.4200	0.4200	0.4200	0.4200	0.4200 -0.5800	-0.5800	-0.5800	-0.5800	—

表—8 主桁 a の格点 4 の曲げモーメント影響面

格 点	1	2	3	4	5	6	7	8	9	乗 数
$M_{a4,av}^0$	0.0261	0.0986	0.1711	0.2436	0.1911	0.1386	0.0861	0.0336	0	$\times l$
$M_{a4} \cdot \rho_{av} \cdot C_{aa}$	-0.0056	-0.0202	-0.0318	-0.0383	-0.0380	-0.0319	-0.0217	-0.0089	0	"
$M_{a4,av}$	0.0205	0.0784	0.1393	0.2053	0.1531	0.1067	0.0644	0.0247	0	"
$M_{a4} \cdot \rho_{bv} \cdot C_{ab}$	0	0.0296	0.0554	0.0737	0.0806	0.0737	0.0554	0.0296	0	$\times l$
$M_{a4,bv}$	0	0.0296	0.0554	0.0737	0.0806	0.0737	0.0554	0.0296	0	"
$M_{a4} \cdot \rho_{cv} \cdot C_{ac}$	0	-0.0089	-0.0217	-0.0319	-0.0380	-0.0383	-0.0318	-0.0202	-0.0056	$\times l$
$M_{a4,cv}$	0	-0.0089	-0.0217	-0.0319	-0.0380	-0.0383	-0.0318	-0.0202	-0.0056	"

表—9 主桁 b の格点 5 のたわみ影響面

格点	1	2	3	4	5	6	7	8	9	乗 数
$\delta_{b5} \cdot \rho_{av} \cdot C_{ba}$	0.0952	0.3453	0.5443	0.6548	0.6501	0.5465	0.3713	0.1515	0	$\times 10^{-2} \cdot l^3/EJ$
$\delta_{b5,av}$	0.0952	0.3453	0.5443	0.6548	0.6501	0.5465	0.3713	0.1515	0	"
$\delta_{b5,bv}^0$	0	0.7650	1.4323	1.9043	2.0833	1.9043	1.4323	0.7650	0	$\times 10^{-2} \cdot l^3/EJ$
$\delta_{b5} \cdot \rho_{bv} \cdot C_{bb}$	0	-0.5064	-0.9482	-1.2607	-1.3791	-1.2607	-0.9482	-0.5064	0	"
$\delta_{b5,bv}$	0	0.2586	0.4841	0.6436	0.7042	0.6436	0.4841	0.2586	0	"
$\delta_{b5} \cdot \rho_{cv} \cdot C_{bc}$	0	0.1515	0.3713	0.5465	0.6501	0.6548	0.5443	0.3453	0.0952	$\times 10^{-2} \cdot l^3/EJ$
$\delta_{b5,cv}$	0	0.1515	0.3713	0.5465	0.6501	0.6548	0.5443	0.3453	0.0952	"

表-10 主桁 c の格点 6 のせん断力影響面

格 点	1	2	3	4	5	6	7	8	9	乗 数
$Q_{c1} \cdot \rho_{av} \cdot C_{ca}$	-0.0096	-0.0348	-0.0548	-0.0660	-0.0655	-0.0551	-0.0374	-0.0153	0	—
$Q_{c1,av}$	-0.0096	-0.0348	-0.0548	-0.0660	-0.0655	-0.0551	-0.0374	-0.0153	0	—
$Q_{c1} \cdot \rho_{bv} \cdot C_{cb}$	0	0.0510	0.0956	0.1271	0.1390	0.1271	0.0956	0.0510	0	—
$Q_{c1,bv}$	0	0.0510	0.0956	0.1271	0.1390	0.1271	0.0956	0.0510	0	—
$Q_{c1,v}^0$	1.0000	0.9200	0.7950	0.6700	0.5450	0.4200	0.2950	0.1700	0.0450	—
$Q_{c1} \cdot \rho_{cv} \cdot C_{cc}$	0	-0.0153	-0.0374	-0.0551	-0.0655	-0.0660	-0.0548	-0.0348	-0.0096	—
$Q_{c1,cv}$	1.0000	0.9047	0.7576	0.6149	0.4795	0.3540	0.2402	0.1352	0.0354	—

次に単位曲げ曲線 $\rho_{h,kv}$ を式 (17), (18), (19) より求めると表-4 が得られる。更に各主桁の横桁取付点に単位荷重が作用した時の断面力および変形を求めると表-5, 6, 7 が得られる。以上のように各数値表が得られると主桁の任意の点における断面力および変形の影響面が機械的に簡単に求めることが出来る。例えば、主桁 a の格点 4 における曲げモーメント影響面は表-8 および 図-7 となり、主桁 b

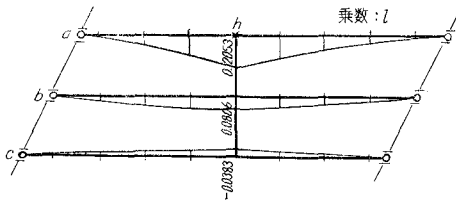


図-7 主桁 a の格点 4 の曲げモーメント影響面

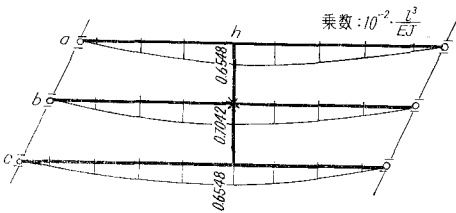


図-8 主桁 b の格点 5 のたわみ影響面

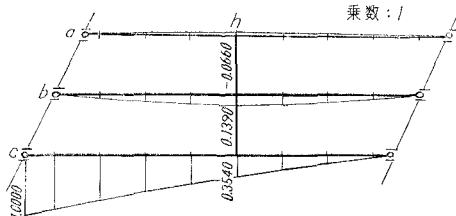


図-9 主桁 c の格点 6 のせん断力影響面

の格点 5 におけるたわみ影響面は表-9 および 図-8 となる。また、主桁 c の格点 1 におけるせん断力影響面は表-10 および 図-9 となる。

6. あとがき

前述のように斜角格子桁については多くの解析方法があってすでに設計に利用されているが、本論文の解析法は電子計算機を利用しなくても機械的に簡単に計算出来るものであり、もし電子計算機を利用するとしても単なる代数式でありプログラミングも簡易なものとなる。本論文の計算例のように、主桁のねじり剛性を無視し横桁 1 本とした場合は、中小支間橋梁の設計などに充分適用出来る。断面力および変形影響面の面積の厳密な計算は省いたがこれも簡単に計算出来る。なお主桁のねじり剛性を考慮した場合、更に横桁本数を 2 本以上配置した場合などもこれを拡張して求められる。

参 考 文 献

- 1) 渡辺 昇: 「格子げたの理論と計算」, 技報堂, 1965.
- 2) H. Homberg: 「Kreuzwerke, statik der trägerroste und Platten」, Forschungshefte aus dem Gebiete des Stahlbaues Heft 8, 1951.
- 3) 稼農知徳: 「曲線格子桁の簡易計算法」, 土木学会第 24 回, 年学術講演概要, 第 I 部門, 1969.

正 誤 表

50 頁の表-2 における N の値は次のとおりである。

$$N = \frac{1}{r_b} + \frac{4}{r_c} + \frac{1}{r_d} + \frac{9}{r_b r_c} + \frac{4}{r_b r_d} + \frac{1}{r_c r_d} + \frac{1}{z} \left(4 + \frac{24}{r_b} + \frac{24}{r_c} + \frac{4}{r_d} \right) + \frac{15}{z^2}$$