

最終強度理論による鉄筋コンクリートの最適設計

正 員 藤 井 卓*

1. ま え が き

最適設計の問題は、設計上の諸条件および構造工学の現状などにより、種々の形をとるのが普通である。通常の設計は、主として構造物の与えられた諸寸法についての解析に関連している。通常の設計手順において、応力やタワミが計算され、それから断面の過不足が修正される。この手順は、構造物の諸寸法を推定すると言う過程のくり返しである。そしてこの過程は、その構造物が安全でかつ費用の点で妥当となるまでくり返し続けられる。しかし、そのようにして求められた構造物が、一般に全ての可能な設計のうちで最も経済的であるとは言われない。

これに反して構造物の最適設計では、断面寸法は不必要であり、それらは変数として扱われまたこれらの変数は、荷重の釣合やその他の構造上の諸条件のもとに、構造物の費用が最小となるように決定される。解析が行なわれる前に部材の断面寸法が推定される必要がないから、最適解を与える構造物のモーメントを直接的に決定することが可能である。

鉄筋コンクリート構造物の最適設計法に関する研究は、1945年頃から発表されている。Rozvany^{(21),(22)}, Hampson⁽²¹⁾, Brothie⁽⁵⁾, Anderheggen および Thürlimann⁽²⁾ 等は、断面寸法が与えられていると言う仮定のもとに問題を扱った。明らかにそうした仮定のもとでの設計は、最も経済的とは言われない。Norman⁽¹⁸⁾ は、バランスド・デザインを仮定して問題を扱ったが、そうした設計が決して経済設計とならないことが指摘されている⁽²³⁾。Albouy, Bonnet および Leray⁽¹⁾ によって提案された設計方法では、設計にさきだって最適鉄筋量を推定することは、一般に容易でない。Hill の方法⁽¹⁴⁾ は、電算機を用いた自動設計に適しているが、第1次の最適化において鉄筋が無視されている。Sawyer⁽²³⁾ および Traum⁽²⁵⁾ によって開発された方法は、ケタあるいはスラブのような矩形断面にのみしか適用されないが、合理的な方法と思われる。

鉄筋コンクリートの最適設計方法としては、上に述べたように種々提案されているが、より実用的で適用幅の広い方法の開発が望まれている。本研究の目的は、鋼構造の最小

重量設計あるいは最小費用設計の手法にもとづいて、鉄筋コンクリート構造物の最適設計法を開発することである。

2. 最適設計の理論

鋼構造においてケタおよびラーメンの最小重量設計法あるいは最小費用設計法と呼ばれる最適設計に関する研究は、今日までに非常に数多く発表されている^{(4),(9),(10),(13),(16), (17),(19),(24),(27)}。

Heyman⁽¹³⁾ は、単位部材長の重量がその部材の全塑性モーメントに比例すると仮定して、Neal と Symonds が最終荷重容量を決定するために開発した不等式法が、ラーメンの最小重量設計に容易に適用されることを示した。同様の仮定のもとに、Foulkes⁽⁹⁾ は、最小重量設計が線型計画法の問題に帰することを指摘し、その後の論文⁽¹⁰⁾ で最小重量設計に対する必要かつ十分な条件を確立した。また同様の仮定のもとに Livesley⁽¹⁶⁾ は、電算機のためのプログラミングについて検討し、最急降下法を用いて最小重量設計の問題を扱った。Prager⁽¹⁹⁾ は、Foulkes の理論を発展させ、単位部材長の重量が全塑性モーメントの n 乗に比例すると仮定した場合を扱った。同様の仮定のもとに、Vargo⁽²⁷⁾ は、集中荷重を受ける2区間連続ケタに対する最小重量設計を研究した。Megarefs と Hodge⁽¹⁷⁾ は、非線型理論にもとづく $W=A \cdot M^C$ の定数 C が1よりも大きい場合には、数学的困難が解消することを指適し、 $C=2$ の場合のラーメンについてその適用を示した。Bigelow と Gaylord⁽⁴⁾ は、単位重量と全塑性モーメントとの非線型関係を部分的に線型化し、軸力の影響および横方向崩壊による全体の不安定性をも考慮して、ラーメンの線型計画法による最小重量設計法を開発した。また最近、Toakley⁽²⁴⁾ は、単位重量と全塑性モーメントとの関係を用いずに動的計画法を利用して、実際に市場で得られる断面を用いる最小重量設計法を導いている。

構造物の最適設計の基本となる数学的モデルを準備するために、単位部材長の重量あるいは費用をその部材の塑性モーメント容量の関数として表わす必要がある。鋼構造における最適設計の線型理論では単位部材長の重量あるいは費用は、塑性モーメントに比例する。従ってこの関係は次式で表わされる。

* 北海道開発局土木試験所 コンクリート研究室 副室長

$$G_L = A + B \cdot M_p \quad (1)$$

ここに A および B は与えられる定数である³⁾。任意の構造物の全体重量あるいは全体費用 W は、次の形で与えられる、

$$W = \sum G_{Li} \cdot L_i = A \cdot \sum L_i + B \sum M_i \cdot L_i \quad (2)$$

ここに G_{Li} は i 部材の単位長の重量あるいは費用、 L_i は i 部材の長さ、 M_i は i 部材の塑性モーメントである。 W を最小にする問題は、結局 $\sum M_i \cdot L_i$ を最小にすることと同じである。線型理論の便利な点は、塑性モーメントの決定が、モーメントと重量あるいは費用との間の特別な線型関係に無関係なことである。

一方、非線型理論では、塑性モーメントは単位部材長の重量あるいは費用のあるべき乗に比例する。従ってモーメントと重量あるいは費用との関係は、一般に次式によって近似される。

$$M_p = A \cdot C_L^C \quad (3)$$

任意の構造物の全体重量あるいは費用は、次式で与えられる。

$$W = \sum G_{Li} \cdot L_i = (1/A)^{1/C} \cdot \sum M_i^{1/C} \cdot L_i \quad (4)$$

W を最小にする問題は、 $\sum M_i^{1/C} \cdot L_i$ を最小にすることと同じである。(4) 式によれば W を最小にするに先立って、モーメントと重量あるいは費用との関係が求められなければならない。一般に鋼構造用の経済広幅フランジでは、 C は 1.5 また $(1/A)^{1/C}$ は 1.2 として実用上さしつかえない³⁾。一方鉄筋コンクリート構造の分野では、(1) 式および (3) 式の定数は今日まで示されていない。

本稿においては上述の最小重量あるいは最小費用設計の手法が、鉄筋コンクリート構造の最適設計に応用される。なお最小重量設計法の鉄筋コンクリートへの応用については、他にも試みられている¹¹⁾。

3. 最終モーメントと費用との関係

(1) 仮定および制限

本稿の問題は、次の仮定および制限のもとに扱われる。

- 設計計算は、ACI コード⁶⁾の最終強度設計の規定に従っている。
- 単鉄筋と複鉄筋矩形断面および T 形断面が扱われる。
- 部材は、曲げのみを受ける。
- 部材は、塑性ヒンジを生ずるに十分な回転容量を有する。
- 鉄筋の降伏点強度は、40,000 (2,812), 50,000 (3,516), および 60,000 psi (4,219 kg/cm²) とする。
- コンクリートの圧縮強度は、3,000 (211), 4,000 (281), 5,000 (352) および 6,000 psi (422 kg/cm²) とする。
- 矩形断面の幅と T 形断面のウェブ幅は、12 in (30.5

cm) とし、最大有効高は断面の幅の 2.5 倍の 30 in (76.2 cm) とする。

- 骨材の最大寸法は、3/4 in (19 mm) よりも小さい。

(2) 単鉄筋矩形断面

幅 $b = 12$ in (30.5 cm)、有効高 $d = 3$ in (7.62 cm) から 30 in (76.2 cm) また鉄筋比 $p = 0.002$ から最大値を有する単鉄筋矩形断面が扱われる。まず初めに鉄筋の降伏点強度 f_y とコンクリートの圧縮強度 f'_c の一組が選ばれ、次いで最大鉄筋比が計算される。鉄筋の重心とコンクリート面との距離は、ACI コードの規定と鉄筋コンクリート設計ハンドブック²⁰⁾の値により決められる。最終モーメント M_U とそれに対応する費用 C_0 は、初期値から最大値まで変化する各々の鉄筋比および有効高に対して、次式によって計算される。

$$M_U = \phi \{ b d^2 p f_y (1 - 0.59 p f_y / f'_c) \} / 12000 \text{ (Kip-ft)} \quad (5)$$

$$C_0 = b(d+s) C_c / 27 \times 144 + A_s \cdot C_s \cdot 490 / 2000 \times 144 + \{ b + 2(d+s) \} C_{fb} / 12 \quad (\$/ft) \quad (6)$$

ここに ϕ = 容量係数、 C_c = コンクリートの単価 ($\$/yd^3$)、 C_s = 鉄筋の単価 ($\$/ton$)、 C_{fb} = ケタ用型枠の単価 ($\$/ft^2$)、 A_s = 引張鉄筋の断面積 (in²)、なお材料の単価は表-1 に示されている⁹⁾。計算された最終モーメントとそれに対応する費用のマトリクスから、同一最終モーメントを与える断面のうち最小費用をもつものが選ばれ、次いで最終モーメントと単位部材長の費用との関係を示す実験式が求められる。図-1 は、求められた式の係数、鉄筋の降伏点強度およびコンクリート圧縮強度の間の関係を示す。モーメン

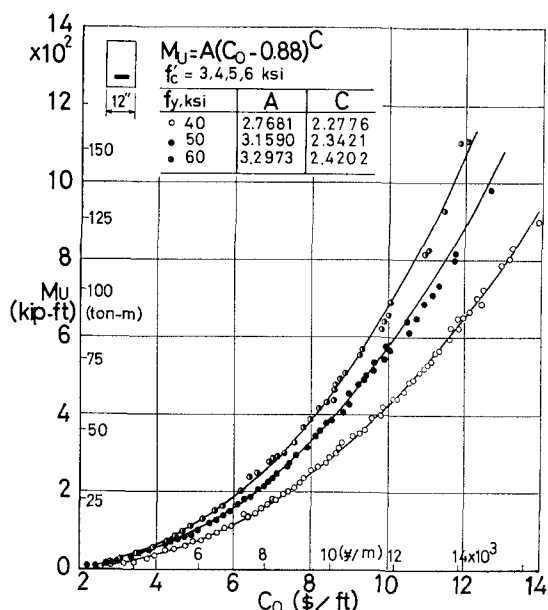


Fig. 1. Ultimate moment vs. cost per unit length

図-1 最終モーメントと単位部材長の費用との関係

表—1 材 料 の 単 価

ITEM	COST (\$)		
	UNIT	LABOR	MATERIAL
CONCRETE	CY	20.91	
Beams & slabs—Max. 100 CY/DAY Hoist double drum	CY	3.00	17.00
	CY	0.46	0.45
REINFORCEMENT	TON	264.00	
Fabricated, tagged, delivered & placed, including hoisting, mixed sizes	TON	72.00	192.00
FORMWORK (FOR BEAM)	SF	0.88	
Average (up to 36" girth) & (over 36" girth)	SF	0.68	0.20
FORMWORK (FOR SLAB)	SF	0.88	
Suspended slab up to 15' shore	SF	0.70	0.18

ト・費用関係の一般式は、次の形で表わされる。

$$M_U = A (C_0 - 0.88)C \quad (7)$$

ここに

$$A = -0.1263 \times 10^{-10} f_y^2 + 0.1528 \times 10^{-3} f_y - 1.3215$$

$$C = 0.6800 \times 10^{-10} f_y^2 + 0.3298 \times 10^{-6} f_y + 2.1556$$

(3) 複鉄筋矩形断面

コンクリート断面の寸法は、単鉄筋の場合と同様とする。断面は有効高 8 in (20.3 cm) から 30 in (76.2), 鉄筋比 $P = (p - p') = 0.008^{26)}$ から ACI コードで規定される最大値までを有するものとし、 p' と p の比 PR は 0.1 キザミに 0.2 から 0.6 まで変化する。最終モーメントとそれに対応する費用は、次式によって計算される。

$$M_U = \emptyset \{ b d^2 P f_y (1 - 0.59 P f_y / f'_c) + b d (d - d') P \cdot PR f_y / (1 - PR) \} / 12000 \quad (8)$$

$$C_0 = b(d+s)C_c / 27 \times 144 + (A_s + A'_s)C_s 490 / 2000 \times 144 + \{ b + 2(d+s) \} C_{fw} / 12 \quad (9)$$

ここに A'_s = 圧縮鉄筋の断面積 (in²), 計算の手順は、単鉄筋の場合とほぼ同様である。最終モーメントと費用の関係の一例は、表-2 および 図-2 に示されている。最終モーメントと費用との関係を示す一般式は、次の形で表わされる。

$$M_U = A (C_0 - 0.88)C \quad (10)$$

ここに

$$A = \{ -5.650 (p'/p)^2 + 2.875 p'/p + 0.866 \} f_y 10^{-4} + 21.60 (p'/p)^2 - 14.88 p'/p + 0.853$$

$$C = 2.0599$$

(4) T 形断面

フランジ厚 $t = 3$ in (7.6 cm) から 1 in (2.5 cm) キザミに 8 in (20.3 cm) まで、ウェブ幅 $b' = 12$ in (30.5 cm), 鉄筋比 $P = (p_w - p_f) = 0.0005$ から最大値までの断面が、次の条件のもとに扱われる。

$$t/d \leq 0.3 \quad (11)$$

$$b = 16t + b' \quad (12)$$

表—2 複鉄筋矩形断面のモーメント、費用関係の係数

f_y , ksi	40		50		60	
	A	C	A	C	A	C
p'/p	A	C	A	C	A	C
0.2	3.6993	2.0496	4.8817	2.0536	4.3578	2.1951
	3.6039	2.0599	4.8104	2.0599	6.0338	2.0599
0.3	3.7152	2.0059	4.2324	2.0770	4.2945	2.1710
	3.2243	2.0599	4.4163	2.0599	5.6652	2.0599
0.4	3.0347	2.0313	4.7081	1.9908	6.4637	1.9650
	2.8060	2.0599	3.9154	2.0599	5.0302	2.0599

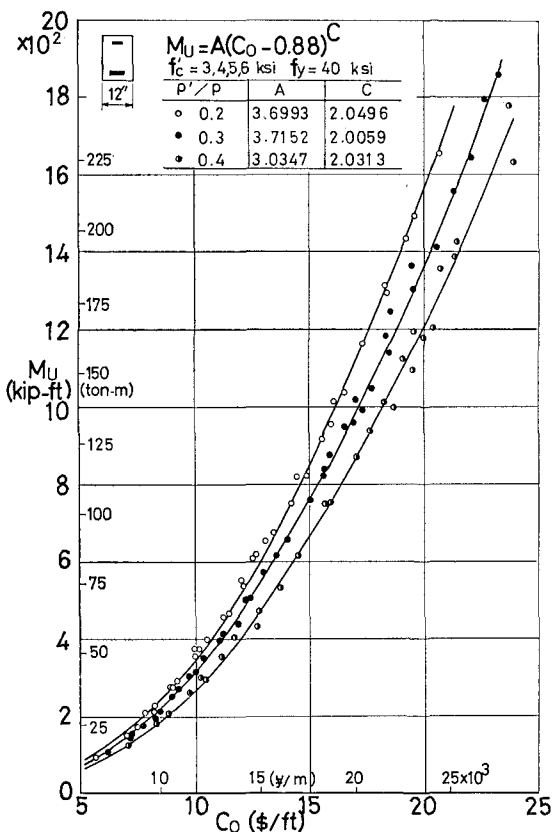


Fig. 2. Ultimate moment vs. cost per unit length

図-2 最終モーメントと単位部材長の費用との関係

ここに b = フランジ幅 (in), 最終モーメントと対応する費用は, 次式によって計算される。

$$M_U = 0 \{ b' d^2 P f_y (1 - 0.59 f_y / f_c') + A_f f_y \{ d - t/2 \} / 12000 \} \quad (13)$$

$$C_0 = \{ b \{ d + s \} + 16 t^2 \} C_s / 27 \times 144 + A_s C_s 490 / 2000 \times 144 + \{ 2 \{ d + s - t \} + b \} C_{f_y} / 12 + t C_{f_s} 4 / 3 \quad (14)$$

ここに $A_f = 0.85(b - b') t f_y / f_y$, C_{f_s} = スラブ用型枠の単価。最終モーメントと費用との関係は, 次式を満足すると仮定され, 係数は表-3 に示されている。

$$M_U = C \cdot C_0 + A \quad (15)$$

モーメント・費用関係の一般式は次の形で表わされる。

$$M_U = C \cdot C_0 - (D \cdot f_c' + E) \quad (16)$$

ここに $C = CG f_y^2 + CH f_y + CI$

$$D = DG f_y^2 + DH f_y + DI$$

$$E = EG f_y^2 + EH f_y + EI$$

$t = 3, 4, 5$ in (7.62, 10.2, 12.7 cm) に対して,

$$CG = -0.2000 \times 10^{-6} t^2 + 0.1550 \times 10^{-5} t - 0.2870 \times 10^{-5}$$

$$CH = 0.2090 \times 10^{-1} t^2 - 0.1620 \times 10^0 t + 0.3037 \times 10^0$$

表-3 T 形断面のモーメント・費用関係の係数

t in	f_y ksi	f_c' ksi	C	A	t in	f_y ksi	f_c' ksi	C	A
3	40	3 4 5 6	164	2100	6	40	3 4 5 6	336	9740 10900 11950 13200
	50	3 4 5 6	204	2450		50	3 4 5 6	414	10750 11920 13200 14350
	60	3 4 5 6	240	2680		60	3 4 5 6	450	10800 11800 12700 13700
4	40	3 4 5 6	250	4300 4900 5250 5450	7	40	3 4 5 6	341	11700 13230 14810 16600
	50	3 4 5 6	268	4040 4330 4730 5000		50	3 4 5 6	500	16500 18400 20300 22500
	60	3 4 5 6	312	4450 4690 5060 5480		60	3 4 5 6	545	16390 17900 19600 21600
5	40	3 4 5 6	279	6270 6980 7700 8520	8	40	3 4 5 6	329	13000 14800 16700 18500
	50	3 4 5 6	333	6750 7600 8130 8780		50	3 4 5 6	425	15600 17600 19400 21300
	60	3 4 5 6	363	6710 7320 7980 8740		60	3 4 5 6	459	15200 16700 18400 19700

$$M_U = C \cdot C_0 - A$$

$$CI = -0.5445 \times 10^3 t^2 + 0.4286 \times 10^4 t - 0.7992 \times 10^4$$

$$DG = -0.1625 \times 10^{-9} t^2 + 0.1627 \times 10^{-8} t - 0.3420 \times 10^{-8}$$

$$DH = 0.1632 \times 10^{-4} t^2 - 0.1651 \times 10^{-3} t + 0.3483 \times 10^{-3}$$

$$DI = -0.4250 \times 10^0 t^2 + 0.4623 \times 10^1 t - 0.1004 \times 10^2$$

$$EG = -0.5125 \times 10^{-5} t^2 + 0.3837 \times 10^{-4} t - 0.6960 \times 10^{-4}$$

$$EH = 0.5352 \times 10^0 t^2 - 0.4019 \times 10^1 t + 0.7329 \times 10^1$$

$$EI = -0.1328 \times 10^5 t^2 + 0.1009 \times 10^6 t - 0.1837 \times 10^6$$

$t = 6, 7, 8$ in (15.2, 17.8, 20.3 cm) に対して,

$$CG = 0.3100 \times 10^{-6} t^2 - 0.4390 \times 10^{-5} t + 0.1497 \times 10^{-4}$$

$$CH = -0.3510 \times 10^{-1} t^2 + 0.4968 \times 10^0 t - 0.1690 \times 10^1$$

$$CI = 0.8995 \times 10^3 t^2 - 0.1273 \times 10^5 t + 0.4362 \times 10^5$$

$$DG = 0.1288 \times 10^{-8} t^2 - 0.1816 \times 10^{-7} t + 0.6115 \times 10^{-7}$$

$$\begin{aligned}
 DH &= -0.1467 \times 10^{-3} t^2 + 0.2063 \times 10^{-2} t - 0.6961 \times 10^{-2} \\
 DI &= 0.3670 \times 10 t^2 - 0.5120 \times 10^2 t + 0.1730 \times 10^3 \\
 EG &= 0.1125 \times 10^{-4} t^2 - 0.1624 \times 10^{-3} t + 0.5692 \times 10^{-3} \\
 EH &= -0.1220 \times 10 t^2 + 0.1761 \times 10^2 t - 0.6165 \times 10^2 \\
 EI &= 0.3094 \times 10^5 t^2 - 0.4462 \times 10^6 t - 0.1565 \times 10^7
 \end{aligned}$$

図-3は、最終モーメントと費用との関係の一例を示す。

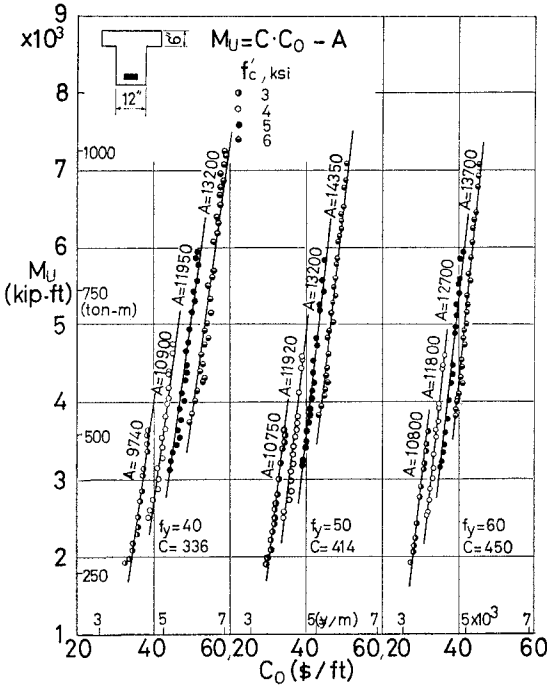


Fig. 3. Ultimate moment vs. cost per unit length
図-3 最終モーメントと単位部材長の費用との関係

4. 連続ゲタ設計への適用

図-4に示される複鉄筋矩形断面を有する2径間連続ゲタが扱われる。図-5に示す崩壊機構に対して、次の不等式が求まる。

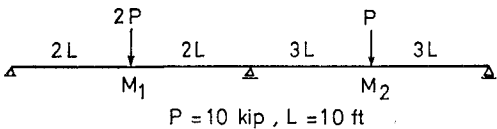


Fig. 4. Continuous beam: Design example

図-4 連続ゲタ：設計例

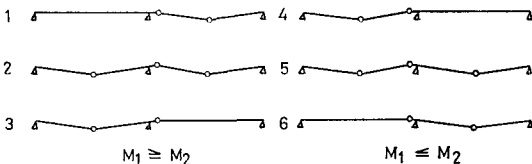


Fig. 5. Collapse mechanisms of continuous beam

図-5 連続ゲタの崩壊機構

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 4 \\ 4 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (17)$$

ここに $m_j = M_j / PL$, $j=1, 2$, M_j =変数としての最終モーメントである。(17)式は、この問題における制限式で図-6に画かれている。図-6の点AまたはBが、最適解を与え

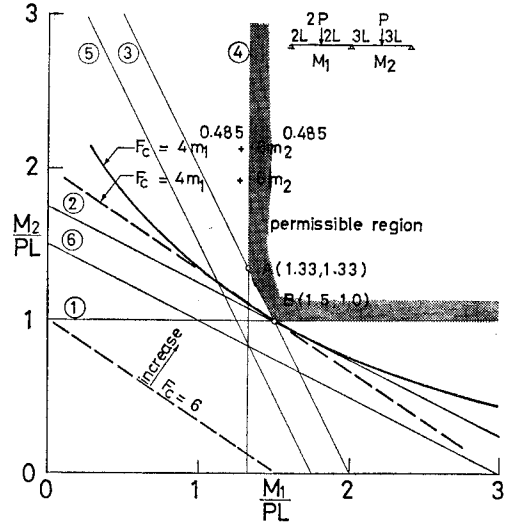


Fig. 6. Graphical solution of continuous beam
図-6 連続ゲタの図解法

るはずである。モーメントと費用の非線型関係にもとづいた場合、目的関数としての費用関数は次式で表わされる。

$$F_C = 4m_1^{0.485} + 6m_2^{0.485} \quad (18)$$

制限式を満たし、かつ費用関数を最小にする m_j の値は、 F_C の値を変化することにより図上で得られる。この例では、図-6のB点が最適解を与え $m_1=1.5$, $m_2=1.0$ となる一方最終モーメントと費用との線型関係にもとづいた場合の目的関数は、次式で表わされる。

$$F_C = 4m_1 + 6m_2 \quad (19)$$

図-6に示すように、この場合もB点が最適解を与える。非線型関係にもとづいた結果が、線型関係にもとづいた結果に等しいとは、一般に言えないが、相似の断面を用いた場合、線型関係にもとづいた結果は通常の設計において実用上十分である^{10),13)}。最終モーメントと費用との関係が線型であれば、問題はより簡単となり線型計画法^{8),12)}が適用できる。これは変数が3個以上の場合が極めて容易に扱われることを意味する。

電算機の利用に適している線型計画法において、最適解を求めるための制限式と目的関数は次式で表わされる。

$$\text{制限式} \quad [a_{ij}][m_j] + [r_i] \geq 0 \quad (20)$$

$$\text{目的関数} \quad [w_j][m_j] + [F_C] = 0 \quad (21)$$

ここに a_{ij} , w_j , r_i =定数, F_C =費用関数, シンプレックス・タブローは, 次のように表わされる。

$$\left(\begin{array}{c|c} a_{i \times j} & r_{i \times 1} \\ \hline I_{j \times j} & 0^* \\ \hline w_{1 \times j} & 0^* \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{c|c} & \\ \hline & m_{j \times 1} \\ \hline & F_C \end{array} \right)$$

Table (1)	Table (2)	Table (3)																																																																																										
<table> <tr><td>0</td><td>1</td><td>-1</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>-3.5</td></tr> <tr><td>②</td><td>1</td><td>-4</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>-1.333</td></tr> <tr><td>2</td><td>1</td><td>-3.5</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>-3</td></tr> <tr><td colspan="3"> </td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>4</td><td>6</td><td>0</td></tr> </table>	0	1	-1	1	2	-3.5	②	1	-4	1	0	-1.333	2	1	-3.5	1	2	-3				1	0	0	0	1	0	4	6	0	<table> <tr><td>0</td><td>1</td><td>-1</td></tr> <tr><td>0.5</td><td>(1.5)</td><td>-1.5</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0.5</td><td>-0.5</td><td>0.667</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>0.5</td></tr> <tr><td>0.5</td><td>1.5</td><td>-1</td></tr> <tr><td colspan="3"> </td></tr> <tr><td>0.5</td><td>-0.5</td><td>2</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>2</td><td>4</td><td>8</td></tr> </table>	0	1	-1	0.5	(1.5)	-1.5	1	0	0	0.5	-0.5	0.667	1	0	0.5	0.5	1.5	-1				0.5	-0.5	2	0	1	0	2	4	8	<table> <tr><td>-0.333</td><td>0.667</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0.667</td><td>-0.333</td><td>0.167</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>0.5</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>0.5</td></tr> <tr><td colspan="3"> </td></tr> <tr><td>0.667</td><td>-0.333</td><td>1.5</td></tr> <tr><td>-0.333</td><td>0.666</td><td>1.0</td></tr> <tr><td>0.667</td><td>2.667</td><td>12.0</td></tr> </table> $= m_1$ $= m_2$ $= F_C$	-0.333	0.667	0	0	1	0	1	0	0	0.667	-0.333	0.167	1	0	0.5	0	1	0.5				0.667	-0.333	1.5	-0.333	0.666	1.0	0.667	2.667	12.0
0	1	-1																																																																																										
1	2	-3.5																																																																																										
②	1	-4																																																																																										
1	0	-1.333																																																																																										
2	1	-3.5																																																																																										
1	2	-3																																																																																										
1	0	0																																																																																										
0	1	0																																																																																										
4	6	0																																																																																										
0	1	-1																																																																																										
0.5	(1.5)	-1.5																																																																																										
1	0	0																																																																																										
0.5	-0.5	0.667																																																																																										
1	0	0.5																																																																																										
0.5	1.5	-1																																																																																										
0.5	-0.5	2																																																																																										
0	1	0																																																																																										
2	4	8																																																																																										
-0.333	0.667	0																																																																																										
0	1	0																																																																																										
1	0	0																																																																																										
0.667	-0.333	0.167																																																																																										
1	0	0.5																																																																																										
0	1	0.5																																																																																										
0.667	-0.333	1.5																																																																																										
-0.333	0.666	1.0																																																																																										
0.667	2.667	12.0																																																																																										

上記のシンプレックス・タブローに対する計算手順は, 次のとおりである。

- 規則 1: 負の r をもつ $[a]$ の各々に対して, w_j/a_{ij} を計算する。
- 規則 2: w_j/a_{ij} の最小の値を見出し, これをピボットとする。○印はピボットを示す。
- 規則 3: 同一列の a , I および w をピボットで割り, それを次の表の同一位置に入れる。
- 規則 4: ピボットのある行の各要素を 0 にする, すなわち新しい表の a に定数を乗じ元の表の要素から引く。
- 規則 5: 指標列に 0 がなくなるまで規則 1 から 4 までをくり返す。

タブローに示されるように, 線型計画法によって求められた最適解は, 図解法によって求められた結果と明らかに同一である。 M_1 および M_2 は, 夫々 150 (20.7) および 100 Kip-ft (13.8 ton-m) となる。付録の断面諸値表から, 最適断面は図-7 のように求められる。

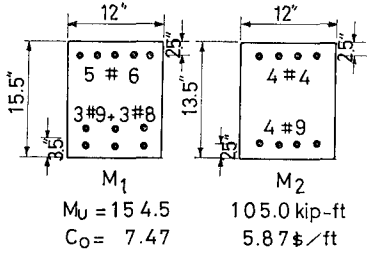


Fig. 7. Optimum sections for continuous beam

図-7 連続ゲタの最適断面

5. ラーメン設計への適用

(1) 単純ラーメン

図-8 に示される単純ラーメンが扱われる。設計条件とし

ここに $I_{j \times j}$ =単位マトリクス, *=指標列を示す。この例では (17) 式が制限式であり, (19) 式が最小にされるべき目的関数となる。この場合のシンプレックス・タブローは次のようになる。

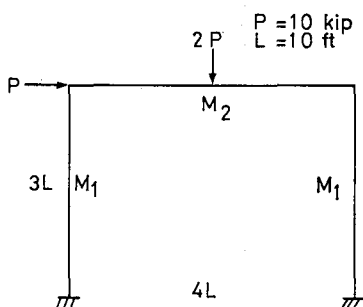


Fig. 8. Simple frame: Design Example

図-8 単純ラーメン：設計例

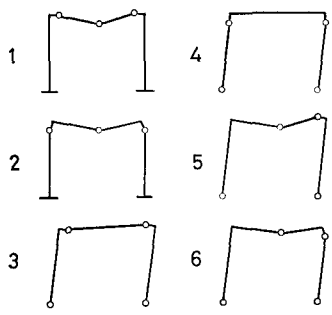


Fig. 9. Collapse mechanisms of simple frame

図-9 単純ラーメンの崩壊機構

て, 断面形状は複鉄筋矩形, 鉄筋の降伏点強度 40,000 psi (2,812 kg/cm²), コンクリート圧縮強度 3,000 psi (211 kg/cm²) および鉄筋比を 0.2 とする。崩壊機構は図-9 によって示され, 制限式は次の不等式によって表わされる。

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 1 \\ 1.5 \\ 7 \\ 2 \\ 0.75 \\ 7 \end{pmatrix} \quad (22)$$

また目的関数は、最終モーメントと費用との非線型関係にもとづいた場合次式で表わされる。

$$F_C = 6 m_1^{0.485} + 4 m_2^{0.485} \tag{23}$$

図-10に示すように B 点が図解法による最適解を与え、

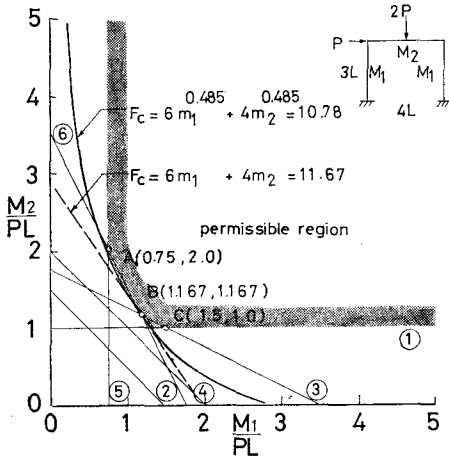


Fig. 10. Graphical solution for simple frame

図-10 単純ラーメンの図解法

$m_1 = m_2 = 1.167$ となる。線型関係にもとづいた目的関数も図-10に示されているが、この例では同一の解を与えている。線型計画法による解は、次のシンプレックス・タブローによって示される。

0	1	-1	-0.167	0.333	0.167	
1	1	-2	0.167	0.167	-0.333	
1	1	-1.5	0.167	0.167	0.833	
1	0	-0.75	0.333	-0.167	0.416	
2	4	-7	0	1	0	
4	2	-7	1	0	0	
1	0	0	0.333	-0.167	1.166	$= u_1$
0	1	0	-0.167	0.333	1.166	$= m_2$
6	4	0	1.333	0.333	11.667	$= F_C$

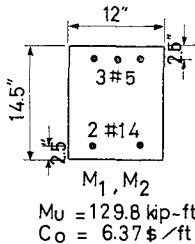


Fig. 11. Optimum section for Simple frame

図-11 単純ラーメンの最適断面

上表より M_1 および M_2 は、116.7 Kip-ft (16.1 ton-m) となる。従って付録の断面諸値表より最適断面は、図-11に示

すように求められる。

門形のような一層のラーメンでは、大きな曲げモーメントと同時に比較的小さい軸力が作用する。こうした場合、柱断面に対する非対称の配筋が、通常は最も経済的となる²⁸⁾。この例では直接解を試みる。圧縮力 $P = 2.5$ Kip (1.13 ton 左側柱)、 $P = 17.5$ Kip (7.94 ton 右側柱) および曲げモ

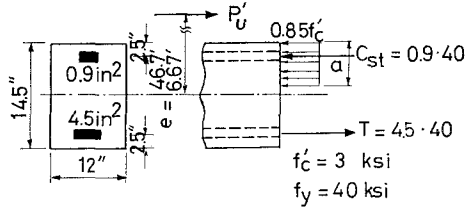


Fig. 12. Equilibrium of forces for columns of simple frame

図-12 単純ラーメン柱断面の力の釣合

ーメント $M = 116.7$ Kip-ft (16.1 ton-m) を受ける断面の平衡は、図-12に示すとおりである。この結果、左側柱に対して、

$$P_U = 2.9 (1.32) > P = 2.5 \text{ Kip (1.13 ton)}$$

$$M_U = 135.4 (18.7) > M = 116.7 \text{ Kip-ft (16.1 ton-m)}$$

右側柱に対して、

$$P_U = 19.6 (8.89) > P = 17.5 \text{ Kip (7.94 ton)}$$

$$M_U = 131.0 (18.1) > M = 116.7 \text{ Kip-ft (16.1 ton-m)}$$

従って図-11の最適断面は、柱の軸力を考慮した場合も設計上十分である。軸力のためにより大きい容量が必要であれば、断面諸値表からより大きい断面が選ばれる。しかし、最終的に引張破壊を起すように設計された曲げ部材では、一般に軸圧縮力の存在はモーメント容量を増加する。

(2) 1層2スパン・ラーメン

変数が3個の例として図-13に示すラーメンが扱われる。基本崩壊機構は通常最終結果を与えないので、この例ではそれらを除き基本崩壊機構の組合わせのみが考慮される。従って問題のラーメンに対する線型制限は、図-14に示される崩壊機構にもとづいて、次の不等式によって表わされる。

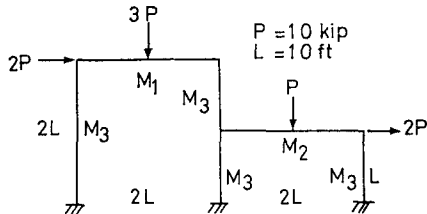


Fig. 13. 2-Bay frame: Design example

図-13 2スパン・ラーメン：設計例

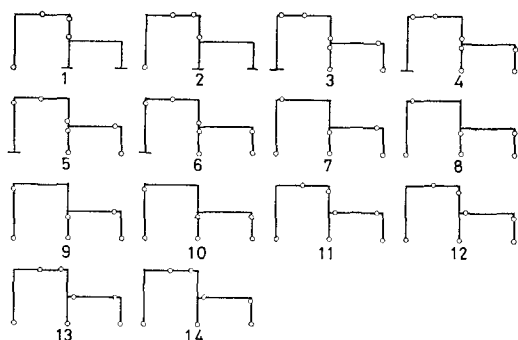


Fig. 14. Collapse mechanisms of 2-bay frame

図—14 2 スパン・ラーメンの崩壊機構

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 5 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & 9 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 8 \\ 8 \\ 4 \\ 4 \\ 9 \\ 9 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix} \quad (24)$$

最終モーメントと費用との線型関係にもとづいた場合、目的関数は次式で表わされる。

$$F_C = 2m_1 + 2m_2 + 4m_3 \quad (25)$$

ここに $m_j = M_j/PL$, $j=1, 2, 3$. 従ってシンプレックス・タブローは、次の形になる。

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 6 & -7 \\ 5 & 0 & 3 & -7 \\ 3 & 1 & 4 & -5 \\ 3 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 1 & 5 & -5 \\ 2 & 0 & 6 & -5 \\ 1 & 2 & 7 & -8 \\ 1 & 0 & 9 & -8 \\ 1 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & -4 \\ 2 & 2 & 5 & -9 \\ 2 & 1 & 6 & -9 \\ 4 & 2 & 3 & -9 \\ 4 & 1 & 4 & -9 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 2 & 2 & 4 & 0 \end{array}$$

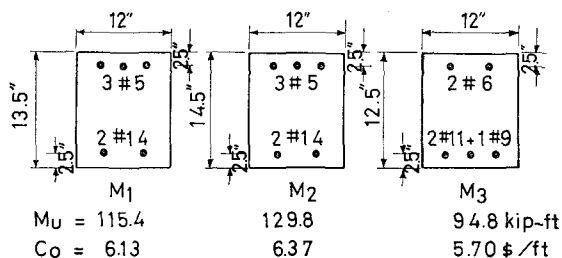


Fig. 15. Optimum sections for 2-bay frame

図—15 2 スパン・ラーメンの最適断面

この場合の最適解は、 $M_1=108$ (14.9), $M_2=120$ (16.6), $M_3=53.8$ Kip-ft (7.44 ton-m) となる。設計条件を単純ラーメンの場合と同様とし、軸力の影響を無視すれば、この例に対する最適断面は図-15に示すように求まる。しかし、前に示したように軸力の影響をも考慮することができる。

6. む す び

ここに述べられた鉄筋コンクリート構造の最適設計法は、単鉄筋矩形断面、複鉄筋矩形断面およびT形断面の最適の構造断面を決定することを可能にする。本稿は、ある形状を有する鉄筋コンクリート断面に対して、最終モーメントと費用との関係を求めることを含んでいる。このモーメント・費用関係は、通常的设计法において経済比較の目的にも簡単に利用できる。

適用例では、図解法と線型計画のシンプレックス法のみが用いられ、またここに開発された方法では断面形状や寸法に制限がある。従って最急降下法、動的計画法などの手法を用いて、変数が3個以上の場合について鉄筋コンクリート構造物に対するより一般的な最適設計法の開発が望まれる。

本稿は、科学技術庁の在外研究員としての筆者の研究¹⁾をもとにしたものである。本研究の遂行を支援して下さった科学技術庁、北海道開発庁、北海道開発局土木試験所および直接御指導いただいた C. Berwanger 教授に深甚なる謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) Albouy, J., Bonnet, A. and Leray, J.: "Automatic Design of Highway Bridges by Electronic Computer". Computer Application in Concrete Design and Technology, ACI Publication SP-16, 1967, pp. 97-108.
- 2) Anderheggen, E. and Thürlimann, B.: "Optimum Design Using Linear Programming". Publication of International Association of Bridge and Structural Engineering, Vol. 26, 1966, pp. 555-571.
- 3) Baker, J. F., Horne, M. R. and Heyman, J.: "The Steel Skeleton", Vol. II. Cambridge Univ. Press,

- New York, 1956.
- 4) Bigelow, R. H. and Gaylord, E. H.: "Minimum Weight of Plastically Designed Steel Frames", University of Illinois, *Engineering Experiment Station-Bulletin 485*, 1966.
 - 5) Brothchie, J. F.: "Direct Design of Framed Structures", *Journal of Structural Division*, ASCE, Vol. 90, No. ST6, Dec., 1964, Part 1, Paper 4182, pp. 243-257.
 - 6) "Building Code Requirements for Reinforced Concrete (ACI 318-63): American Concrete Institute, Detroit, 1963.
 - 7) "Construction Pricing and Scheduling Manual",: F. W. Dodge Company, New York, 1968.
 - 8) Ficken, F. A.: "The Simplex Method of Linear Programming", Holt, Rinehart and Winston, 1961.
 - 9) Foulkes, J.: "Minimum Weight Design and the Theory of Plastic Collapse", *Quarterly Applied Mathematics*, Vol. 10, 1953, pp. 347-358.
 - 10) Foulkes, J.: "Minimum Weight Design of Structural Frames", *Proceedings of Royal Society of London*, Series A, Vol. 223, 1954, pp. 482-494.
 - 11) Fujii, T.: "Application of Minimum Weight Design Technique to Reinforced Concrete", report presented to Univ. of Ottawa, at Ottawa, Ont., Canada, in 1969, in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of Applied Science.
 - 12) Garvin, W. W.: "Introduction to Linear Programming", McGraw Hill, New York, 1960.
 - 13) Heyman, J.: "Plastic Design of Beams and Plane Frames for Minimum Material Consumption", *Quarterly of Applied Mathematics*, Vol. 8, 1951, pp. 378-381.
 - 14) Hill, L. A. Jr.: "Automated Optimum Cost Design of Building Girders", Computer Applications in Concrete Design and Technology, *ACI Publication, SP-16*, 1967, pp. 121-137.
 - 15) Hodge, P. G. Jr.: "Plastic Analysis of Structures", McGraw Hill, New York, 1959.
 - 16) Livesley, R. K.: "The Automatic Design of Structural Frames", *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, Vol. 9, 1956, pp. 257-278.
 - 17) Megarefs, G. J. and Hodge, P. G. Jr.: "Method for Plastic Design of Frames", *Journal of Structural Division*, ASCE, Vol. 89, No. ST1, Feb., 1963, Part 1, Paper 3421, pp. 197-214.
 - 18) Norman, D. G.: "Economic Aspects in the Design of Some Reinforced Concrete Structural Members", *Journal of ACI*, Vol. 61, No. 4, Apr., 1964, pp. 419-440.
 - 19) Prager, W.: "Minimum-weight Design of a Portal Frame", *Journal of Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. 82, No. EM4, Oct., 1956, Paper 1073, pp. 1-10.
 - 20) "Reinforced Concrete Design Handbook", SP-3, American Concrete Institute, Detroit, 1965.
 - 21) Rozvany, G. I. N. and Hampson, A. J. K.: "Optimum Design of Prestressed Plates", *Journal of ACI*, Vol. 60, No. 8, Aug., 1963, pp. 1065-1082.
 - 22) Rozvany, G. I. N.: "Rational Approach to plate Design", *Journal of ACI*, Vol. 63, No. 10, Oct., 1966, pp. 1077-1094.
 - 23) Sawyer, H. A.: "Economy and Concrete Beams", *Journal of ACI*, Vol. 23, No. 9, May, 1952, pp. 773-784.
 - 24) Toakley, A. R.: "Optimum Design Using Available Sections", *Journal of Structural Division*, ASCE, Vol. 94, No. ST5, May, 1968, Paper 5960, pp. 1219-1241.
 - 25) Traum, E.: "Economical Design of Reinforced Concrete Slabs Using Ultimate Strength Theory", *Journal of ACI*, Vol. 50, No. 6, June, 1963, pp. 763-774.
 - 26) "Ultimate Strength Design Handbook", American Concrete Institute, Detroit, 1964.
 - 27) Vargo, L. G.: "Nonlinear Minimum Weight Design of Planar Structures", *Journal of the Aeronautical Sciences*, Vol. 23, No. 10, Oct., 1956, pp. 956-960.
 - 28) Winter, G., et al.: "Design of Concrete Structures", McGraw Hill, New York, 1964.

付 録——最適断面の諸値表

SINGLY REINFORCED RECTANGULAR SECTIONS

$f_y = 40 \text{ ksi}$, $f'_c = 3 \text{ ksi}$

d	3.00	4.00	5.00	6.00	6.00	7.00	7.00
$p\%$	1.80	2.10	2.00	1.80	2.40	2.00	2.50
A_s	0.65	1.01	1.20	1.30	1.73	1.68	2.10
s	2.50	2.50	2.50	2.50	2.50	2.50	2.50
M_U	5.01	10.10	15.17	20.02	25.23	29.73	35.43
C_0	2.33	2.71	3.00	3.26	3.45	3.64	3.38
d	8.00	8.00	9.00	9.00	10.00	10.00	11.00
$p\%$	2.10	2.40	2.30	2.60	2.20	2.40	2.40
A_s	2.02	2.30	2.48	2.81	2.64	2.64	3.17
s	2.50	2.50	2.50	2.50	2.50	2.50	2.50
M_U	40.39	44.86	54.93	60.31	65.49	70.09	84.81
C_0	4.00	4.13	4.42	4.57	4.71	4.81	5.15
d	11.00	12.00	13.00	14.00	16.00	17.00	20.00
$p\%$	2.60	2.70	2.30	2.70	2.50	2.60	2.40
A_s	3.43	3.89	3.59	4.54	4.80	5.30	5.76
s	2.50	2.50	2.50	2.50	3.50	3.50	3.50
M_U	90.09	110.24	114.61	150.05	185.09	215.18	280.35
C_0	5.27	5.69	5.77	6.40	7.15	7.59	8.43
d	22.00	22.00	23.00	25.00	28.00	30.00	—
$p\%$	2.50	2.60	2.70	2.60	2.70	2.60	—
A_s	6.60	6.86	7.45	7.80	9.07	9.36	—
s	3.50	3.50	3.50	3.50	3.50	3.50	—
M_U	349.93	360.37	404.97	465.35	600.19	670.10	—
C_0	9.23	9.35	9.82	10.40	11.61	12.16	—

DOUBLY REINFORCED RECTANGULAR SECTIONS

$f_y = 40 \text{ ksi}$, $f'_c = 3 \text{ ksi}$, $p'/p = 0.2$

d	10.00	11.00	11.00	12.00	15.00	20.00	22.00
$p\%$	2.70	2.40	2.70	2.50	2.50	2.60	2.70
A_s	4.05	3.96	4.45	4.50	5.65	7.80	8.91
A'_s	0.81	0.79	0.89	0.90	1.12	1.56	1.78
s	2.50	2.50	2.50	2.50	3.50	3.50	3.50
s'	2.50	2.50	2.50	2.50	2.50	2.50	2.50
M_U	94.78	105.00	115.35	129.76	204.86	379.72	474.77
C_0	5.70	5.87	6.13	6.37	7.82	10.05	11.07
d	23.00	24.00	25.00	—	—	—	—
$p\%$	2.70	2.60	2.70	—	—	—	—
A_s	9.31	9.36	10.12	—	—	—	—
A'_s	1.86	1.87	2.02	—	—	—	—
s	3.50	3.50	4.50	—	—	—	—
s'	2.50	2.50	2.50	—	—	—	—
M_U	519.55	549.61	615.15	—	—	—	—
C_0	11.50	11.73	12.57	—	—	—	—

DOUBLY REINFORCED RECTANGULAR SECTIONS

$$f_y = 40 \text{ ksi}, \quad f'_c = 3 \text{ ksi}, \quad \rho'/\rho = 0.4$$

d	10.00	12.00	13.00	14.00	15.00	15.00	16.00
$\rho\%$	2.70	2.20	2.30	2.40	2.50	2.60	2.50
A_s	5.40	5.28	5.98	6.72	7.50	7.80	8.00
A'_s	2.16	2.11	2.39	2.69	3.00	3.12	3.20
s	3.50	3.50	3.50	3.50	3.50	3.50	3.50
s'	2.50	2.50	2.50	2.50	2.50	2.50	2.50
M_U	125.15	154.50	189.96	230.11	275.17	284.52	314.69
C_0	7.13	7.47	8.13	8.80	9.50	9.69	10.03
d	16.00	17.00	18.00	19.00	23.00	24.00	26.00
$\rho\%$	2.60	2.40	2.60	2.70	2.50	2.70	2.50
A_s	8.32	8.16	9.36	10.26	11.50	12.96	13.00
A'_s	3.33	3.26	3.74	4.10	4.60	5.18	5.20
s	3.50	3.50	3.50	4.50	4.50	4.50	4.50
s'	2.50	2.50	2.50	2.50	2.50	3.50	3.50
M_U	325.39	344.54	415.33	479.51	665.37	759.77	839.75
C_0	10.23	10.34	11.31	12.30	13.92	15.05	15.00
d	28.00	—	—	—	—	—	—
$\rho\%$	2.70	—	—	—	—	—	—
A_s	15.12	—	—	—	—	—	—
A'_s	6.05	—	—	—	—	—	—
s	6.00	—	—	—	—	—	—
s'	3.50	—	—	—	—	—	—
M_U	1044.72	—	—	—	—	—	—
C_0	17.57	—	—	—	—	—	—

T-SECTIONS

$$f_y = 40 \text{ ksi}, \quad f'_c = 3 \text{ ksi}, \quad t = 3 \text{ in}$$

d	10.00	10.00	10.00	10.00	10.00	11.00	12.00
$\rho\%$	0.60	1.10	1.80	2.00	2.20	2.00	2.10
A_s	9.90	10.50	11.34	11.58	11.82	11.82	12.20
s	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50
M_U	254.67	270.26	289.71	294.76	299.58	335.04	380.05
C_0	12.24	12.51	12.89	13.00	13.11	13.32	13.70
d	12.00	13.00	13.00	13.00	14.00	16.00	16.00
$\rho\%$	2.40	1.90	2.40	2.80	2.60	2.00	2.60
A_s	12.64	12.14	12.92	13.55	13.55	13.02	14.17
s	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	6.00
M_U	415.03	1390.10	435.16	449.54	490.18	554.65	589.94
C_0	13.89	13.89	14.24	14.52	14.73	14.91	15.75
d	16.00	19.00	19.00	20.00	21.00	21.00	22.00
$\rho\%$	2.70	2.10	2.40	2.40	2.60	2.70	2.50
A_s	14.36	13.97	14.65	14.94	15.73	15.98	15.78
s	6.00	4.50	6.00	6.00	6.00	6.00	6.00
M_U	595.31	709.78	734.97	789.84	865.38	874.64	914.50
C_0	15.83	15.97	16.60	16.94	17.50	17.62	17.74

d	22.00	22.00	22.00	23.00	24.00	25.00	27.00
$p\%$	2.60	2.70	2.80	2.50	2.30	2.40	2.60
A_s	16.04	16.31	16.57	16.08	15.80	16.38	17.60
s	6.00	6.00	6.00	6.00	6.00	6.00	6.00
M_U	924.93	935.09	944.98	974.58	1010.29	1085.24	1245.05
C_0	17.85	17.97	18.09	18.08	18.08	18.64	19.61

d	27.00	27.00	28.00	29.00	30.00	—	—
$p\%$	2.70	2.80	2.70	2.50	2.60	—	—
A_s	17.93	18.25	18.25	17.88	18.54	—	—
s	6.00	6.00	6.00	6.00	6.00	—	—
M_U	1260.35	1275.24	1330.00	1365.39	1454.99	—	—
C_0	19.76	19.90	20.11	20.16	20.67	—	—

T-SECTIONS

$f_y = 40$ ksi, $f'_c = 3$ ksi, $t = 6$ in

d	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00
$p\%$	0.30	0.60	1.00	1.70	1.80	1.90	2.00
A_s	37.44	38.16	39.12	40.80	41.04	41.28	41.52
s	10.50	10.50	10.50	10.50	10.50	10.50	10.50
M_U	1914.90	1955.04	2005.39	2084.78	2095.21	2105.42	2115.40
C_0	33.40	33.72	34.15	34.91	35.01	35.12	35.23

d	20.00	20.00	21.00	21.00	21.00	22.00	22.00
$p\%$	2.10	2.20	1.60	2.00	2.70	1.70	1.90
A_s	41.76	42.00	40.75	41.76	43.52	41.21	41.74
s	10.50	10.50	10.50	10.50	10.50	10.50	10.50
M_U	2125.16	2134.69	2204.92	2250.44	2320.48	2349.63	2374.61
C_0	35.34	35.44	35.10	35.55	36.34	35.51	35.75

d	22.00	23.00	24.00	25.00	25.00	26.00	26.00
$p\%$	2.20	2.20	2.50	2.50	2.80	2.10	2.80
A_s	42.53	42.79	43.92	44.22	45.12	43.27	45.46
s	10.50	10.50	10.50	10.50	10.50	10.50	10.50
M_U	2410.02	2549.65	2729.80	2875.39	2914.75	2960.30	3064.99
C_0	36.10	36.43	37.15	37.50	37.90	37.28	38.26

d	27.00	28.00	28.00	29.00	29.00	29.00	29.00
$p\%$	2.40	2.00	2.80	2.10	2.20	2.30	2.60
A_s	44.50	43.44	46.13	44.03	44.38	44.72	45.77
s	10.50	10.50	10.50	10.50	10.50	10.50	10.50
M_U	3154.77	3229.66	3370.19	3394.92	3414.95	3434.51	3490.33
C_0	38.04	37.78	38.99	38.26	38.41	38.57	39.04

d	29.00	30.00	30.00	30.00	—	—	—
$p\%$	2.80	2.30	2.40	2.50	—	—	—
A_s	46.46	45.00	45.36	45.72	—	—	—
s	10.50	10.50	10.50	10.50	—	—	—
M_U	3525.15	3584.68	3605.10	3625.01	—	—	—
C_0	39.35	38.90	39.07	39.23	—	—	—
